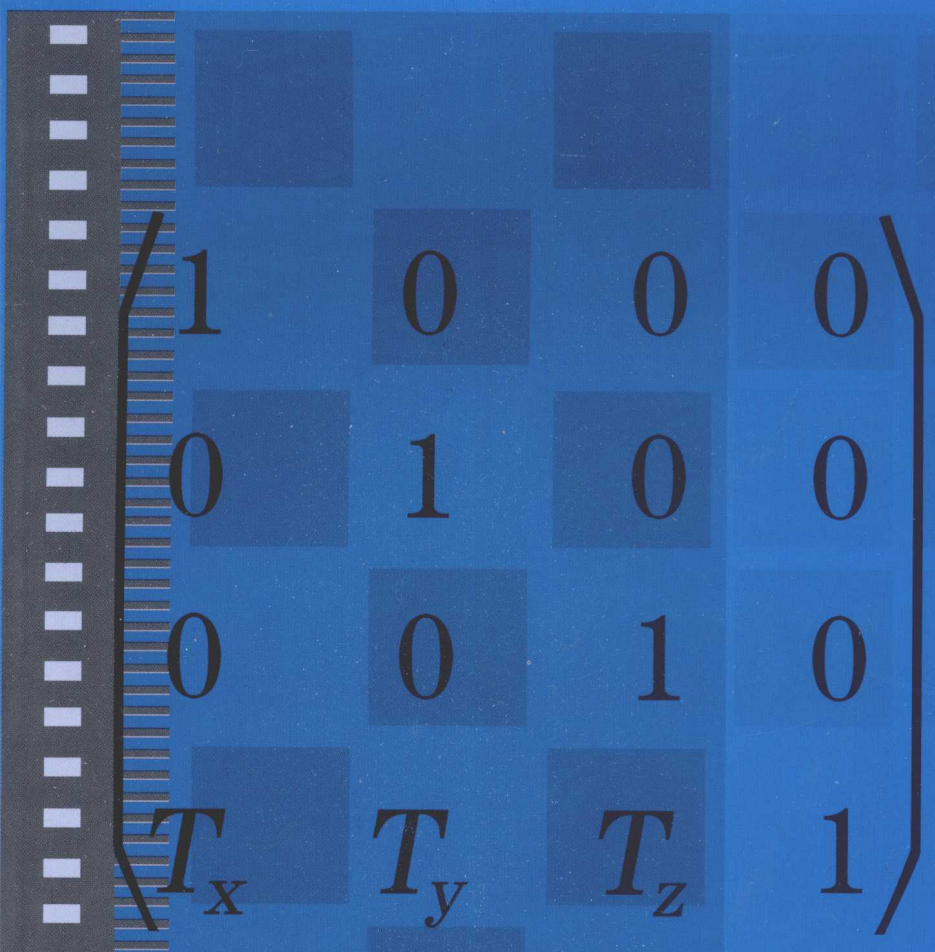
高等代数解题方法

张艳丽 刘洁晶 编著



河北教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等代数解题方法／张艳丽 刘洁晶 编著.—石家庄：河北教育出版社，2009.3

ISBN 978-7-5434-7137-5

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.高等代数－高等学校－解题

Ⅳ.O15-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第036888号

书　　名　高等代数解题方法
作　　者　张艳丽 刘洁晶
责任编辑　李　利
封面设计　乔　琳
特约校对　王　永

出　　版　河北教育出版社 http://www.hbep.com
（河北省石家庄联盟路705号）
发　　行　全国各地新华书店
印　　刷　衡水市文化印刷厂
开　　本　880毫米×1230毫米　1/16
印　　张　20
字　　数　352千字
印　　数　1-1500
版　　次　2009年3月第1版
印　　次　2009年3月第1版印刷
书　　号　ISBN 978-7-5434-7137-5/G.4723
定　　价　38.00元

前 言

《高等代数》是高等院校数学专业的一门重要基础课，它涵盖了线性代数的所有内容，且有加深与拓展．而线性代数又是理学、工学、经济学硕士研究生入学考试的一门主要课程．它在线性规划、离散数学、管理科学以及物理、化学等学科中也有广泛的应用．依据考试的基本要求，考生要系统地理解其基本概念、基本理论，掌握其主要方法，要求具有较强的抽象思维能力、逻辑推理能力、快速运算能力、综合分析问题和解决问题的能力．

本书是根据全国高校理工科数学课程《高等代数》的教学大纲，参考了国内外大量书籍、资料及作者多年来的教学经验而编写的，通过系统归纳高等代数知识，使读者掌握综合分析问题与解决问题的方法和技巧．

本书各章按以下内容和顺序进行编写：

1．基本概念． **2**．主要结论． **3**．应掌握的主要方法． **4**．典型习题及分析．

其中每章的第 4 部分按类型和类别对一些典型习题进行了解答，必要时进行了评注，深入浅出，使读者一目了然．每章对于概念性的知识点通过判断题的形式给出，且举以反例加以说明．附录列出了近几年高等代数和线性代数的部分考研试题，以供参考．

本书可以作为考研读者和专接本学生的复习资料．

在本书的校对中郭素霞教授、付胜明、王永老师、硕士研究生赵培臣、刘士琴、张仕光、申红莲、张利民、郭运涛等同志付出了辛勤的劳动，并提出了宝贵意见，谨此表示感谢．

由于编者水平有限，虽然与同仁们进行了多次认真的修改与校对，但仍难免存在错误，衷心希望专家、同行和读者批评指正，使本书在教学过程中不断完善．

编 者

2009 年 1 月

目 录

第1章 多项式

1.1 基本概念

1.1.1 数环的定义

设F是复数域C上的一个非空子集，如果F上任意两个数（这两个数也可以相同）的和、差、积都在F内，那么F就称为一个数环.

评注：数环F对三种运算封闭. 一般地，数环可以用$F,P,Q,\cdots$等表示.

1.1.2 数域的定义

设F是由一些复数组成的集合，其中包括0与1，如果F中任意两个数（这两个数也可以相同）的和、差、积、商（除数不为零）仍然是F中的数，那么F就称为一个数域.

评注：数域首先是数环，F中至少有一个不等于零的数，如果对于$\forall a,b\in F$，有$\frac{a}{b}\in F\ (b\neq 0)$，那么$F$就称为一个数域. 事实上，数域比数环又多了一种对除法运算封闭. 一般地，数域可以用$F,P,Q,\cdots$等表示.

1.1.3 一元多项式的定义

设n是一个非负整数. 形式表达式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ (1)，其中$a_0,a_1,\cdots,a_n$均属于数域F，称为系数在数域F上的一元多项式，或者简称为数域F上的一元多项式. 在多项式(1)中，a_0叫做零次项或常数项，a_1x叫做一次项. 一般地a_ix^i叫做i次项，a_i叫做i次项系数.

一个数环F上的系数不全为零的多项式可以写成$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$（2），其中$a_n\neq 0$的形式，且这种写法是唯一的. a_nx^n称为多项式（2）的最高次项，非负整数n称为多项式（2）的次数.

评注：1）通常用$f(x)$，$g(x)$，…，或f，g，…等表示多项式.

2）规定：在一个多项式中，可以任意添加或去掉一些系数为零的项. 若某个i次项（$i\neq 0$）的系数是1，这个系数可以省略不写.

3）数环F上每一个系数不全为零的多项式有一个唯一确定的次数. 特别地，最高次项是零的多项式a（$a\neq 0$）的次数是零.

4）系数全为零的多项式没有次数. 称此多项式为零多项式. 零多项式记为0（它是唯一不定义次数的多项式），多项式的次数简写为$\partial(f(x))$或次$(f(x))$.

1.1.4 多项式环的定义

所有系数在数域F上的一元多项式的全体，称为数域F上的一元多项式环，记作$F[x]$.

评注：通常用$F[x],P[x]\cdots$等表示多项式环.

1．1．5　整除的定义

1）设 $f(x),g(x)\in F[x]$，如果存在 $h(x)\in F[x]$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记作 $g(x)\mid f(x)$，否则称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，记作 $g(x)\nmid f(x)$，当 $g(x)\mid f(x)$ 时，称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式.

2)任一多项式 $f(x)$ 必整除它自身；任一多项式都整除零多项式；F 中非零常数整除 $F[x]$ 中任一多项式.

3) $F[x]$ 中任一多项式 $f(x)$ 都有因式 c、$cf(x)$（c 是 F 上不为零的数），称它们是 $f(x)$ 的平凡因式（或当然因式）.

1．1．6　公因式及最大公因式定义

1）设 $f(x),g(x)\in F[x]$，若存在 $d(x)\in F(x)$ 满足条件 $d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$，则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式.

2）若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式都是 $d(x)$ 的因式，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式. 记作 $(f(x),g(x))$.

1．1．7　互素的定义

设 $f(x),g(x)\in F[x]$，若 $(f(x),g(x))=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素（或互质）.

1．1．8　多项式的可约与不可约定义

令 $f(x)$ 是 $F[x]$ 中的一个次数大于零的多项式，若 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中只有平凡因式，就说 $f(x)$ 在数域 F 上（或在 $F[x]$ 中）不可约. 若 $f(x)$ 除平凡因式外，在 $F[x]$ 中还有其他因式，$f(x)$ 就说是在 F 上（或在 $F[x]$ 中）可约.

即 1）若多项式 $f(x)$ 有一个非平凡因式 $g(x)$，而 $f(x)=g(x)h(x)$，那么 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的次数显然都小于 $f(x)$ 的次数. 反之，若 $f(x)$ 能写成两个这样的多项式的乘积，那么 $f(x)$ 有非平凡因式.

2） 如果 $F[x]$ 中的一个 $n(n>0)$ 次多项式能够分解成 $F[x]$ 中两个次数都小于 n 的多项式 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的乘积：$f(x)=g(x)h(x)$. 那么 $f(x)$ 在 F 上可约.

3） 若 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中的任一个形如 $f(x)=g(x)h(x)$ 的分解式总含有一个零次因式，那么 $f(x)$ 在 F 上不可约.

评注：1）任意一个多项式环 $F[x]$ 中都存在不可约多项式.

2）多项式的可约与否与所给定的数域有关.

1．1．9　典型分解式

$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_t^{k_t}(x)$ 为典型分解式. 其中每一个 $p_i(x)\ (i=1,2,\cdots,t)$ 都是最高次项

系数等于1的不可约多项式，且 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_t(x)$ 互不相等．而 a 是 $f(x)$ 的最高次项系数．

评注：每一个多项式的典型分解式都是唯一确定的．

1．1．10　重因式定义

数域 F 上一个不可约多项式 $p(x)$ 叫做 F 上多项式 $f(x)$ 的一个 k 重因式（k 是一个非负整数）．如果 $p^k(x)$ 整除 $f(x)$，但是 $p^{k+1}(x)$ 不整除 $f(x)$．一重因式称为单因式．重数大于1的因式称为重因式．F 中任意不等于零的数是 F 上任意多项式的零重因式．

1．1．11　多项式函数

设给定多项式环 $F[x]$ 中的一个多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 和一个数 $c\in F$，那么在 $f(x)$ 里用 c 代替 x 得到 $a_0+a_1c+\cdots+a_nc^n=f(c)$，则对于 $\forall c\in F$ 就有唯一确定的数 $f(c)$ 与之对应，于是得到 F 到 F 的一个映射，这个映射是由多项式 $f(x)$ 所确定的，$f(x)$ 叫做 F 上的一个多项式函数．

1．1．12　多项式根的定义

令 $f(x)$ 为 $F[x]$ 中的一个多项式，而 c 是 F 上的一个数，若当 $x=c$ 时，$f(x)$ 的值 $f(c)=0$，那么 c 叫做 $f(x)$ 在数环 $F[x]$ 中的一个根．

1．1．13　本原多项式定义

若一个整系数多项式 $f(x)$ 的系数互素，那么 $f(x)$ 叫做一个本原多项式．

1．2　主要结论

1．2．1　最小数域

任何数域都包含有理数域 Q，即有理数域是最小的数域．

评注：整数集合不是数域，更不是最小的数域．

1．2．2　多项式的运算

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$$

是数域 F 上的两个一元多项式，假定 $m\le n$．

1）**多项式的加法**

多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x)+g(x)$ 是指多项式

$$(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_m+b_m)x^m+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0).$$

即 $f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$，这里当 $m<n$ 时，取 $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$．

2）多项式的乘积

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的积 $f(x)g(x)$ 是指多项式 $c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0$，

这里 $c_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k=\sum\limits_{i+j=k}a_ib_j$，即 $f(x)g(x)=\sum\limits_{k=0}^{m+n}(\sum\limits_{i+j=k}a_ib_j)x^k$.

评注： $f(x)g(x)=0$ 必要且只要 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中至少有一个是零多项式.

3）多项式的减法

用多项式的加法可以定义多项式的减法运算. 设 $g(x)$ 是 F 上任一多项式，用 $-g(x)$ 来表示把 $g(x)$ 中每一个系数都变号后所得的多项式，定义 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的差为 $f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$.

1．2．3　多项式的次数

设 $f(x),g(x)$ 都是数域 F 上的多项式，且 $f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$，则 1）当 $f(x)+g(x)\neq 0$ 时，$\partial(f(x)+g(x))\leq\max(\partial(f(x),\partial(g(x));$2）$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$.

1．2．4　多项式的加法和乘法运算律

1）交换律；　2）结合律；　3）消去律：设 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，若 $f(x)\neq 0$，则 $g(x)=h(x)$;

4）乘法关于加法的分配律.（满足左、右分配）

1．2．5　带余除法

设 $f(x),g(x)\in F[x]$，且 $g(x)\neq 0$，　则存在唯一的一对多项式 $q(x),r(x)\in F[x]$，　使得 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x));q(x),r(x)$ 分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式和余式.

1．2．6　整除的基本性质

1 如果 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，那么 $f(x)\mid h(x)$.

2）如果 $h(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x)$，那么 $h(x)\mid(f(x)\pm g(x))$.

3）如果 $h(x)\mid f(x)$，那么对于 $F[x]$ 中任意多项式 $g(x)$，$h(x)\mid f(x)g(x)$.

4）如果 $h(x)\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,t$，那么对于 $F[x]$ 中任意 $g_i(x),i=1,2,\cdots,t$，

$h(x)\mid(f_1(x)g_1(x)\pm f_2(x)g_2(x)\pm\cdots\pm f_t(x)g_t(x))$.

5）零次多项式（即 F 上不等于零的数）整除任一多项式.

6）每一个多项式 $f(x)$ 都能被 $cf(x)$ 整除，这里 c 是 F 上任意一个不等于零的数.

7）如果 $f(x)\mid g(x),g(x)\mid f(x)$，那么 $f(x)=cg(x)$，这里 c 是 F 上一个不等于零的数.

1．2．7　余式定理

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $F[x]$ 中的任意两个多项式，并且 $g(x)\neq 0$，那么在 $F[x]$ 中可以找到多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$，使得 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$．这里或者 $r(x)=0$，或者 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数．满足以上条件的多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 只有一对．

注意：设数域 $\overline{F}$ 含有数域 F．而 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $F[x]$ 中的两个多项式．如果在 $F[x]$ 中 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，那么在 $\overline{F[x]}$ 中 $g(x)$ 也不能整除 $f(x)$．即多项式的整除性不因数域的扩大而改变．

1．2．8　最大公因式存在定理

$F[x]$ 中的任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一定有最大公因式．除一个零次因式外，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是唯一确定的．即：若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，那么数域 F 上的任何一个不为零的数 c 与 $d(x)$ 的乘积 $cd(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，而且当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零多项式时，只有这样的乘积是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式．用符号 $(f(x),g(x))$ 来表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 首项系数是1的最大公因式．

评注：1）$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式不因数域的扩大而改变．2）若 $d(x)$ 是 $F[x]$ 的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，那么 $F[x]$ 中可以求得多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$，使以下等式成立：$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$．

1．2．9　多项式互素的充要条件

$F[x]$ 的两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是在 $F[x]$ 中可以找到多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$，使得 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$．

1．2．10　不可约多项式的性质

1）如果多项式 $p(x)$ 不可约，那么 F 中任意一个不为零的元素 c 与 $p(x)$ 的乘积 $cp(x)$ 也不可约．

2）设 $p(x)$ 是一个不可约多项式，而 $f(x)$ 是一个任意多项式，那么或者 $p(x)$ 与 $f(x)$ 互素，或者 $p(x)$ 整除 $f(x)$．

3）如果多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积能被不可约多项式 $p(x)$ 整除，那么至少有一个多项式能被 $p(x)$ 整除．

评注：3）可以推广到任意 $s(s\geq 2)$ 个多项式的乘积的情形．

1．2．11　多项式的分解

$F[x]$ 的每一个 $n(n>0)$ 次多项式 $f(x)$ 都可以分解成 $F[x]$ 中的不可约多项式的乘积．

评注：1）多项式分解成不可约因式的分解式不是绝对唯一的．

2）如果不记零次因式的差异，多项式 $f(x)$ 分解成不可约因式乘积的分解式是唯一的．即：令 $f(x)$ 是 $F[x]$ 的一个次数大于零的多项式，并且 $f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x)$，

此处 $p_i(x)$ 与 $q_j(x)$ （$i=1,2,3,\cdots,r, j=1,2,3,\cdots,s$），都是 $F[x]$ 的不可约多项式，那么 $r=s$，并且适当调换 $q_j(x)$ 的次序后可使 $q_i(x)=c_ip_i(x)$，$i=1,2,3,\cdots,r$，此处 c_i 是 F 上不为零的元素.

1．2．12　多项式的重因式

设 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的一个 k（$k\geq 1$）重因式，那么 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的导数的一个 $k-1$ 重因式.

评注：重因式不因数域的扩大而改变.

1．2．13　多项式没有重因式的充要条件

多项式 $f(x)$ 没有重因式的充要条件是 $f(x)$ 与其导数 $f'(x)$ 互素．即 $(f(x),f'(x))=1$.

1．2．14　多项式的值

设 $f(x)\in F[x], c\in F$，用 $x-c$ 除 $f(x)$ 所得的余式等于当 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值 $f(c)$.

1．2．15　代数基本定理

任何 $n(n>0)$ 次多项式在复数域上至少有一个根.

1．2．16　本原多项式的乘积

两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式.

1．2．17　多项式的根及分解式

1）任何 $n(n>0)$ 次多项式在复数域上有 n 个根（重根按重数计算）.

2）复数域 C 上任一 $n(n>0)$ 次多项式可以在 $C[x]$ 中分解为一次因式的乘积．复数域上任一次数大于1的多项式都是可约的.

3）若实系数多项式 $f(x)$ 有一个复数根 α，那么 α 的共轭数 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根．并且 α 与 $\overline{\alpha}$ 有相同的重数．即实系数多项式的非实的复数根两两成对出现.

4）实数域上不可约多项式，除一次多项式外，只有含非实共轭复数根的二次多项式.

5）每一个次数大于0的实系数多项式都可以分解为实系数的一次和二次不可约因式的乘积.

6）若一个整系数 $n(>0)$ 次多项式 $f(x)$，在有理数域上可约，那么 $f(x)$ 总可以分解成次数都小于 n 的两个整系数多项式的乘积.

1．2．18　艾森斯坦因判断法

设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 是一个整系数多项式，若能够找到一个素数 p 使得：

1）最高次项系数 a_n 不能被 p 整除.

2）其余各项的系数都能被 p 整除.

3）常数项 a_0 不能被 p^2 整除．那么，多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

评注：1）复数域上只有一次多项式不可约．2）实数域上只有一次和一部分二次多项式不可约的．3）

有理数域上任意次的不可约多项式都存在.

1．2．19　判断有理根的方法

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是一个整系数多项式，若有理数 $\frac{u}{v}$ 是 $f(x)$ 的一个根，这里 u 和 v 是互素的整数．那么 1） v 整除 $f(x)$ 的最高次项系数 a_0，而 u 整除 $f(x)$ 的常数项 a_n．2） $f(x)=(x-\frac{u}{v})q(x)$，这里 $q(x)$ 是一个整系数多项式.

1．2．20　根与系数的关系

令 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是一个 n （$n>0$）次多项式，那么在复数域 C 上 $f(x)$ 有 n 个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，因而在 $C[x]$ 中 $f(x)$ 完全分解成一次因式的乘积 $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$.

比较等式两端得到根与系数的关系：

$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$，$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n$，$\cdots$，

$a_{n-1}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n)$，$a_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$.

假若 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的首项系数 $a_0\neq1$，那么应用根与系数的关系时先用 a_0 除所有系数，这时根与系数的关系

$$\frac{a_1}{a_0}=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n),$$

$$\frac{a_2}{a_0}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n,\cdots,$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_0}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n),$$

$$\frac{a_n}{a_0}=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

1．3　应掌握的主要方法

1　多项式的加、减、乘、除

2　多项式的和、差、积、商的次数

3　多项式的除法、整除、带余除法

4　用辗转相除法求最大公因式

5　判断两个多项式互素

6　将多项式分解成不可约多项式的乘积

7　会求重因式

8　利用综合除法求 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值

9　会判断 $x=c$ 是 $f(x)$ 的根

10　掌握根与系数的关系

11　用艾森斯坦因判别法证明多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约

12　会求整系数多项式 $f(x)$ 的有理根.

1．4　典型习题及分析

1．4．1　多项式的除法

例 1　已知 $f(x)=x^3-3x^2-x-1$，$g(x)=3x^2-2x+1$，用 $g(x)$ 除 $f(x)$，求商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$

解法 1

$$
\begin{array}{r}
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\
\hline
g(x)\ldots 3x^2-2x+1 \;\big)\; x^3-3x^2-x-1\ldots f(x) \\
\quad x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x \\
\hline
\quad\quad -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 \\
\quad\quad -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} \\
\hline
\quad\quad\quad\quad -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}\ldots r(x)
\end{array}
$$

则 $x^3-3x^2-x-1=(3x^2-2x+1)(\frac{1}{3}x-\frac{7}{9})-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$，即 $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$，$r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$.

评注：此为普通除法．注意 1）被除式、除式、商式要对好位，2）要保证 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$.

解法 2　由于 $f(x)$ 的次数为 3，首项系数为 1，而 $g(x)$ 的次数为 2，首项系数为 3，故商式 $q(x)$ 的次数必为 1，首项系数必为 $\frac{1}{3}$，而余式次数小于 2，于是可设 $q(x)=\frac{1}{3}x+a$，$r(x)=bx+c$．根据 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，即：$x^3-3x^2-x-1=(3x^2-2x+1)(\frac{1}{3}x+a)+bx+c$ 右端展开，合并同类项，再比较两端系数，即得

$$\begin{cases}3a-\dfrac{2}{3}=-3\\ b-2a+\dfrac{1}{3}=-1\\ a+c=-1\end{cases}\text{，解得}\begin{cases}a=-\dfrac{7}{9}\\ b=-\dfrac{26}{9}\\ c=-\dfrac{2}{9}\end{cases}\text{，故商式}q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}\text{，余式}r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}.$$

评注：此为待定系数法，保证两边同次幂系数相等解其方程组即可.

例 2 求多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b(a\neq 0)$ 所得的余式.

解 设 $f(x)=(ax-b)q(x)+c$（1），将 $x=\dfrac{b}{a}$ 代入（1）式得 $f(\dfrac{b}{a})=c$，由商式和余式唯一性即得.

评注：利用恒等式，自变量取特殊值即可.

1．4．2 多项式的整除

例 1 设 $f(x),g(x),h(x)\neq 0$ 为三个多项式. 证明 $h(x)\big|[f(x)-g(x)]$ 的充要条件是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 除以 $h(x)$ 所得的余式相等.

证 充分性：设 $f(x)=h(x)q_1(x)+r_1(x),g(x)=h(x)q_2(x)+r_2(x)$，其中 $r_i(x)=0$ 或 $\partial(r_i(x))<\partial(h(x))$，$i=1,2$. 上两式相减得：$f(x)-g(x)=h(x)[q_1(x)-q_2(x)]+r_1(x)-r_2(x)$ （1）若 $r_1(x)=r_2(x)$，则有 $f(x)-g(x)=h(x)[q_1(x)-q_2(x)]$，从而 $h(x)\big|[f(x)-g(x)]$.

必要性：若 $h(x)\big|[f(x)-g(x)]$，则由（1）知，必有 $r_1(x)-r_2(x)=0$. 若不然，由于 $r_i(x)$ 的次数小于 $h(x)$ 的次数，故 $\partial[r_1(x)-r_2(x)]<\partial(h(x))$，由余式及商式的唯一性知，这是不可能的，故必有 $r_1(x)-r_2(x)=0$，即 $r_1(x)=r_2(x)$.

评注:利用除法定理中余式及商式的唯一性即可.

例 2 m,p,q 适合什么条件时，有 $(x^2+mx-1)\big|(x^3+px+q)$.

解法 1 由带余除法知 $r(x)=(p+1+m^2)x+(q-m)$，$(x^2+mx-1)\big|(x^3+px+q)$ 必须且只须余式为零. 所以当 $\begin{cases}p+1+m^2=0\\ q-m=0\end{cases}$ 时，有 $(x^2+mx-1)\big|(x^3+px+q)$.

解法 2（比较系数法） 如果 $(x^2+mx-1)\big|(x^3+px+q)$，可设

$x^3+px+q=(x^2+mx-1)(x+a)$，即 $x^3+px+q=x^3+(m+a)x^2+(ma-1)x-a$

比较系数得 $\begin{cases}m+a=0\\ ma-1=p\\ -a=q\end{cases}$，消去 a 得 $\begin{cases}p+1+m^2=0\\ q-m=0\end{cases}$.

例 3 设 m 是大于1的整数，$f(x)=x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1$，求所有满足 $f(x)\mid[f(x^m)+c]$ 的常数 c.

解 当 $c=-m$ 时，$f(x^m)-m=x^{m(m-1)}+x^{m(m-2)}+\cdots+x^m+1-m$

$=(x^{m(m-1)}-1)+(x^{m(m-2)}-1)+\cdots+(x^m-1)=(x^m-1)q(x)$，所以 $(x^m-1)\mid(f(x^m)-m)$，而 $x^m-1=(x-1)f(x)$，故 $f(x)\mid(x^m-1)$，从而有 $f(x)\mid[f(x^m)-m]$. 如果常数 c_1 满足 $f(x)\mid[f(x^m)+c_1]$，那么 $f(x)\mid[f(x^m)-m+(c_1+m)]$，已证 $f(x)\mid[f(x^m)-m]$，故 $f(x)\mid(c_1+m)$，而 $f(x)$ 的次数大于零，于是 $c_1+m=0$，即 $c_1=-m$. 所以 $c=-m$ 是满足 $f(x)\mid[f(x^m)+c]$ 的唯一常数.

评注:利用整除定理分两步走：先假设 $c=-m$，再证明 $c=-m$ 即可. 假设往往凭经验.

例 4 设 $f_1(x),f_2(x),g_1(x),g_2(x)$ 是四个多项式，且 $g_1(x)g_2(x)\mid f_1(x)f_2(x),f_1(x)\neq 0$，证明若 $f_1(x)\mid g_1(x)$, 则 $g_2(x)\mid f_2(x)$.

证 因为 $g_1(x)g_2(x)\mid f_1(x)f_2(x),f_1(x)\mid g_1(x)$, 故可设 $f_1(x)f_2(x)=g_1(x)g_2(x)q(x)$，$g_1(x)=f_1(x)q_1(x)$，将下式代入上式中得 $f_1(x)f_2(x)=f_1(x)q_1(x)g_2(x)q(x)$，由于 $f_1(x)\neq 0$，故又得 $f_2(x)=g_2(x)q_1(x)q(x)$，即 $g_2(x)\mid f_2(x)$.

评注:利用整除定义即可.

例 5 证明 $(x^d-1)\mid(x^n-1)$ 的充要条件是 $d\mid n$.

证法一 充分性： 设 $d\mid n$，则 $n=d\cdot s$，其中 $s\in N$，

所以 $(x^n-1)=(x^d)^s-1=(x^d-1)[(x^d)^{s-1}+(x^d)^{s-2}+\cdots+(x^d)+1]$，则 $(x^d-1)\mid(x^n-1)$.

必要性： 若 $(x^d-1)\mid(x^n-1)$，下证 $d\mid n$. 反证，设 d 不能整除 n，则 $n=dq+r$，其中 $0<r<d$，于是 $d\mid(n-r)$，又由于 $x^n-1=x^r\cdot x^{n-r}-x^r+x^r-1=x^r(x^{n-r}-1)+(x^r-1)$ ①，因为 $(x^d-1)\mid(x^n-1)$，$(x^d-1)\mid(x^{n-r}-1)$. 由①知 $(x^d-1)\mid(x^r-1)$，这是不可能的，即得 $d\mid n$.

评注:利用整除定义及性质，再利用反证法即可.

证法二 充分性 设 $d\mid n$，且 ε 是一个 d 次原根，即：$1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{d-1}$ 为 (x^d-1) 的所有根，从而 $\varepsilon^n=1$，于是 $(\varepsilon^s)^n=(\varepsilon^n)^s,s=0,1,\cdots,d-1$. 即 (x^d-1) 的所有根全是 (x^n-1) 的根，故 $(x^d-1)\mid(x^n-1)$.

必要性 设 $(x^d-1)\mid(x^n-1)$ 且 ε 为 d 次单位原根，则 ε 也是 d 次单位原根，则 ε 也是 x^n-1 的根，从而 $\varepsilon^n=1$. 设 $n=dq+r$，$(0\leq r<d)$，于是，$\varepsilon^n=\varepsilon^{dq+r}=\varepsilon^r=1$，但由于 ε 为 d 次单位原根，故