

优化方法

Optimization
Method

李春明 / 著



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

优化方法

李春明 著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

优化方法为工程设计提供了一种重要的科学设计方法,在各行各业均有应用,其中在机械行业的应用尤为广泛。本书包括优化方法概述及数学基础,一维、多维有约束、无约束优化方法,线性规划,多目标及离散变量优化方法,现代优化方法简介等内容。在保留原经典优化理论与方法精华的基础上,本书几乎对每种方法都做出了改进。

本书的核心创新点是一维盲人探路优化方法及其对多维优化方法的改进,该核心创新点荣获山东省机械工业科技进步三等奖。本书的其他创新点主要有 KKT 条件的应用、计算程序的设计步骤、改进的 POWELL 判据证明及补充、复合形降维的避免方法、加固围墙的内点惩罚函数法、畸形约束极值点优化问题分析、渐进寻优特点的分析、“无序中寻求有序,偶然中寻求必然”等现代优化方法的详细阐释。本书可作为各类高等院校各专业的本科生和研究生的教材和参考用书使用。

图书在版编目(CIP)数据

优化方法/李春明著. —南京:东南大学出版社,
2009.9

ISBN 978-7-5641-1856-3

I. 优… II. 李… III. 最优化算法 IV. O242.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 163791 号

出版发行:东南大学出版社
社 址:南京四牌楼2号 邮编:210096
出 版 人:江 汉
网 址:<http://press.seu.edu.cn>
电子邮件:press@seu.edu.cn
经 销:全国各地新华书店
印 刷:溧阳市晨明印刷有限公司
开 本:700mm×1000mm 1/16
印 张:12.25
字 数:240千字
版 次:2009年10月第1版
印 次:2009年10月第1次印刷
书 号:ISBN 978-7-5641-1856-3
定 价:25.00元

本社图书若有印装质量问题,请直接与读者服务部联系。电话(传真):025-83792328

前 言

“优化方法”是机械类、近机类专业的重要课程,其目的是使学生树立优化思想,掌握优化知识,获得解决优化问题的初步能力。本书可作为高等院校各类专业的本科生和研究生教材使用,也可作为工程技术人员的参考书。

现有的优化方法书籍多为相互拼凑而来,少有特色,人云亦云,许多关键之处都是不求甚解。要么理论观点陈旧,要么晦涩难懂。因此,难以找到适合于做教材的著作。作者近几年在教学实践中不断探索、不断追求,几乎对每一种寻优方法都进行了改进,更重要的是改进了各种寻优方法的表述方式,使同学们更容易在课堂上掌握优化知识。本书融汇了作者近几年已发表和待发表的学术论文的创新内容,是结合教学实践和科研实践而得的专著。主要论文如下:线性逼近法的实例验证、牛顿型方法的改进及盲人多次探路寻优思想的验证、具有畸形约束极值点问题的优化、含脊优化问题的变换坐标改进优化算法、机械优化设计经典方法的几点算法改进、随机方向法改进及其验证、一维盲人探路优化设计方法、加固围墙的内点惩罚函数法防越界验证、《机械优化设计》的形象化教学方法、基于形象化教学方法的机械优化设计教学内容改进(形象化教学方法在“机械优化设计”课程中的应用)、机械原理课程设计的C语言基础及关键程序的设计、双缸泵主机机构的计算机软件编制步骤及检验方法、优化设计方法的若干创新内容、鲍威尔判据的证明与补充、基于渐进寻优特点的复合形法改进、卡罗需-库恩-塔克条件判断约束极值点的应用方法。

本书是在山东省自然科学基金资助项目(编号 Q2006A08)、中石油创新基金资助项目(编号 05E7029)和山东省教育科学“十一五”规划 2008 年度重点课题(2008GZ068)的支持下出版的,在撰写过程中得到了许多专家的指教,我的同事刘健老师提供了本书的多个知识点,青岛科技大学的张春玲老师在资料整理中给予了许多帮助,谨在此一并致谢。

书中难免有不妥、疏漏和错误之处,敬请广大读者批评指正。联系方式:电话 0546-8399143;电子信箱 lchming@126.com。

书中文字、图片、程序等资料也可通过以上联系方式索取和交流。

李春明

2009 年 6 月 6 日

目 录

第一章 绪论	1
§ 1.1 优化方法的研究进展	2
§ 1.2 优化问题实例	3
§ 1.3 主要内容与特色	11
第二章 优化问题数学模型及几何解释	14
§ 2.1 优化问题的数学模型	14
§ 2.1.1 一般形式	14
§ 2.1.2 设计变量的选取原则	14
§ 2.1.3 优化问题的分类	15
§ 2.2 优化问题的几何解释	16
§ 2.3 优化问题的基本解法	17
§ 2.4 小结	20
第三章 优化方法的数学基础	21
§ 3.1 多元函数的方向导数和梯度	21
§ 3.2 函数的凸性条件、凸规划、二次规划等	23
§ 3.2.1 凸集	24
§ 3.2.2 凸函数	25
§ 3.2.3 函数的凸性条件	25
§ 3.2.4 凸规划	26
§ 3.2.5 矩阵形式的二次函数	26
§ 3.3 多元函数的泰勒展开	27
§ 3.4 无约束优化问题的极值条件	28
§ 3.5 等式约束优化问题的求解方法	29
§ 3.6 一般约束优化问题的极值条件	31
§ 3.6.1 给定区间上一元函数的极值条件	32
§ 3.6.2 卡罗需-库恩-塔克条件	32
§ 3.6.3 KKT 条件的几何意义	33
§ 3.6.4 KKT 条件的应用方法	35

§ 3.7 小结	39
第四章 一维优化方法	40
§ 4.1 确定极值点所在区间的进退法	40
§ 4.2 一维盲人探路优化方法	42
§ 4.3 区间消去类优化方法	45
§ 4.3.1 黄金分割法基本原理	46
§ 4.3.2 黄金分割法迭代过程和程序流程图	46
§ 4.3.3 斐波纳契数法	48
§ 4.3.4 平分法	48
§ 4.4 插值类优化方法	49
§ 4.4.1 一维牛顿法	49
§ 4.4.2 二次插值法	51
§ 4.5 C 语言程序调试的要点	55
§ 4.5.1 Turbo C 2.0 软件的安装与程序调试	55
§ 4.5.2 计算程序的设计步骤	56
§ 4.5.3 数据类型、运算符与表达式	57
§ 4.5.4 数据的输入/输出和文件操作	59
§ 4.5.5 C 语言程序的基本结构	61
§ 4.5.6 本书编程任务及实例	62
§ 4.6 小结	65
第五章 多维无约束优化方法	66
§ 5.1 最速下降法	67
§ 5.2 多维牛顿型方法	70
§ 5.3 共轭方向法	75
§ 5.3.1 共轭方向	75
§ 5.3.2 共轭方向的性质	75
§ 5.3.3 共轭方向法	76
§ 5.4 共轭梯度法	77
§ 5.5 变尺度法	80
§ 5.5.1 尺度矩阵的概念	80
§ 5.5.2 变尺度矩阵	81
§ 5.5.3 变尺度算法	82
§ 5.6 坐标轮换法	84
§ 5.7 基本鲍威尔法	86
§ 5.7.1 共轭方向的构成	86

§ 5.7.2 基本算法	86
§ 5.8 改进鲍威尔法	88
§ 5.9 单形替换法	93
§ 5.10 小结	97
第六章 多维约束优化方法	98
§ 6.1 随机方向法	99
§ 6.2 复合形法	101
§ 6.3 可行方向法	107
§ 6.3.1 可行方向的产生方法	107
§ 6.3.2 寻优策略	109
§ 6.3.3 算法步骤	110
§ 6.4 惩罚函数法	113
§ 6.4.1 内点惩罚函数法	114
§ 6.4.2 外点惩罚函数法	117
§ 6.4.3 混合惩罚函数法	119
§ 6.5 网格法	121
§ 6.6 线性逼近法	123
§ 6.7 广义简约梯度法	126
§ 6.7.1 简约梯度法	126
§ 6.7.2 广义法	126
§ 6.7.3 不等式约束函数的处理及换基问题	128
§ 6.8 二次规划法	128
§ 6.9 结构设计的优化准则法	130
§ 6.10 小结	133
第七章 线性规划及单纯形法	134
§ 7.1 线性规划问题	134
§ 7.1.1 线性规划的标准形式	134
§ 7.1.2 线性规划的几何意义	135
§ 7.1.3 线性规划的基本术语	136
§ 7.1.4 基本性质及基本运算	137
§ 7.2 单纯形法	141
§ 7.3 算法改进	142
§ 7.4 小结	145
第八章 多目标及离散变量优化方法	146

§ 8.1 多目标优化问题	146
§ 8.2 多目标优化方法	147
§ 8.2.1 主要目标法	148
§ 8.2.2 线性加权组合法	148
§ 8.2.3 极大极小法	149
§ 8.2.4 理想点法与平方和加权法	149
§ 8.2.5 分目标乘除法	150
§ 8.2.6 功效系数法	150
§ 8.2.7 协调曲线法	152
§ 8.2.8 分层序列法	153
§ 8.3 离散变量优化方法	153
§ 8.3.1 整型化离散法	154
§ 8.3.2 交替查点法	154
§ 8.3.3 分支定界法	155
§ 8.3.4 其他离散优化方法	157
第九章 现代优化方法简介	158
§ 9.1 遗传算法	158
§ 9.2 蚁群算法	159
§ 9.3 模拟退火算法	160
§ 9.4 神经网络算法	161
§ 9.5 专家系统算法	162
§ 9.6 基于知识的广义优化算法	163
附录: 主要程序	164
附录 I 确定极值点所在区间的进退法子程序	164
附录 II 黄金分割法子程序	165
附录 III 一维盲人探路优化法子程序	166
附录 IV 二次插值法子程序	167
附录 V 负梯度法子程序	168
附录 VI 改进的 POWELL 法子程序	172
附录 VII 随机方向法子程序	175
附录 VIII 复合形法子程序	180
附录 IX 外点惩罚函数法子程序	183
附录 X 内点惩罚函数法子程序	184
参考文献	186

第一章 绪 论

随着科学技术的迅猛发展,全球市场竞争日益激烈,产品更新换代不断加快,产品复杂性持续增强。产品生产逐步以小批量、多品种的生产方式代替以前的单一品种、大批量生产方式。在这种生产方式下,运用优化方法可以适应市场激烈竞争的需要,优化产品质量,缩短设计周期,降低产品成本,加大市场竞争力和占有率。

优化思想自古以来就有应用,慎重的工程设计人员常常提供几种候选设计方案,再从中择其“最优”者实施,这就是设计中的优化思想。比如宋代建筑师李诫在其著作《营造法式》一书中曾指出:圆木做成矩形截面梁的高宽比应为三比二。这一结论和抗弯梁理论导出的结果十分接近。根据梁弯曲理论,最佳截面尺寸应使梁截面的抗弯截面系数 W 最大。设截面宽为 b ,高为 h ,则要求 $W = \frac{bh^2}{6} \rightarrow \max$ 。若圆木直径为 d ,则有 $d^2 = b^2 + h^2$, $W = \frac{b}{6}(d^2 - b^2)$ 。根据极值条件, $\frac{dW}{db} = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2) = 0$,得 $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$, $h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$ 时, W 取极大值(因 $\frac{d^2W}{db^2} = -b < 0$)。因而最佳高宽比为 $\frac{h}{b} = \sqrt{2}$ 。这与该书给出的结果很相近。

20 世纪 60 年代以来,随着计算机和计算技术的迅速发展,对优化思想的研究不仅在数学上发展为运筹学的相关内容,而且在数值算法上形成了针对隐式目标、试验数据、经验公式的优化技术(方法)。后者是本书的重点。

运用优化方法进行的产品设计、方案设计等称为优化设计。它是指借助于最优化数值计算方法(优化原理和方法)与计算机技术,求取工程问题的最优设计方案(寻求最优设计参数)。保证在承受各种因素干扰下产品质量保持稳定的优化设计,称为稳健优化设计(robust optimization)^[1]。优化设计包括两个步骤:(1) 建立实际问题的数学模型,该模型可以是数学显式的,也可以是数学隐式的;(2) 选用适当的最优化数值方法和计算程序运算求解。运用优化设计方法,可以大幅度加大设计效率和优化设计质量。

相对于传统设计,优化设计具有很大的优势。传统设计只是被动地重复分析产品的性能,而不是主动地设计产品的参数,整个设计过程是人工试凑和定性分析比

较;每次参数的修改,仅凭借经验或直观判断,而不是根据某种理论精确计算。由于设计时间和经费的限制,传统设计不允许有较大的候选方案数目。因此,传统设计做出的许多设计方案都有改进提高的余地。

§ 1.1 优化方法的研究进展

优化方法是一种重要的科学设计方法,其理论发展源远流长,大致包括以下六个方面:

(1) 人类智能优化。优化思想在我国古代的用人制度、物资调配、军事理论中就有所体现。在国外也有一些发展,比如早在 14 世纪,即出现黄金分割法和分数法(如斐波纳契数法)的一维寻优法基本思想,形成了直觉逻辑、穷举法、盲人爬山等寻优策略。第二次世界大战期间,应军事需要而产生了运筹学,提供了许多用古典微分法和变分法所不能解决的最优化方法。20 世纪 40 年代发展起来的数学规划理论成为应用数学的一个分支,为优化方法奠定了理论基础。

(2) 数学描述分析。20 世纪 40 年代,在数学上对一些优化方法完成了严格的证明,并提出了线性规划和梯度法。1947 年 Dantzig 发表了求解线性优化问题的单纯形法,适应了大规模生产的需要,使得优化方法的研究蓬勃兴起。后来,随着高速计算机的发展,出现了许多优化算法(比如多维非线性约束规划的惩罚函数法),逐渐形成了优化方法的理论框架。在这期间 Bellman 的动态规划(1957 年)、Charnes 和 Cooper 的目的规划(1961 年)、Zoutendijk 和 Rosen 的非线性规划贡献、Duffin、Zener 和 Peterson 的几何规划、Gemory 的整数规划开拓、Dantzig、Charnes 和 Cooper 的随机规划方法等都是具有影响力的研究成果。70 年代,涌现出许多关于优化方法的著作、杂志和专门研究机构。该时期线性规划、非线性规划、随机规划、非光滑规划、多目标规划、几何规划、整数规划等各种优化理论和方法均有新的进展,同时也出现了一些优化方法软件。到 80 年代初,国内外许多大学都已开设优化方法课程。

(3) 工程优化。数学工作者开展的数学规划法在解决中小规模的工程结构优化问题中取得了很好的成就,因而受到工程设计人员的重视。然而,随着结构规模的扩大,尤其是大型结构系统有限元分析中设计变量的增多、结构重分析次数的剧增,使其优化陷入困境。20 世纪 60 年代末,结构工程人员在力学概念上建立了满应力设计感性准则法,并提出了诸如基于能量分布准则等理论的准则设计法,不是直接去处理优化问题的目标函数,而是以满足给定准则的设计点作为最优近似设计点。该方法由于收敛快,对大型结构的优化具有重要的实用价值,但是其通用性不太好。到 80 年代,数学工作者与工程结构设计人员之间取长补短,使这两种优化方法互相渗透,并彼此吸收对方的优点,从而形成了序列近似概念和相应的序列近似

规划法,开展了以提高机构性能为目标的机构参数优化,以减小结构重量、降低结构成本或延长结构使用寿命为目标的机械结构优化,各种传动系统的参数优化及机械系统的隔振与减振优化等应用研究。后来,工程结构拓扑优化、连续体结构的形状优化、设计灵敏度分析、离散变量优化、多目标优化、模糊优化、大系统的分解优化、复杂结构的动力优化、商用软件及优化方法软件的完善、优化技术与大型有限元分析程序的软件集成化等均取得了较大进展。

(4) 结构优化。Maxwell(1890年)和Michell(1905年)开展的铰链平面桁架结构优化具有里程碑意义。在我国,1978年教育部科学规划和全国科学规划都将结构优化列为计算力学研究中的重要项目。钱令希院士及时编选了《工程结构优化论文集》,推动了我国结构优化研究。在后来的几年里,逐渐使我国在结构优化研究应用上赶超国际水平,在航空航天、船舶、通用机械和机床、汽车工业等领域取得了较好的应用效果。

(5) 现代优化方法。旅行商问题、背包问题等可行域不明确、不连续的问题不宜采用经典优化方法解决。近年来,借用其他学科的知识,发展了一些现代优化方法,如遗传算法、蚂蚁算法、模拟退火、神经网络、专家系统、广义优化等。这些方法在许多领域得到了广泛的应用。

(6) 有效探测法。基于“拟人类比”创新方法提出的盲人探路优化方法,是有效的探测方法。将探测点与当前点比较,如果较好,则作为新的当前点处理。基于该优化思想,可对许多经典优化方法进行改进,从而改善其寻优效果、扩大其适用范围。该优化思想和相关改进是本书与同类著作的主要不同点之一。

目前研发的可用于优化方法领域的软件主要有 GAMS(General Algebraic Modeling System)、LINDO、LINGO、MATLAB。GAMS对大规模问题的求解具有优异性;LINGO内置一种建模语言,能方便地与 EXCEL、数据库管理系统等软件交换数据,也能求解大规模优化问题;MATLAB带有优化工具箱,具有较强的矩阵运算能力、图形输出能力等。

§ 1.2 优化问题实例

目前,优化方法在机械、冶金、石油、化工、电机、建筑、铁路、交通、航空航天、航空、国防、造船、纺织、轻工、机床、汽车、自动控制系统、电力系统、电子、电器、管理等工程设计领域均得到了广泛应用。例如在波音飞机的设计中,取 138 个变量,所获得的优化方案使机身重量比原来的减小 1/3;在大型轰炸机设计中,取 10 个变量,所获得的优化方案使成本比原来的减少 10%;在城市交通的红绿灯设置中,运用优化方法进行设计更有效地利用了资源。

在数学意义上表达优化问题即为建立数学模型,通常可按以下步骤进行:

(1) 根据设计要求,应用专业领域内的现行理论和经验等分析优化对象,必要时改进传统设计中的公式,并尽可能反映该专业领域内的最新成果。

(2) 分析相关参数,以确定设计的原始参数、设计常量和设计变量。

(3) 根据设计要求,确定并构造目标函数和相应的约束条件。有时须构造多个目标函数,有时在不了解结构内部特性的情况下,还须建立黑箱模型,用神经网络等模拟系统代替目标函数。

(4) 规范数学模型,以便采用通用的优化方法求解。

例 1-1: 受扭轴结构的优化问题。如图 1-1 所示,传动轴的转速 n 为 500 r/min,主动轮 1 的输入功率 P_1 为 367.5 kW,从动轴 2、3 的输出功率 P_2 、 P_3 分别为 147 kW、220.5 kW。传动轴许用切应力 $[\tau]$ 为 40 MPa,每米许用扭转角 $[\phi]$ 为 1° ,弹性模量 G 为 80 GPa。试确定轴的直径 d 和 AB、BC 轴段的长度 l_1 、 l_2 ,使轴的质量最小。根据工程实际要求: $400 \leq l_2 \leq 500 \leq l_1 \leq 600$; 直径最粗不能超过 120 mm; AB 轴段的允许转角为 0.3° ; AC 轴段的允许转角为 0.45° 。

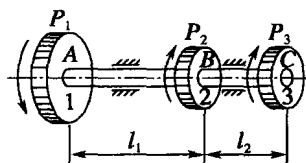


图 1-1 传动轴

可以进行调整和优选的独立参数称为设计变量,可分为连续变量和离散变量两类。该优化问题中的设计变量为 d 、 l_1 、 l_2 。

在设计中所追求的目标,须表示为设计变量的函数,称为目标函数。由于轴各部分的密度相同,该优化问题可根据“体积最小则质量最小”来建立目标函数:

$$f(x) = f(d, l_1, l_2) = \frac{\pi d^2 (l_1 + l_2)}{4} \quad (1.2-1)$$

对设计变量的取值加以某些限制的条件称为约束条件,也须表示为设计变量的函数,称为约束函数。根据约束的性质可以分为性能约束和侧面约束两类。

由已知条件可得到扭矩图(见图 1-2, 单位: N·m)。根据扭转强度条件,要求扭转应力不大于许用值:

$$\tau = \frac{M_T}{W_T} \leq [\tau] \quad (1.2-2)$$

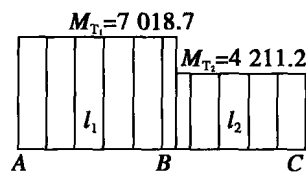


图 1-2 传动轴的扭矩图

其中, M_T 为轴所传递的最大转矩; W_T 为轴的抗扭转截面系数,对于实心轴有 $W_T = \frac{\pi d^3}{16}$; $[\tau]$ 为轴材料的许用扭转应力。

因此,扭转强度条件所决定的约束条件为

$$[\tau] - \frac{16M_T}{\pi d^3} \geq 0 \quad (1.2-3)$$

可得轴径 d 须满足以下条件:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_T}{\pi[\tau]}} = 0.096\,321\,44\text{ m} \quad (1.2-4)$$

根据扭转刚度条件,要求扭转变形:

$$\phi = \frac{M_T}{GI_p} \leq [\phi] \quad (1.2-5)$$

其中, ϕ 为单位长度的扭转角; I_p 为轴截面的惯性矩,对于实心轴有 $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$; G 为材料的剪切弹性模量; $[\phi]$ 为单位长度的扭转角的许用值,单位为 rad。

因此,扭转刚度条件所决定的约束条件为

$$[\phi] - \frac{32M_T}{\pi G d^4} \geq 0 \quad (1.2-6)$$

可得轴径 d 须满足以下条件:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_T}{\pi G [\phi]}} = 0.084\,59\text{ m} \quad (1.2-7)$$

根据 AB 轴段允许转角为 0.3° 、AC 轴段允许转角为 0.45° 的已知条件,可得

$$0.3 \frac{\pi}{180} - \frac{32M_{T_1} l_1}{\pi G d^4} \geq 0 \quad (1.2-8)$$

$$0.45 \frac{\pi}{180} - \frac{32M_{T_1} l_1}{\pi G d^4} - \frac{32M_{T_2} l_2}{\pi G d^4} \geq 0 \quad (1.2-9)$$

根据工程实际要求的约束条件为

$$d \leq 0.12\text{ m}$$

$$0.4\text{ m} \leq l_2 \leq 0.5\text{ m} \leq l_1 \leq 0.6\text{ m} \quad (1.2-10)$$

例 1-2: 图 1-3 所示人字架由两个钢管构成,其顶点所受外力 $2F$ 为 $3 \times 10^5\text{ N}$ 。已知人字架跨度 $2B$ 为 152 cm ,钢管壁厚 T 为 0.25 cm ,钢管材料的弹性模量 E 为 $2.1 \times 10^5\text{ MPa}$,材料密度 ρ 为 $7.8 \times 10^3\text{ kg/cm}^3$,许用压应力 $[\sigma_y]$ 为 420 MPa 。求在钢管压应力 σ 不超过许用压应力 $[\sigma_y]$ 和失稳临界应力 $[\sigma_e]$ 的条件下人字架的高 h 和钢管平均直径 D ,使钢管总质量 m 最小。

可以把人字架的优化问题归结为求 $x = [D \ h]^T$,使结构质量 $m(x) \rightarrow \min$,但应满足强度约束条件 $\sigma(x) \leq [\sigma_y]$ 和稳定约束条件 $\sigma(x) \leq [\sigma_e]$ 。

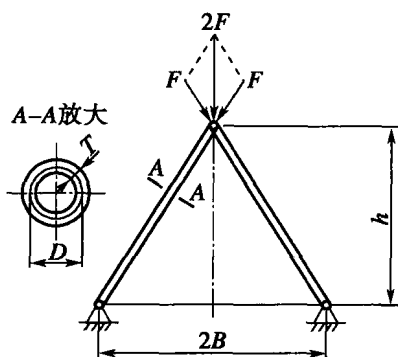


图 1-3 人字架结构

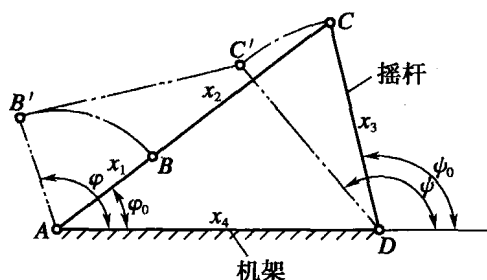


图 1-4 平面四杆机构

例 1-3: 平面四杆机构的优化问题。根据运动学要求,确定其几何尺寸,以实现给定的运动规律。图 1-4 中 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 分别为曲柄 AB、连杆 BC、摇杆 CD 和机架 AD 的长度。 φ 为曲柄输入角, ψ_0 为摇杆左右极限位置的位置角, φ_0 为对应于摇杆位置角 ψ_0 的曲柄起始角,它们均可由各杆长度确定。该优化问题的目标函数由运动要求确定,设计变量为杆的长度,约束条件通常为传动角要求、曲柄存在条件、边界约束等。

例 1-4: 齿轮减速器的优化问题。传统的设计方法虽已完善,但它们多属校核性质的,即从给定的条件出发,根据经验类比和理论计算,用试凑方法确定主要参数,然后进行强度、刚度等的校核。如不合宜,则对某些参数进行修改后再重复上述过程,直到各项要求均满足为止。显然,这种方法不能保证得到最优设计方案。图 1-5 所示二级圆柱齿轮减速器,通常给定传递的功率 P 、总传动比 i 和输出转速 n 。要求在满足强度要求的条件下,其体积最小,以达到结构紧凑、质量最小的目的。体积最小是该优化问题追求的目标,可归结为使总中心距 a 最小;设计变量为齿轮 1、3 的齿数 z_1 、 z_3 , 两级齿轮的模数 m_{nI} 、 m_{nII} , 第一级齿轮传动的传动比 i_I , 螺旋角 β_I 、 β_{II} ; 约束条件包括接触强度、弯曲强度、几何不干涉条件等。

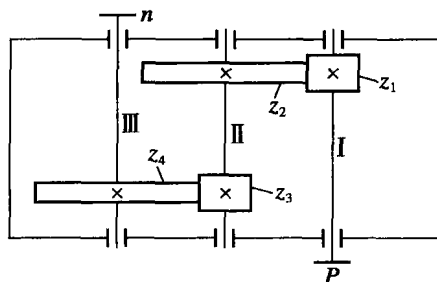


图 1-5 二级圆柱齿轮减速器

例 1-5: 动压轴承的优化问题。可取滑动轴承的最大承载能力、最小功耗、最小流量、最小温升和振动过程中的油膜稳定性等中的一个或多个作为目标函数;其约束条件可以是油膜厚度、轴承温升、轴承功耗、轴承转速、轴承长径比等。对于一般的轴承系统,可从动力学角度研究其稳定性。

例 1-6: 汽车悬架系统的优化问题。图 1-6 为五自由度汽车悬架系统, m 、 k 、 δ 、 f 分别表示质量、弹簧刚度系数、阻尼系数、由于路面起伏引起的位移。在结构设计

中,希望在不同速度和道路条件下司机座位的最大加速度最小,同时满足一系列约束条件。因此设计变量为 m, k , 目标函数可根据动力学方程及振动理论得出。

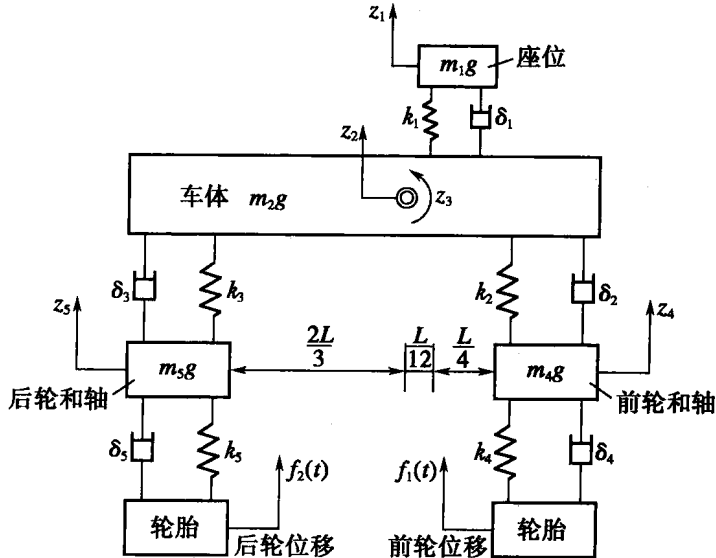


图 1-6 汽车悬架系统

例 1-7: 单工序加工时单件生产率的优化问题。单件生产率最大,或单件加工的工时最短通常是追求的目标。目标函数通常由生产准备时间、加工时间、刀具更换时间、嵌入一片不重磨刀片所需的时间等决定。

例 1-8: 生产计划的优化。某车间生产甲、乙两种产品,甲产品每件需要 9 kg 材料、3 个工时、4 kW 电,可获利 60 元;乙产品每件需要 4 kg 材料、10 个工时、5 kW 电,可获利 120 元。若每天能供应 36 kg 材料、300 个工时、200 kW 电,则每天生产甲、乙两种产品各多少件才能获得最大利润?

例 1-9: 建筑计划的优化问题。某建筑公司,可获批 12 000 m² 的土地,建造占地分别为 1 012 m² 和 1 617 m² 的甲、乙两类住房,甲不能超过 8 幢,每幢可获利润 1.1 万元;乙不能超过 4 幢,每幢可获利润 2 万元。问: 两类住房各建几幢可获得最大利润?

例 1-10: 悬臂销轴的尺寸确定问题。圆形等截面销轴受载情况的简化模型为一端固定、另一端承受集中载荷 F 、 M 的悬臂梁。结构要求轴长 L 不小于 80 mm。销轴材料的许用弯曲应力 $[\sigma]$ 为 120 MPa,许用切应力 $[\tau]$ 为 80 MPa,许用挠度 $[f]$ 为 0.1 mm,密度 ρ 为 7.8×10^3 kg/m³,弹性模量 E 为 2×10^5 MPa。在满足使用要求的前提下设计销轴的结构尺寸,使其质量最小。

例 1-11: 工程下料的优化问题。制造每套钢梁需要 7 根 2 m、2 根 7 m 的钢材。现用 15 m 长的钢材造 100 套钢梁,如何下料最省?

分析：下料指钢材的切割方式，有三种，即 $(7 \times 2)m$ 、 $(2 \times 7)m$ 、 $(4 \times 2 + 7)m$ ，用料与按三种切割方式使用的钢材数 x_1 、 x_2 、 x_3 有关。将这三个变量作为设计变量，以用料最少作为追求的目标，可建立其数学模型。

例 1-12：2K-H 型行星轮系的优化问题。已知传递功率为 P ，输入转速为 n ，传动比为 i ，以重量最小为目标，设计其结构方案。

分析：以各轮的体积之和作为重量指标，即

$$V = \frac{\pi}{4} b m^2 z_1^2 \left[1 + C \left(\frac{i-2}{2} \right)^2 \right] \quad (1.2-11)$$

其中， b 为齿宽， m 为模数（离散变量）， z 为齿数， C 为行星齿轮数。约束条件有： $5m \leq b \leq 20m$ ；太阳轮齿数大于不发生根切的最少齿数； $C > 2$ ；各齿轮须满足弯曲强度和接触强度要求；行星轮须满足邻接要求、安装同心要求、装配要求等。

例 1-13：游梁式抽油机结构的优化问题。目标函数可以是该结构的运动学参数或动力学参数，设计变量多为几何参数，约束条件通常有：（1）设计变量取值界限；（2）有曲柄条件；（3）各杆间杆长比限制；（4）游梁摆角的限制；（5）极位夹角的限制；（6）传动角的限制；（7）悬点加速度的限制；（8）游梁支撑最大水平力限制；（9）减速器扭矩的限制等。

例 1-14：热压机机架结构的优化问题。这里的热压机是指压制胶合板、纤维板、刨花板等平板制品的液压机。某重型机器厂生产的 6450 t 热压机的主体由 8 架 16 片框板平行组装而成，每片框板的结构尺寸及受力状况如图 1-7 所示。优化分两步：（1）以外形尺寸为设计变量，以重量最轻为目标；（2）以框板上角应力集中区的过渡曲线尺寸为设计变量，以该区的应力最小为目标。位移和应力用平面有限元法计算，表现为设计变量的隐函数。

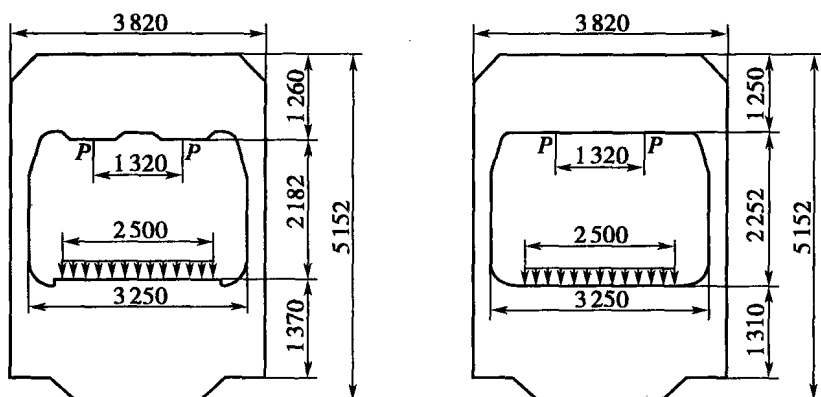


图 1-7 热压机机架结构的框架

例 1-15: 月生产计划的优化问题。某厂生产 $1, 2, \dots, N$ 号产品, 已知生产 i 号产品的生产能力为 a_i (t/h), 每吨可获利润 a_i 元。下月市场需求 1 号产品尽可能多, 其他 i 号产品最大销售量为 b_i t。工厂下月正常开工工时为 T h。设计变量为该厂下月生产 i 号产品的时间 x_i 。追求的目标有: (1) 在避免开工不足的前提下使工人加班时间尽量少; (2) 获得利润尽可能大; (3) 满足 1 号产品市场大量需求的要求。约束条件有: (1) 产量小于最大销售量, 避免积压; (2) 生产总工时不应小于 T h, 避免开工不足; (3) 生产时间均非负。

例 1-16: 设备更新问题。设备随服务年限的增加而“维修费增加”, 何时更新花费最小?

例 1-17: 两种资源的分配问题。两种资源用于 N 种生产, 每种生产消耗资源与收益有关系, 如何分配资源使总收益最大?

例 1-18: 森林救火问题。接火警后消防员派得越多, 森林损失会越小, 但救援开支却越大, 所以须综合考虑森林损失、救援费用、消防员人数的关系, 以总费用最小来决定人数。救援费用包括灭火器材的消耗、队员的薪金、运输费用。森林损失不能与其他费用等同对待, 因为自然资源的损失是真正的损失, 而其他费用却起到拉动内需的作用。

例 1-19: 雨中行走的淋雨量问题。淋雨量由行走速度、人体倾斜角度、行走距离、淋雨时间、雨滴下落速度、角度、降雨强度、淋雨面积等因素决定。淋雨量可作为目标函数, 其决定因素可作为设计变量。当雨相对下落角度与行走速度相适应, 使得只有顶部被淋时, 通常淋雨量最小。

例 1-20: 电影院地板线设计的优化问题。如何提高各排观众的平均满意度?

例 1-21: 惊险杂技设计。在海边距离安全水深 9 m 处建 10 m 高台, 高台下设置一弹性斜面, 演员从高台团身跳下, 经与斜面碰撞后弹到海里。斜面如何设置是最安全的? 目标函数可以是演员弹出的距离, 设计变量可以是斜面的位置、弹簧特性曲线的特征等。

例 1-22: 购房还贷问题。考虑多种因素, 优化购房时间、贷款额度和年限, 使代价最低。主要影响因素有房价的变化趋势、通货膨胀因素、公积金贷款、商业性贷款的年限和年利率、个人存款、亲朋借款、预期收入等。

例 1-23: 建筑物内的人员疏散问题。意外事件发生时, 能否有组织、尽快地疏散是安全大问题。对于特定的建筑物, 出口设置、疏散路线是影响疏散时间的主要因素。

例 1-24: 广告费用的投入问题。投入广告费用可以促进销售, 但也会抵消商品利润。销售商品获取利润的大小取决于许多因素, 如进价、售价、销售量等。销售量取决于商品的价格、促销力度、社会需求量、购买力、商品的质量、信誉、同类商品竞争等。建立数学模型时须充分考虑这些因素的影响。