2010版 数学考研

考点精讲 方法精练

数学一和数学二

主 编 龚冬保

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

(2010 版)

数学考研

考点精讲方法精练

(数学一和数学二)

主编　龚冬保

编著　(高等数学) 龚冬保　王寿生　褚维盘

(线性代数) 崔荣泉

(概率统计) 周家良

西安交通大学出版社

·西安·

内容提要

本书是专门针对考研复习编写的教材，内容严格按教育部制订的“数学考试大纲”编写。为了适应考生“复习”的特点，本书建立了与普通教材不同的体系；针对考研的特点，突出基本功和综合运用、应试能力的训练，对于数学知识，着重于分析问题和解决问题的能力，全面而有重点地覆盖了所有考点和解题方法。本书既可作“考研辅导班”的教材，也可用于考生自学，同时也可供就读本科的各专业的大学生参考。

作者在网上为本书读者免费答疑，具体方法请见 2010 版前言。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研考点精讲方法精练. 数学. 1～2/龚冬保主编；王寿生等编. —西安：西安交通大学出版社，2009.5

ISBN 978-7-5605-2169-5

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①龚… ②王… Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021808 号

书　　名　数学考研考点精讲方法精练(数学一和数学二)
主　　编　龚冬保
责任编辑　叶涛

出版发行　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　西安市新城区兴庆印刷厂

开　　本　787mm×1 092mm　1/16　**印张**　28.125　**字数**　868 千字
版次印次　2009 年 5 月第 4 版　2009 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-2169-5/O·231
定　　价　42.00 元

读者购书、书店添货如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

2010 版 前 言

—— 兼评 2009 年考研试题

见到 2009 年数学的三套考研试卷，给我们的印象：还是基本功重要，今年的题看起来不难，但有的题综合性强，做起来总有些“弯”不好拐. 只有基本功过硬的考生，才能很轻松地考出好成绩. 狠抓基本功是我们所编辅导书与“模拟试卷”所坚持的一贯宗旨. 可以说，每年的数学试卷都不会使我们感到意外！下面挑几个典型题来加以说明.

例 1 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小. 则(　　)

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$.　(B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.　(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$.　(D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

解 这是三套试卷中均有的一道题.

运用我们书中强调的无穷小分析法：首先 $g(x) \sim -bx^3$ 是 x 的三阶无穷小，故 $a = 1$；由泰勒公式 $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. 即得 $b = -\frac{1}{6}$. 选(A).

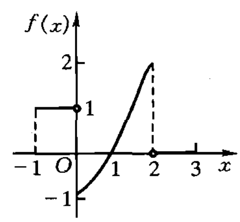
例 2 (1) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 2$，则三阶矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为________.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} =$ ________.

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (1,0,k)^{\mathrm{T}}$. 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 则 $k =$ ________.

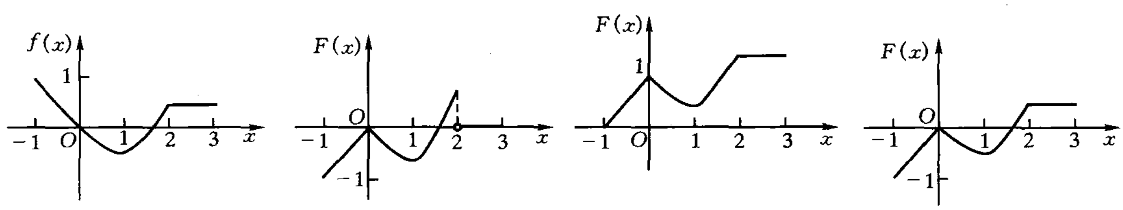
解 这三道题分别出自数学一、二、三试卷，考点与方法一样，只要解(1).

由于 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 1，因此 0 是二重特征值，而由特征值之和是矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的迹，即是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 2$. 故非零特征值就是 2；同样(2) 是(1) 的逆问题，知 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = 2$；(3) 中 $1 + 0 + k = 3$，故 $k = 2$. 这些题应不假思索即能写答案.



例 3 设 $y = f(x)$ 在$[-1,3]$上图形为(见右图)：

则 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 图形为(　　).



(A)　(B)　(C)　(D)

解 这是一道比较综合的好题. 这样看：在$[-1,0]$中，$F(x) = x$. 因此排除了(A)(C) 两选项；而 $f(x)$ 在$[-1,3]$上有界可积，故 $F(x)$ 连续而排除(B)，便容易选到(D).

值得注意的是，数学一、二、三共同考的关于伴随矩阵的题.

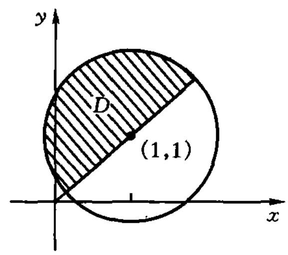
例 4 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^*$ 为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

解 由 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 6\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=6\boldsymbol{E}$. 知选(B).

在我们 2009 版的书上，有与此几乎是相同的例题.

例 5 计算 $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.



例 5 图

解 这是一道要用“平移”变换的题，即令 $\begin{cases}x-1=r\cos\theta\\ y-1=r\sin\theta\end{cases}$. 如图. 则

$$I=\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}r=-\frac{4}{3}.$$

这是数学二和数学三一道 10 分题，基本功好，做起来都不用草稿. 但基本功稍差点的同学很容易将 r 的上限写作 2，或把 θ 的上下限写成 $0-\pi$，从而丢分.

例 6 a_n 为曲线 $y=x^n$ 和 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围面积，求 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$.

解 $a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\ (n=1,2,\cdots)$. 因此

$$S_1=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

而 $$S_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots=1-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right)=1-\ln 2.$$

这道题仅在数学一试卷上，主要是命题人以为 S_2“难求”，其实，在我们书上十分强调“五个泰勒级数”，其中之一是

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\qquad 令\ x=1\ 即得\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\ln 2$$

其实，本题出给数学二的考生也能作，就是用数列极限作，至于和 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots$，在我们书上讲过

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)=C$. 故有

$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}=C+\ln n+\alpha_n$（$\alpha_n$ 是无穷小量）

于是
$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots&=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}[C+\ln(2n+1)+\alpha_{2n+1}-(C+\ln n+\alpha_n)]\\&=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\ln 2.\end{aligned}$$

例 7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$，分别求使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$ 和 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的向量 $\boldsymbol{\xi}_2$ 和 $\boldsymbol{\xi}_3$，并证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

解　在解题前首先要看到 $A\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，及 A 的第三列向量正是 $-\boldsymbol{\xi}_1$，$r(A)=2$，便容易得到 $A\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解是

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}+C_1\boldsymbol{\xi}_1.\ (C_1\text{ 是任意实数})$$

$A^2=\begin{bmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{bmatrix}$，$r(A^2)=1$，解得 $\boldsymbol{\xi}_3=(\frac{1}{2},0,0)^{\mathrm{T}}+C_2\boldsymbol{\xi}_1+C_3(0,0,1)^{\mathrm{T}}$

我们用两种方法证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关：

证 1. $|(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)|=\begin{vmatrix}1&1+C_1&\frac{1}{2}+C_2\\-1&-1-C_1&-C_2\\2&1+2C_1&2C_2+C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\frac{1}{2}\\-1&-1&0\\2&1&C_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq0$

故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

证 2. 令 $\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\lambda_3\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}$ 来证明 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

为此用 A 乘以两边得　　$\lambda_2\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_3A\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}$

两边再乘以 A 得 $\lambda_3\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，故 $\lambda_3=0$，从而有 $\lambda_2=\lambda_1=0$.

由证 2，我们可以将本题的证明推广到一般情况：

设 A 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\xi}_1$ 是 n 维非零向量，且 $A\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，$A\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$A^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$，…，$A^{n-1}\boldsymbol{\xi}_n=\boldsymbol{\xi}_1$ 均存在，则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 线性无关.

以上我们试解了 2009 年的部分试题，主要是展示基本功的重要性. 狠抓基本功训练，做到："凡是考研基本题都会做；凡是会做的题都能拿分"，便有把握取得理想的成绩.

我们将于 7 月下旬至明年 1 月考前，在网上回答读者在阅读本书时所提出的问题. 并期待着听到您在 2010 年考研成功的信息！

编　者

2009 春，于西安交大

第1版前言

目前考研的数学辅导书很多，却没有一本专门指导考研复习使用的教材，广大考生很希望有这样的教材。为此，我们尝试编写了本教材，以帮助考生能按教育部制订的研究生入学考试的《数学考试大纲》，全面系统地、有重点地、高效率地复习数学知识，取得好成绩。

复习是重复学习，不是重新学习。考研教材应与普通教材不同。首先，普通教材必须严格地按内容的逻辑顺序来编写，而考研教材不必受此拘束，可以从读者最熟悉的内容入手。比如高等数学部分，本书采取从微分法开始，以微分带积分，以积分促微分，使微积分紧密结合，深入浅出地讲完一元微积分的全部内容。其次，普通教材着重一个一个地讲解知识单元，而考研教材则侧重于内容间的联系。如本书线性代数部分将矩阵与行列式、向量代数与线性方程组、特征值特征向量与二次型紧密结合。第三，创立了一种新的体系，在逻辑顺序上更加符合考生的认识层次，更加适合于高效的复习。如概率论部分，先讲离散型随机变量的有关概率问题，再讲连续型随机变量的问题，再讲它们间的联系。第四，本书针对考研主要是考核解题能力的特点，安排了大量的例题，采用一题多解，一题多变的方式，侧重讲解题的思路、方法和技巧，培养读者灵活的分析能力和解决数学问题的能力。第五，根据编者多年辅导考研数学的经验，本书严格按《数学考试大纲》，从内容上既照顾了全面覆盖所有的考点，又突出了重点，从方法上既介绍了数学处理问题的基本方法，又突出了主要方法，特别考虑到考研试题中70%左右的是基本题，本教材在基本内容、基本方法上讲述的篇幅最大，对一些难题讲述，则侧重讲一道难题的思路，以及它与基本内容的联系，如何作到熟能生巧等等。第六，作为一本复习教材，本书还考虑要便于考生自学，因此，在许多题后附了不少注释，还介绍了不少自编练习题的方法。希望读者在阅读本书时，要一边看书一边自己动手推导，在读完一节后，最好将这一节书中的例题当作习题，自己独立做一遍，然后再作本章练习题，这样效果会更好。

本书既然是一本考研的复习教材，因此，书中对一些估计考生很熟悉的内容，一些定理的证明、公式的推导等略去不讲，如果想要知道相关的内容，可以在任何一本普通的教材中找到。

感谢西安交通大学出版社为本书的编辑和出版所作的努力。希望本书能受到读者的欢迎，更希望广大读者多提意见和建议，以使本书能改得更好，成为准备参加考研读者的良师益友。

编者

2006.3 修改于西安

目　录

第1章　一元函数微积分(一)

1.1　微积分的基本概念

复习与初学不同，作为考研的复习教材，本书体系与一般教材略为不同，目的是总结归纳已学过的知识，提高复习效率. 本书是从一元函数微积分的基本概念入手，尔后转向微分和积分的基本运算.

1.1.1　函数 — 微积分的研究对象

高等数学主要研究函数 $y=f(x)$ 的微积分性质，因此学习时脑子里要多装些具体函数，当作一般抽象函数的模型用. 首先，要熟记所有基本初等函数和一些常见的初等函数，以及它们的图象、增减性、奇偶性、周期性等等. 以这些函数的性质深入理解一般函数的性质. 比如 $y=f(x)$ 在某区间内恒有 $f''(x)>0$，曲线是向上凹还是向下凹？不少学生常常会记反了. 而若以 $y=x^2$ 为模型，显然有 $y''=2>0$，曲线是向上凹的，记住这个模型，便永远不会记反了.

下面我们来举几个常用到的典型函数的例子.

例 1.1　函数 $y=|x|$ 的作用.

我们知道这是在 $x=0$ 点连续但不可导的例子. 那么产生这样的问题：一个函数在某点不可导，另一个可导，它们的乘积是否可导？我们来考虑函数 x^n（n 为正整数）.

当 $n=1$ 时，函数 $f_1(x)=x|x|=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$

于是 $f'_1(x)=2|x|$，即 $f_1(x)$ 可导，但二阶导数不存在.

一般地，$f_n(x)=x^n|x|$ 有 $f'_n(x)=(n+1)x^{n-1}|x|$. 于是由归纳法知 $f_n(x)$ 具有 n 阶导数，且 $f_n^{(n)}(x)=(n+1)!\,|x|$. $n+1$ 阶导数不存在.

例 1.2　同样典型的一个函数是 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

这是几乎每本教材上都要讲到的在 $x=0$ 点为无限振荡间断点的例题. 我们一样来研究此函数乘上 x^n 的性态

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

当 $n=1$ 时，
$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

处处连续，但不可导；

当 $n=2$ 时，
$$\varphi'_2(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

可导，但导数不连续. 一般地，当 $n>2$ 时

$$\varphi_n'(x)=\begin{cases}nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$n=3$ 时导数连续但二阶不可导；$n=4$ 时二阶可导但二阶导数不连续，由归纳法知：$\varphi_n(x)$，当 $n=2k$ 时，具有 k 阶导数，但 k 阶导数不连续；$n=2k+1$ 时，k 阶导数连续，但 $k+1$ 阶导数不存在.

例 1.3 狄里克利函数：$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$

这是个处处不连续的函数；它是偶函数；它是以任何有理数 r 为周期的周期函数，却无最小正周期. 但是，复合函数 $D(D(x))=1$. 这给出了一个例子：两个处处不连续函数的复合函数非但可能连续，而且无限次的可导！

此外一些教材上介绍过的许多典型函数，如符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

这个函数表示任意实数 x 的符号. 因为 $|x|$ 表示 x 的大小，故有 $x\equiv\operatorname{sgn}x\cdot|x|$. 我们看到：$\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 点间断，$|x|$ 在此点不可导，但它们的乘积：$|x|\cdot\operatorname{sgn}x=x$ 却具有任何阶导数！

我们通过这几个例子，目的是告诉读者要学会用自己所熟悉的具体函数，去深入学习一般函数的性质.

1.1.2 极限 — 微积分的基本方法

从某种意义上说，高等数学就是用极限的方法研究函数的微分、积分和级数的性质. 因此正确理解极限概念，是十分重要的. 而极限总要与两个无限一起来理解，不要死记每种极限的定义.

比如 $\lim\limits_{x\to x_0}=A$，是说当 x 无限逼近 x_0 时，$f(x)$ 便无限逼近常数 A. 即动点 $f(x)$ 与定点 A 的距离 $|f(x)-A|$ 可无限小，对任意 $\varepsilon>0$，均可使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，而只要 $0<|x-x_0|<\delta$. 这就是函数在 x_0 点处极限的"ε-δ"定义. 同样，数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，是说只要正整数 n 无限增大，便有 a_n 无限逼近 A. 读者可以凭此自己给出"ε-N"的定义以及所学过的各种极限的定义，而不必死记硬背.

极限与无穷小密不可分，表现在：

定理 $\lim y=A$ *的充要条件是：$y-A$ 是无穷小量.*

因此，极限的方法可归结为无穷小分析方法.

例 1.4 证明极限的唯一性.

证 不妨设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在. 用反证法. 若另有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=B\neq A$$

不妨设 $B>A$. 取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$，则存在 $\delta_1>0$，对一切 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 的 x，均有

$-\dfrac{B-A}{2}<f(x)-A<\dfrac{B-A}{2}$，即 $f(x)<\dfrac{B+A}{2}$ 成立. 另一方面，存在 $\delta_2>0$，对一切 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 的 x，均有：$-\dfrac{B-A}{2}<f(x)-B<\dfrac{B-A}{2}$，即 $f(x)>\dfrac{B+A}{2}$ 成立. 取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则对一切 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，既使 $f(x)<\dfrac{B+A}{2}$ 又使 $f(x)>\dfrac{B+A}{2}$. 矛盾. 说明只有 $B=A$.

例 1.5 在同一过程中，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=B$，且 $B>A$，则存在 $M>0$，对一切 $|x|>M$，均有 $g(x)>f(x)$.

证 取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$，则存在 $M_1>0$，对一切 $|x|>M_1$ 均有 $f(x)<\dfrac{B+A}{2}$；又存在 $M_2>0$，对一切 $|x|$

$> M_2$ 有 $g(x) > \frac{B+A}{2}$. 取 $M = \max(M_1, M_2)$，则对一切 $|x| > M$，均有 $f(x) < g(x)$ 成立.（证明过程中略去的步骤与例 1.4 的证明步骤相同）.

与极限概念并列的还有：无穷大量、无界变量、有界变量等概念. 这些变量间的联系和区别，经常会被考到.

例 1.6 设 $\{x_n\}$ 是无界数列，$\{y_n\}$ 是无穷大量，$\{z_n\}$ 是无穷小量，则以下结论中正确的是（　　）.

(A) $\{x_n + y_n + z_n\}$ 无界.　　　(B) $\{x_n + \frac{1}{y_n} + z_n\}$ 无界.

(C) $\{x_n + \frac{1}{z_n}\}$ 无界.　　　(D) $\{\frac{1}{x_n + y_n} + z_n\}$ 是无穷小.

解 $\frac{1}{y_n} + z_n$ 是无穷小，x_n 无界，故 $x_n + \frac{1}{y_n} + z_n$ 无界，选(B). 可这样证明：存在 N_1，对一切 $n > N_1$ 有 $\left|\frac{1}{y_n} + z_n\right| < 1$. 而对任意 $M > 0$，存在 N_2，总有某个 $n > N_2$，使 $|x_n| > M+1$，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，总有 $n > N$，使

$$\left|x_n + \frac{1}{y_n} + z_n\right| \geqslant |x_n| - \left|\frac{1}{y_n} + z_n\right| > (M+1) - 1 = M.$$

我们再举例说明(A)选项不一定成立. 可设 $x_n = -y_n$，则 x_n 也是无穷大也无界. 这时 $x_n + y_n + z_n = z_n$ 是无穷小量；(C)选项不正确也是一样：若取 $x_n = -\frac{1}{z_n}$，则 $x_n + \frac{1}{z_n} = 0$；(D)选项可选 $x_n = 1 - y_n$，则 $\frac{1}{x_n + y_n} + z_n = 1 + z_n \to 1$ 不是无穷小. 类似这样的选择题主要考概念：$\{x_n\}$ 是无界变量则也可以是无穷大量，而两个无穷大之和如 $x_n + y_n$ 与 $x_n + \frac{1}{z_n}$ 不一定是无穷大量，可以是无穷小、有界量或无穷大等等. 知道了这一概念解此题可立即排除(A)、(C)、(D)三个选项，(B)的结论可以不会证明，但题却做对了！

1.1.3 函数的连续性

函数 $y = y(x)$ 可以看成变量 y 随 x 的变化而变的量，任意给定 x 的增量 Δx，可得函数增量 $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. 当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y|$ 也很小，说明 y 随 x 变化是较稳定的，当 $\Delta x \to 0$ 时，有 $\Delta y \to 0$，即若

$$\lim_{\Delta x \to 0} [y(x + \Delta x) - y(x)] = 0$$

就定义此函数 $y(x)$ 在 x 点是连续的. 换一种记法记 $x_0 + \Delta x = x$，则 $x \to x_0$，$y(x_0)$ 是常数. 所以连续的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y(x_0).$$

即：若函数在 x_0 点的极限值与函数值相等时，函数在 x_0 点连续；否则称函数在 x_0 点间断.

函数在 x_0 点是否连续，主要先看此点极限是否存在，而左、右极限存在并相等又是此点有极限的充要条件. 所以，间断点的分类也是由此而确定的.

1. **第一类间断点.** 左、右极限均存在的间断点，称为第一类间断点. 第一类间断点又分两种情况：

(1) 左、右极限存在且相等的间断点称为可去间断点. 典型例子是 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$，在 $x = 0$ 这一点. 我们知道

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 无定义. 若加一点的定义，如 $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$，则此函数处处连续.

(2) 左、右极限存在，但不相等的间断点，称为有限跳跃的间断点. 如符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 点是有限跳跃的间断点.

2. **第二类间断点**. 凡不属于第一类的间断点,便称为第二类间断点. 即在 x_0 点 $f(x)$ 的左、右极限至少有一个不存在的间断点. 常见的第二类间断点有

无穷型间断点. 如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,在 $x=0$ 点;

无限振荡型间断点. 如 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. $x=0$ 是无限振荡型的间断点.

1.1.4 导数、微分与不定积分

如果说"连续"是用极限定义的函数一个基本性质,那么,导数与微分是用极限定义的微积分学第一个最重要的概念.

导数. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$ 存在,便说 $f(x)$ 在 x_0 点可导,且称 $A=f'(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 点处的导数.

这里是函数增量与自变量增量之比的极限. 若当 $\Delta x\to 0$ 时,$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 不趋于 0,则比的极限必不存在,所以可导必连续. 在同一点处函数连续是可导的必要条件.

微分. 若函数 $f(x)$ 的增量可近似用与自变量增量成正比的量来表示,且其差是比 Δx 更高阶的无穷小量 $(\Delta x\to 0)$. 即 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$. 这时称 $f(x)$ 在 x_0 点可微分,且 $A\Delta x$ 称为其微分,记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

导数与微分的关系:函数 $f(x)$ 在 x_0 是可导的充要条件是:$f(x)$ 在 x_0 点可微,且 $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$.

证明. 必要性　由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

得 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$,故 $f(x)$ 可微.

充分性　由 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$,得

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$,故 $f(x)$ 可导,且 $A=f'(x_0)$.

不定积分. 若 $F(x)$ 在某区间 I 上可导,且 $F'(x)=f(x)$,则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 的一个原函数. 而记

$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,其中 C 是待定常数,称之为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分. 不定积分是原函数的一般表示形式.

1.1.5 定积分与反常(广义)积分

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义. 以下三步:

(1) 分割　在 $[a,b]$ 任意插入 $n-1$ 个分点 $x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,记 $\Delta_k=[x_{k-1},x_k]$,$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$. 并取任意 $\xi_k\in\Delta_k$,作 $f(\xi_k)\Delta x_k$.

(2) 求和　$\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$,记 $\lambda=\max\Delta x_k$.

(3) 取极限　$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$.

若此极限存在,且与分割方式和 ξ_k 的取法无关,则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,并称此极限为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分. 记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

由上述定义知，$f(x)$ 在$[a,b]$上可积必有界.

可积的充分条件：$f(x)$ 在$[a,b]$上连续或分段连续必可积.

定积分的基本性质和牛顿-莱布尼兹公式.

线性性质. 若 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上可积，则

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\mathrm{d}x = c_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + c_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

对区间的可加性质. 设 $f(x)$ 可积，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

其中 c 是任意实数.

比较性质与估值定理. 若在$[a,b]$中恒有 $f(x)\leqslant g(x)$.

则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

特别若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，m、M 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值或最大值，则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.

或
$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

此性质也叫估值定理. 其中$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 在$[a,b]$区间的平均值.

定积分中值定理. 由连续函数介值定理知，存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

变上限积分与微积分基本定理.

1° 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界可积，则

$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上连续.

证 $F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x}-\int_a^x=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$（其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$）.

故当 $\Delta x\to 0$ 时，$F(x+\Delta x)-F(x)\to 0$，即 $F(x)$ 连续（当 $x=a$ 时，要求 $\Delta x\to 0^+$；当 $x=b$ 时，$\Delta x\to 0^-$ 是不言而喻的）.

2°（**微积分基本定理**）若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导，且 $F'(x)=f(x)$.

证 由 1° 中所得 $F(x+\Delta x)-F(x)=f(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 及 $f(x)$ 连续性得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\theta\Delta x)=f(x)$.

3°（**牛顿-莱布尼兹公式**）若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 任一原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\varphi(x)\Big|_a^b=\varphi(b)-\varphi(a).$$

证 由 $\varphi'(x)=F'(x)=f(x)$ 知

$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\varphi(x)+C$. 令 $x=a$ 得 $C=-\varphi(a)$.

再令 $x=b$ 得 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\varphi(b)-\varphi(a)$.

无界函数的广义(反常)积分.

设 $f(x)$ 在$[a,c)$和$(c,b]$上连续，而$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，则称积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是无界函数的广义积分，c 是 $f(x)$ 的无穷型间断点，称为暇点. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\int_a^{c+\Delta x}f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\int_{c+\Delta x}^b f(x)\mathrm{d}x$ 均存在，则称广义积分收敛. 否则，即上

述两极限至少有一个不存在，就称广义积分发散.

无穷限的广义积分.

若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，便称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称广义积分发散；若 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，且 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x$ 也存在，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，否则称为发散.

考研大纲只要求知道上述概念并会计算广义积分就行了，不要求用判别法证明广义积分的敛散性.

1.1.6 杂例

例 1.7 设 $f(x)=|\sin x|xe^{\cos x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

(A) 有界函数　(B) 单调函数　(C) 周期函数　(D) 奇函数

解 选(D). 此题一看便知 $f(-x)=-|\sin x|xe^{\cos x}=-f(x)$. 请读者自己想一想如何排除其他三选项.

例 1.8 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g(f(x))=$(　　).

(A) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.　(B) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$.　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

解 选(B). 复合函数除了注意其定义域和值域外，基本上就是“代入”. 如本题

$$g(f(x))=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ 2+f(x), & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2-(-x), & x\geqslant 0\\ 2+x^2, & x<0\end{cases}.$$

本题既考了分段函数，又考到复合函数，是考试热点.

本题若改为求 $f(g(x))$，则

$$f(g(x))=\begin{cases}g^2(x), & g(x)<0\\ -g(x), & g(x)\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 0\\ -x-2, & x>0\end{cases}.$$

例 1.9 设 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$，则 $f(x)$ 的可去间断点的个数为(　　).

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 无限个

解 (C). 由分母为零的点是 $x=n$(任意整数)，均是其间断点；而分子为零的点是 $x=0$ 和 ±1，由洛必达法则

$$\lim_{\substack{x\to0\\ \pm1}}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}\lim_{\substack{x\to0\\ \pm1}}\frac{1-3x^2}{\cos\pi x}=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x=0\\ \dfrac{2}{\pi}, & x=\pm1\end{cases}\text{存在.}$$

故 $x=0,\pm1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

例 1.10 我们来比较下面两道分别出自 2004 年工学和经济学试卷中的相似试题：

(1) 设 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使(　　).

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 单增.　(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 单减.

(C) 对 $\forall x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.　(D) $\forall x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(2) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f'(a)>0, f'(b)<0$，则下列结论中错误的是(　　).

(A) 至少存在 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在 $x_0\in(a,b)$ 使 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在 $x_0 \in (a,b)$ 使 $f(x_0)=0$.

解 (1) (C). 这个题概念性强,主要反映在一点处的极限、导数只是函数在这一点的局部性质. 如本题中 $f'(0)>0$,只能说函数在 $x=0$ 点有单调增的"趋势",不能说在 0 的某邻域内单增,因此,(B)、(C)、(D) 均不对. (C) 的正确性要用极限的保号性来证明:由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$,故存在 $\delta>0$,当 $x\in(0,\delta)$ 有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$,即 $f(x)>f(0)$.

(2) (D). 我们说(2) 与(1) 相似,就是(A)、(B) 项中结论是正确的;(C) 是假设 $f'(x)$ 在$[a,b]$ 连续,由介值定理知,存在 x_0 使 $f'(x_0)=0$. 因此选(D).

第(2)题是当年数学三考题,题目的条件加强了,显得容易一些. 如 $f'(a)>0$,由连续性知,在 a 的一个右邻域$(a,a+\delta)$ 上均有 $f'(x)>0$,从而 $f(x)$ 在$(a,a+\delta)$ 上单调增,对 $\forall x_0\in(a,a+\delta)\subset(a,b)$ 有 $f(x_0)>f(a)$,不必用(1) 中的方法来证明. 如果概念清楚,本题可用排除法作:若(A) 中命题不对,则(C) 中命题肯定不成立,排除(A). 同样排除(B)、(C) 是明显正确的,故只有选(D).

注 由(1) 题,知(2) 题的条件可减为:$f'(x)$ 在$[a,b]$ 上可导,不必设 $f'(x)$ 连续.

例 1.11 设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件是( ).

(A) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在. (B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在. (D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

解 (B). 首先肯定 4 个选项中的结论都是 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导的必要条件. 为了说明基本功的重要性,我们来逐一证明:设 $f'(0)$ 存在,则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1-\cos h}{h^2}\cdot\dfrac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}=\dfrac{1}{2}f'(0)$ 存在. 即(A) 是必要条件;

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^h)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1-\mathrm{e}^h}{h}\cdot\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)}{1-\mathrm{e}^h}=-f'(0)$ 存在;

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h-\sin h}{h^2}\cdot\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}=0$ 存在;

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(2h)-\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=f'(0)$ 存在.

因此,本题是要我们确定哪三个不能成为充分条件. 首先考察(A) 和(C),若这两个极限均存在,要说明 $f'(0)$ 不一定存在. 从概念上分析,由 $f(0)=0$ 知 $f'(0)$ 存在的充要条件是$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}$ 存在,这里充要条件是 $h\to0^{\pm}$ 均存在,但在如(A) 中$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 分母是 h^2,当 $h\to0$ 时 $h^2\to0^+$,不能有 $h^2\to0^-$,故(A) 只能保证 $f(x)$ 在 $x=0$ 点右导数存在,左导数不一定存在或存在也未必相等. 因此,我们可举这样的例子来否定(A)、(C) 两选项:设 $f(x)=|x|$,则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\dfrac{1}{2}$,$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)=0$ 存在,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导;否定选项(D) 是由$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$,存在与否与 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的值无关. 因此它也不能成可导的充分条件. 最简单的例子是:

$$f(x)=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

这时有$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$存在,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 点间断故不可导. 只能选(B).

要证明(B) 项正确也不算太容易:设$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^h)}{h}=A$,令 $1-\mathrm{e}^h=x$,则 $h=\ln(1-x)$,这时 $x\to0$. 即题设可变化为