高等数学
导学与典型题解析

王明春 主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学
导学与典型题解析

主编　王明春

编写　赵小山　汤国明　邢　佳

郭金萍　陈　超　张效华

郭阁阳　许　茵　凌　光

天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学导学与典型题解析/王明春,郭阁阳主编. —天津:天津大学出版社,2009.10

ISBN 978-7-5618-3211-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①王…②郭… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第164955号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨欢
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址	www.tjup.com
印　　刷	天津泰宇印务有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	185mm×260mm
印　　张	15.75
字　　数	394千
版　　次	2009年10月第1版
印　　次	2009年10月第1次
印　　数	1-4 000
定　　价	25.00元

前　　言

高等数学是工科院校学生掌握数学工具、学好专业知识的一门重要的理论基础课，同时高等数学也是工科学生考研的一门必考课程。然而高等数学具有概念多、定理多、公式多、方法多、技巧多的特点，一些学生对于如何学好高等数学、如何顺利通过研究生入学数学考试颇感头疼。

现在市场上见到的高等数学辅导书，多数以考研为目的编写，其综合性较强，知识点的考察不能做到与教材同步，因此，这些辅导书既不适合大学一年级高等数学的同步学习，也不适合考研学生的第一轮复习。为了帮助学生学好高等数学，笔者编写了这本《高等数学伴学与典型题解》，它既可以作为教师的教学参考书，也可作为与高等数学同步学习的辅导书，还可作为高年级学生的考研复习用书。本书的特点是：

1. 本书内容根据我国普通高校本科生《高等数学课程基础要求》和最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》高等数学部分，按照同济大学应用数学系主编的《高等数学》第五版章节顺序编写。

2. 书中的每节由“考纲要求”、“内容提要”和“典型例题解析”三部分组成。在“考纲要求”中，列出了教学大纲和考研大纲对基本概念、基本理论和基本方法提出的要求；在“内容提要”中，对本节的知识点进行了系统梳理；在“典型例题解析”中，所选题目绝大部分来源于历年考研真题，并且对这些题目进行了分类，从而更加有利于学生的学习。

3. 书中例题包含了绝大部分的近十年考研题，并且对每道考研题在题目前面标注了考试年限和分值，如(09104)是指此道题目是2009年数学一的考研题，分值为4分。

4. 配合本书的使用，作者开通了博客(http://blog.sina.com.cn/tutemath)，以方便读者和作者之间、读者之间更好地交流。

参加本书编写的教师均来自高等数学教学一线，有着丰富的教学实践经验。除了参编人员外，唐华杰、陈加富、林建华、刘鑫、冯嘉毅几位同学参加了部分书稿的文字录入和校对工作。

本书在编写过程中参考了大量文献，在此对所有文献作者表示由衷地感谢。

由于作者水平有限，欢迎读者对于书中的不足给予指正。

作　者

2009年8月

目　录

第一章　函数与极限 ……… (1)
第一节　映射与函数 ……… (1)
第二节　数列的极限 ……… (2)
第三节　函数的极限 ……… (4)
第四节　无穷小与无穷大 ……… (5)
第五节　极限运算法则 ……… (6)
第六节　极限存在准则　两个重要极限 ……… (8)
第七节　无穷小的比较 ……… (11)
第八节　函数的连续性与间断点 ……… (13)
第九节　连续函数的运算与初等函数的连续性 ……… (16)
第十节　闭区间上连续函数的性质 ……… (17)
第二章　导数与微分 ……… (19)
第一节　导数的概念 ……… (19)
第二节　导数的求导法则 ……… (27)
第三节　高阶导数 ……… (29)
第四节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数　相关变化率 ……… (30)
第五节　函数的微分 ……… (35)
第三章　微分中值定理与导数的应用 ……… (37)
第一节　微分中值定理 ……… (37)
第二节　洛必达法则 ……… (40)
第三节　泰勒公式 ……… (43)
第四节　函数的单调性与曲线的凹凸性 ……… (46)
第五节　函数的极值与最大值最小值 ……… (51)
第六节　函数图形的描绘 ……… (54)
第七节　曲　率 ……… (59)
第四章　不定积分 ……… (61)
第一节　不定积分的概念与性质 ……… (61)
第二节　换元积分法 ……… (63)
第三节　分部积分法 ……… (65)
第四节　有理函数的积分 ……… (67)
第五章　定积分 ……… (70)
第一节　定积分的概念与性质 ……… (70)
第二节　微积分基本公式 ……… (75)
第三节　定积分的换元法和分部积分法 ……… (80)

第四节　反常积分 …………………………………………………… (89)
第六章　定积分的应用 …………………………………………… (95)
第一节　定积分的元素法 …………………………………………… (95)
第二节　定积分在几何学上的应用 ………………………………… (95)
第三节　定积分在物理学上的应用 ………………………………… (106)
第七章　空间解析几何与向量代数 ……………………………… (111)
第一节　向量及其线性运算 ………………………………………… (111)
第二节　数量积　向量积　混合积 ………………………………… (111)
第三节　曲面及其方程 ……………………………………………… (113)
第四节　空间曲线及其方程 ………………………………………… (116)
第五节　平面及其方程 ……………………………………………… (116)
第六节　空间直线及其方程 ………………………………………… (118)
第八章　多元函数微分学 ………………………………………… (123)
第一节　多元函数的基本概念 ……………………………………… (123)
第二节　偏导数 ……………………………………………………… (124)
第三节　全微分 ……………………………………………………… (126)
第四节　多元复合函数的求导法则 ………………………………… (128)
第五节　隐函数的求导公式 ………………………………………… (134)
第六节　多元函数微分学的几何应用 ……………………………… (136)
第七节　方向导数与梯度 …………………………………………… (139)
第八节　多元函数的极值及其求法 ………………………………… (140)
第九节　二元函数的泰勒公式 ……………………………………… (149)
第九章　重积分 …………………………………………………… (150)
第一节　二重积分的概念与性质 …………………………………… (150)
第二节　二重积分的计算方法 ……………………………………… (151)
第三节　三重积分 …………………………………………………… (164)
第四节　重积分的应用 ……………………………………………… (167)
第十章　曲线与曲面积分 ………………………………………… (170)
第一节　对弧长的曲线积分 ………………………………………… (170)
第二节　对坐标的曲线积分 ………………………………………… (174)
第三节　格林公式及其应用 ………………………………………… (177)
第四节　对面积的曲面积分 ………………………………………… (180)
第五节　对坐标的曲面积分 ………………………………………… (183)
第六节　高斯公式 通量与散度 ……………………………………… (185)
第七节　斯托克斯公式 环流量与旋度 ……………………………… (188)
第十一章　级数 …………………………………………………… (190)
第一节　常数项级数的概念和性质 ………………………………… (190)
第二节　常数项级数的审敛法 ……………………………………… (192)
第三节　幂级数 ……………………………………………………… (201)

第四节　函数展开成幂级数 …………………………………………………… (208)
第五节　傅里叶级数 …………………………………………………………… (212)
第六节　一般周期函数的傅里叶级数 ………………………………………… (213)
第十二章　微分方程 ……………………………………………………………… (216)
第一节　微分方程的基本概念 ………………………………………………… (216)
第二节　变量可分离的微分方程 ……………………………………………… (217)
第三节　齐次微分方程 ………………………………………………………… (222)
第四节　一阶线性微分方程 …………………………………………………… (224)
第五节　全微分方程 …………………………………………………………… (229)
第六节　可降阶的高阶微分方程 ……………………………………………… (230)
第七节　高阶线性微分方程 …………………………………………………… (233)
第八节　常系数齐次线性微分方程 …………………………………………… (234)
第九节　常系数非齐次线性微分方程 ………………………………………… (236)
第十节　欧拉方程 ……………………………………………………………… (239)

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

考纲要求

- 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,并会建立应用问题的函数关系式.
- 理解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
- 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
- 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

内容提要

1. 函数的定义

设数集 $D\subset R$,则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数,记为 $y=f(x),x\in D$. 其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f=D$.

函数定义中,对每个 $x\in D$,按对应法则 f,总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记作 R_f 或 $f(D)$.

构成函数的两个要素是:定义域 D_f 及对应法则 f.

2. 函数的几种特性

(1)有界性　$\exists M>0,\forall x\in X\subset D,|f(x)|\leqslant M$.

(2)单调性　$\forall x_1,x_2\in I\subset D,x_1>x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$(或 $f(x_1)<f(x_2)$).

(3)奇偶性　$\forall x,-x\in D,f(-x)=-f(x)$(或 $f(-x)=f(x)$).

(4)周期性　$\forall x,x+T\in D,f(x+T)=f(x)$.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X,值域为 Y. 如果对于 Y 中的任一 y,由函数式 $y=f(x)$ 能在 X 中确定唯一的 x 与它对应:$x=\varphi(y)$,那么 $x=\varphi(y)$ 就叫作 $y=f(x)$ 的反函数. 它的定义域是 Y. $y=f(x)$ 的反函数也常记作 $x=f^{-1}(y)$.

4. 复合函数

设 $y=f(u),u=\varphi(x)$,且当 x 在某一范围内取值时,相应的 u 值可使 $f(x)$ 有意义,则称 y 是 x 的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 u 叫作中间变量.

注意,在进行函数复合时,函数 $\varphi(x)$ 的值不能超出函数 $y=f(u)$ 的定义域.

5. 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

典型例题解析

题型一　有关函数特性(奇偶性、单调性、周期性和有界性)

例 1　(90303)设函数$f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$,则$f(x)$是(　　).

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

【答案】B.

【详解】因为$f(-x)=-x\cdot\tan(-x)\cdot e^{\sin(-x)}=x\cdot\tan x\cdot e^{-\sin x}\neq f(x)$,$f(-x)\neq f(x)$所以$f(x)$非奇也非偶;又$f(x)$中含有$x$项,所以不是周期函数;且可以由特殊值法判断$f(x)$不是单调函数,所以选 B.

题型二　复合函数问题及定义域

例 1　设$f(x)=e^{x^2}$,$f(\varphi(x))=1-x$,且$\varphi(x)\geqslant0$,求$\varphi(x)$及其定义域.

【分析】先由$f[\varphi(x)]=1-x$确定$\varphi(x)$的表达式,再求$\varphi(x)$的定义域.

【详解】由$f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,有$e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$,解得$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,其定义域为$\ln(1-x)\geqslant0$,得$1-x\geqslant1$,即$x\leqslant0$.

题型三　分段函数的复合

例 1　(97203)设$g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant0\\ x+2, & x>0\end{cases}$,$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant0\end{cases}$,则$g(f(x))$为(　　).

A. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant0\end{cases}$　　C. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant0\end{cases}$

【答案】D.

【详解】$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2-(-x), & x\geqslant0\\ 2+x^2, & x<0\end{cases}=\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant0\end{cases}$,故应选 D.

例 2　(01203)设函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则函数$f\{f[f(x)]\}=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0, & |x|\leqslant1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

【答案】B.

【详解】因为$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则$f(x)=1$时,$f[f(x)]=1$;$f(x)=0$时,$f[f(x)]=1$,所以当$f[f(x)]=1$时,$f\{f[f(x)]\}=1$.

第二节　数列的极限

考纲要求

- 理解数列极限的概念.
- 了解数列极限的性质.

内容提要

1. 数列极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

2. 收敛数列的性质

(1)若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限必唯一.

(2)若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

(3)若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a > 0$(或 $a < 0$)，则存在正整数 $N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $x_n > 0$(或 $x_n < 0$)

(4)若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任一子列也收敛于 a.

典型例题解析

题型一　理解数列极限的定义和性质

例 1　(99203)"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"是数列的(　　).

A. 充分条件但非必要条件　　B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

【答案】C.

【分析】本题考查对数列收敛性定义的理解，注意到 2ε 仍是可任意小的正数，因此上述条件也是数列收敛的充要条件. 当然也可严格推导出它与标准定义是等价的.

【详解】由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a \Leftrightarrow$"对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$，总存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$"，显然可推导出："任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$".

反过来，若有"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"，则对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$(不妨设 $0 < \varepsilon_1 < 1$，当 $\varepsilon_1 \geqslant 1$ 时，取 $\overline{\varepsilon_1}$，$0 < \overline{\varepsilon_1} < 1 \leqslant \varepsilon_1$，代替即可)，取 $\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_1 > 0$，存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$，令 $N_1 = N - 1$，则满足"对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$，总存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$". 可见上述两种说法是等价的，故应选 C.

【评注】在复习过程中，对基本概念要理解透彻，而不仅仅在于是否记住. 本题若真正理解了数列极限的概念，并注意到 2ε 仍是可任意小的正数，则可立即得出正确答案.

例 2　(03104,03204)设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，则必有(　　).

A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立　　B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在　　D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在

【答案】D.

【分析】本题考查极限概念，极限值与数列前面有限项的大小无关，可立即排除 A，B；而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 是 $0 \cdot \infty$ 型未定式，可能存在也可能不存在，举反例说明即可；极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 属 $1 \cdot \infty$ 型，必为无穷大量，即不存在.

【详解】用举反例法,取 $a_n=\frac{2}{n},b_n=1,c_n=\frac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$,则可立即排除 A,B,C,因此正确选项为 D.

【评注】对于不便直接证明的问题,经常可考虑用反例,通过排除法找到正确选项.

第三节　函数的极限

考纲要求

- 理解函数极限的概念.
- 理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
- 了解函数极限的性质.

内容提要

1. 极限的定义

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 左极限、右极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

典型例题解析

题型一　讨论函数的左右极限

例 1　设 $f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$,求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

【详解】这个函数虽然不是分段函数,但由于 $x\to0$ 时 $\frac{1}{x}\to\infty$, $2^{\frac{1}{x}}$ 的变化趋势不能确定,要具体讨论,故也要考虑左右极限.

当 $x<0$ 而 $x\to0$ 时, $\frac{1}{x}\to-\infty,2^{\frac{1}{x}}\to0$,

所以, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\frac{0-1}{0+1}=-1$,

当 $x>0$ 且 $x\to0$ 时, $\frac{1}{x}\to+\infty,2^{\frac{1}{x}}\to+\infty,2^{-\frac{1}{x}}\to0$,

所以, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$

由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

【评注】总之,求函数的极限的方法比较多也很灵活,有时一道题中要用到几种方法,也有时一道题可以用不同的方法来做.在使用某种方法时,都应注意是否满足所要求的条件,否则,就会得出错误的结论.

第四节　无穷小与无穷大

考纲要求

➤ 理解无穷小量、无穷大量的概念.

➤ 了解无穷大与无穷小的关系.

内容提要

1. 无穷小:以零为极限的变量称作无穷小量

无穷小量的运算性质如下.

(1)有限个无穷小的和仍为无穷小. 有限个无穷小的乘积仍为无穷小. 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.

(2)求两个无穷小之比的极限时,分子及分母可用等价无穷小来代替.

2. 无穷大:绝对值无限增大的变量叫无穷大

注意:无穷大与无界变量是两个不同的概念.

3. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中,如果$f(x)$为无穷大,则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,如果$f(x)$为无穷小,且$f(x)\neq 0$,则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大.

典型例题解析

题型一　理解无界和无穷大的区别

例 1　函数$f(x)=x\sin x$(　　).

A. 在$(-\infty,+\infty)$内有界　　B. 当$x\to\infty$时为无穷大

C. 在$(-\infty,+\infty)$内无界　　D. 当$x\to\infty$时有有限极限

【答案】C.

【详解】取$x_k=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,则$f(x_k)=2k\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty\ (k\to+\infty)$;而取$x_k=2k\pi$,则$f(x_k)=2k\pi\sin(2k\pi)=0$. 可见当$x\to\infty$时,$f(x)$的极限不存在,也非无穷大,而是在$(-\infty,+\infty)$内的无界函数,故应选 C.

【评注】一个变量为无穷大量必也为无界变量,但反过来不一定成立. 无穷大量要求在相应变化过程下变量的绝对值一致地无限增大,而无界变量只需在个别点上的取值不能限定在某个范围内即可.

例 2　(98203)当$x\to 0$时,变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是(　　).

A. 无穷小　　B. 无穷大

C. 有界的,但不是无穷小　　D. 无界的,但不是无穷大

【答案】D.

【详解】可取 $x_k=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，$x_k=\dfrac{1}{k\pi}$，过程同例 1.

第五节　极限运算法则

考纲要求

➤ 理解无穷小的基本性质.

➤ 掌握极限的四则运算法则.

内容提要

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$；$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

典型例题解析

题型一　极限运算法则的理解

例 1　(是非题)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 均存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在.

【答案】“错”.

【分析】利用函数极限的运算性质可得.

【详解】因为 $g(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}$，故只有当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 均存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 才存在.

反例：$\lim\limits_{x\to0}x$，$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$ 均存在，但 $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

题型二　利用消去零因子求极限

例 1　(92103)当 $x\to1$ 时，求函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限.

【详解】解本题的关键是求函数的左右极限.

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}2e^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}2e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，因此 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在且不为 ∞.

题型三　利用有理化求极限

例 1　(01203)求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$.

【答案】$-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

【详解】

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})\cdot(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x^2+x-2)\cdot(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3-x-(1+x)}{(x^2+x-2)\cdot(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2(1-x)}{(x-1)(x+2)\cdot(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-2}{(x+2)\cdot(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{\sqrt2}{6},$$

即可得到 $-\frac{\sqrt2}{6}$.

题型四　利用有限个无穷小的乘积仍然为无穷小

例 1　(98203)设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是(　　).

A. 若 x_n 发散,则 y_n 必发散　　B. 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

C. 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小　　D. 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

【答案】D.

【详解】取 $x_n=n,y_n=0$,显然满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,以此排除 A. 取 $x_n=[1+(-1)^n]n$, $y_n=[1-(-1)^n]n$,显然满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,以此排除 B. 再取 $x_n=0,y_n=n$,也满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,又排除 C. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_ny_n\cdot\frac{1}{x_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$,故应选 D.

题型五　利用有界函数与无穷小的乘积为无穷小

例 1　(06304,06404) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$______.

【答案】1.

【分析】将其对数恒等化 $N=e^{\ln N}$ 求解.

【详解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$,

而数列 $\{(-1)^n\}$ 有界, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=0$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=e^0=1$.

例 2　(07304) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$______.

【答案】0.

【详解】因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=0$,而 $\sin x+\cos x$ 有界,故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0$$

题型六　利用分子极限和分母极限的关系

例1　已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}=2$,试确定 a,b 的值.

【详解】这是一个有理式的极限,当 $x\to1$ 时,分母 $(x-1)(x+2)\to0$,而极限是一个确定的值,故分子必趋于 0,此结论可一般推导如下:设在 x 的同一变化趋向下,$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$,$\lim\beta(x)=0$,则 $\lim\alpha(x)=\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\beta(x)=\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\lim\beta(x)=0$

由此知,此有理式的极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型的. 故可通过因式分解约去分子分母中的公因式,再根据极限为 2 得出 a、b 满足的另一个关系式.

由已知得 $\lim\limits_{x\to1}(x^4+ax+b)=0$,而 $\lim\limits_{x\to1}(x^4+ax+b)=1+a+b$,
所以 $1+a+b=0$　①

即,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+ax-a-1}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1+a(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2+x+1+a}{(x+2)}=\frac{4+a}{3}$$

所以,$\dfrac{4+a}{3}=2$　②

由①②两式解出 $a=2,b=-3$.

第六节　极限存在准则　两个重要极限

考纲要求

- 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限.
- 掌握利用两个重要极限求极限的方法.

内容提要

1. 极限存在准则

(1)单调有界准则:单调有界数列必有极限.

(2)夹逼准则.

若数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$

2. 两个重要极限

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

典型例题解析

题型一　关于夹逼准则

例1　(95203) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ______.

【答案】$\frac{1}{2}$.

【分析】将数列的通项适当放大、缩小，再利用夹逼准则即可.

【详解】因为$\frac{1}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+k}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}$,

于是$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$.

故根据夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$.

例 2(00403,00303)设对任意 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

A. 存在且等于零　　B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在　　D. 不一定存在

【答案】D.

【详解】令 $\varphi(x)=e^x-e^{-|x|}$,$f(x)=e^x$,$g(x)=e^x+e^{-|x|}$，则对任意 x 有

$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}2e^{-|x|}=0$，但$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}e^x$不存在，排除 A,B.

又令 $\varphi(x)=e^{-|x|-1}$,$f(x)=e^{-|x|}$,$g(x)=e^{-|x|+1}$，则对任意 x 有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，此时有$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-|x|}=0$，排除 C. 故应选 D.

题型二　关于单调有界准则

例 1　(96105)设 $x_1=5$,$x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}(n=1,2,\cdots)$，证明$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限.

【答案】极限为 3.

【详解】首先由数学归纳法知 $x_n>3$.

由于 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$，所以 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n+6}-x_n=\frac{(\sqrt{x_n+6}-x_n)\cdot(\sqrt{x_n+6}+x_n)}{\sqrt{x_n+6}+x_n}$

$=\frac{(2+x_n)(3-x_n)}{\sqrt{x_n+6}+x_n}<0$，所以数列$\{x_n\}$单调递减有下界，所以数列$\{x_n\}$的极限存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $A=\sqrt{A+6}$所以得到 $A=3$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

例 2　(02208)设 $0<x_1<3$,$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限.

【答案】极限为$\frac{3}{2}$.

【详解】由 $0<x_1<3$ 知 x_1,$3-x_1$ 均为正数，

故 $0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}$，设 $0<x_k\leqslant\frac{3}{2}(k>1)$，则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2},$$

由数学归纳法知,对任意正整数 $n>1$ 均有 $0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$,因而数列 $\{x_n\}$ 有界.

又当 $n>1$ 时,$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0$,

因而有 $x_{n+1}\geqslant x_n(n>1)$,即数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限,得 $a=\sqrt{a(3-a)}$,

解之得 $a=\frac{3}{2}$,$a=0$(舍去),故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

例 3 (06112,06212)设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$,$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限.

【详解】因为 $0<x_1<\pi$,则 $0<x_2=\sin x_1\leqslant 1<\pi$.

可推得 $0<x_{n+1}=\sin x_n\leqslant 1<\pi$,$n=1,2,\cdots$,则数列 $\{x_n\}$ 有界.

于是 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sin x_n}{x_n}<1$,(因当 $x>0$ 时,$\sin x<x$),则有 $x_{n+1}<x_n$,可见数列 $\{x_n\}$ 单调减少,故由单调减少有下界数列必有极限知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边令 $n\to\infty$,得 $l=\sin l$,解得 $l=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

【评注】对于有递推关系的数列极限的证明问题,一般利用单调有界数列必有极限准则来证明.

例 4 (08204)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是( ).

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $f(\{x_n\})$ 收敛　　B. 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $f(\{x_n\})$ 收敛

C. 若 $f(\{x_n\})$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛　　D. 若 $f(\{x_n\})$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

【答案】B.

【详解】利用单调有界必收敛.

若 $\{x_n\}$ 单调,而由题设知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,则 $f(\{x_n\})$ 单调有界,故收敛,故选 B.

题型三 关于重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

例 1 (00105,00205)求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$

【分析】本函数关系式中含有绝对值,本质上是一分段函数,在分段点的极限应通过左、右极限来讨论.

【详解】因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2}{1}-1=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{1+e^{-\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$,可见,原式 $=1$.