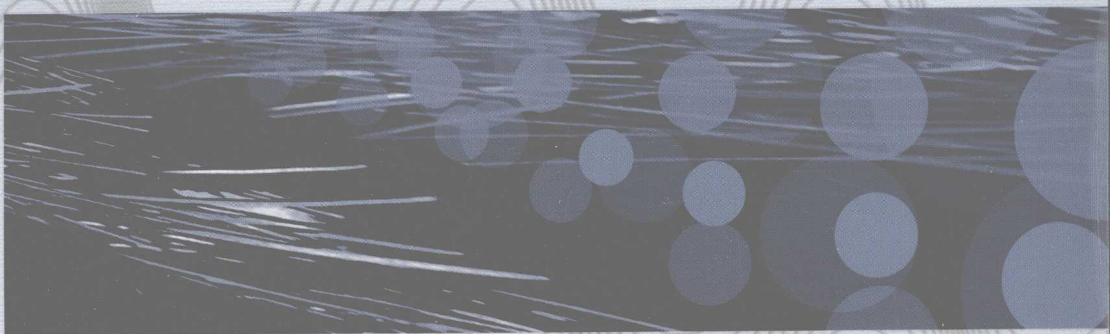
高等数学(二)



多元函数微积分学

曹广福　叶瑞芬　赵红星　编

高等教育出版社
Higher Education Press

高等数学（二）

多元函数微积分学

曹广福　叶瑞芬　赵红星　编

高等教育出版社

内容提要

本教材侧重问题的发现与分析，注重数学思想的挖掘，帮助读者学会如何进行数学猜测，如何从特殊现象中发现一般规律，不仅介绍数学知识，更注重概念、定理来龙去脉的阐述，强化数学应用能力的培养。

本教材语言流畅，通俗易懂。本册为多元函数微积分学，内容包括：级数理论；空间解析几何初步；多元函数微分学；多重积分；曲线积分与曲面积分。本教材主要面向地方高等院校非数学类专业的学生，也可作为重点高校学生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.2，多元函数微积分学/曹广福，叶瑞芬，赵红星编.—北京：高等教育出版社，2009.7

ISBN 978-7-04-027234-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①曹…②叶…③赵… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O13 O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第086369号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 于文燕
责任绘图 尹文军 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 姜国萍
责任印制 张泽业

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京地质印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	版　　次	2009年7月第1版
印　　张	15.5	印　　次	2009年7月第1次印刷
字　　数	290 000	定　　价	17.40元

物料号 27234-00

目　　录

第七章

级数理论

微积分最令人着迷之处在于局部地“用简单代替复杂”，例如，在曲线上一点的附近用切线代替曲线，或用线性函数代替一般的函数，但这种代替往往带来较大的误差，同时也限制了自变量的取值范围（只能在这一点的附近近似）. 泰勒公式告诉我们，用更高次的多项式可以在更广的范围内近似一般的函数，如果函数足够光滑（各阶导数都存在），则可以将多项式的次数取得足够的高. 这自然带来一个问题，当多项式的次数越来越高时，多项式按何种方式接近给定的函数？是逐点收敛还是一致收敛？这就是本章要讨论的级数理论. 简单地说，所谓函数的级数展开，指的是将函数表示成无穷多项简单函数（通常是幂函数或三角函数）的和. 无穷多个常数的和称为常数项级数，无穷多个幂函数（各项幂指数互不相同）的和称为幂级数，无穷多个三角函数（通常是频率互不相同的余弦函数与正弦函数）的和称为三角级数（也称为傅里叶级数）.

级数理论在物理学、化学等领域中发挥了举足轻重的作用，甚至有些物理学家称，最有用的数学就是傅里叶级数. 上个世纪中叶，赫伯特曼利用傅里叶分析解决了化学家长期未能找到答案的晶体几何中一个重大问题并因此获得了诺贝尔化学奖. 傅里叶分析更是通信工程、信号处理等领域中常用的工具.

§1 常数项级数

1. 常数项级数

有一个新的龟兔赛跑的故事，这个故事是说，如果乌龟在前面不停地跑，那么兔子将永远追不上乌龟，理由是什么呢？假设刚开始时，乌龟在距兔子正前方 a(m)的地方，大家同时起跑，兔子要追到乌龟，必须首先经过刚开始时两者的中点，当兔子到达此点时，乌龟又往前走了一段到达 a_1 点. 于是兔子要到达 a_1 点必须先到达距 a_1 点$\frac{1}{2}$距离处. 如此不断进行，兔子将永远赶不上乌龟. 我们知道这是荒谬的，但问题出在哪里呢？当我们掌握了级数理论后就不难回答这个问题了.

假设 $\{a_n\}$ 是一个数列，我们熟悉如何将数列的有限项加起来，例如等差数列与等比数列前 n 项的部分和是在中学就见过的. 但如何将数列的所有项都加起来呢？也就是说，下式

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots \tag{7.1}$$

表示什么？为了描述上的方便，常将(7.1)简记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots,$$

并称它为**常数项级数**，a_n 称为级数的**通项**. 是不是对每个数列 $\{a_n\}$，(7.1)都有意义？从下面的两个例子你能看出什么？

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots, \tag{7.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots. \tag{7.3}$$

(7.2)比较好理解，从第一项开始逐项相加，将会发现，随着项数增加，和越来越大. (7.3)似乎不那么简单，如果看前面两项，则和为 0，如果看前三项，则和为 -1，不难发现，前偶数项相加，和为 0，前奇数项相加，则和为 -1，而且将级数交换一下求和的顺序，还会得到其他的数.

这说明什么？并非所有的数列都可以逐项加起来！那么如何判断什么样的数列可以逐项求和呢？要回答这个问题，自然离不开极限.

定义 7.1 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{7.4}$$

称为级数的**部分和**，若 S_n 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**，并称 s 为该级数的和，记作

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{7.5}$$

如果 S_n 的极限不存在，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**.

按定义 7.1，(7.2) 与 (7.3) 都是发散级数.

如果级数收敛，则 s 与部分和 S_n 的差称为级数的**余项**，记作

$$r_n = s - S_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots. \tag{7.6}$$

从定义 7.1 可以看到，我们实际上是用数列 $\{S_n\}$ 的收敛性来定义级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性. 反过来，数列也可以用级数形式来表示，假设 $\{a_n\}$ 是任给的数列，则

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= \sum_{i=2}^{n} (a_i - a_{i-1}) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}), \end{aligned}$$

因此，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则

$$a - a_1 = \sum_{i=2}^{\infty} (a_i - a_{i-1}).$$

例 7.1 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 是发散的.

证明 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i$，则

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -1, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k = 1,2,3,\cdots,$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散.

例 7.2 设 $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)(2n-1)}$，$n = 1,2,\cdots$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性并求和.

证明 易知

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+1)(2i-1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), \end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且其和等于 $\dfrac{1}{2}$.

例 7.3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 称为调和级数,试讨论其收敛性.

解 讨论此问题的关键是如何用一个容易求部分和的级数来控制该级数的部分和,从而确定其敛散性,记

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i},$$

则

$$S_2=1+\frac{1}{2},$$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},$$

$$S_8=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{4}{8}=1+\frac{3}{2}.$$

以此类推可知

$$S_{2^n}>1+\frac{n}{2},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2^n}=\infty$,从而 $\{S_n\}$ 发散,即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

由例 7.3 容易验证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 也发散,事实上,由于

$$S_{2^n}=\sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{\sqrt{i}}>\sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{i}>1+\frac{n}{2},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2^n}=\infty$,进而 $\{S_n\}$ 发散,即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

很多时候判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性并不是一件容易的事,往往需要一些专门的技巧,级数通项的某些特征有时也能为我们的判断提供一些帮助.

定理 7.1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明 由级数是收敛的知部分和序列

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

收敛,从而

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0,$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$ 或不存在,则由定理 7.1 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必发散.例如,利用定理

7.1 立刻可以判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 都是发散的. 但是由例 7.3 可知,定理 7.1 只是判断级数收敛的一个必要条件却非充分条件.

有时,收敛级数的某些性质也能帮助我们计算级数的和或判断其收敛性,这些性质包括

定理 7.2 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是收敛级数,则 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$(c 为常数), $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 也收敛,且

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

这些性质的证明并不困难,只要将收敛数列的相应性质运用到级数的部分和序列上就行了.

例 7.4 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)(2n-1)} + \frac{1}{3^n}\right]$ 的收敛性.

解 由例 7.2 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$ 收敛,又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比级数,易知它也收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)(2n-1)} + \frac{1}{3^n}\right]$ 收敛.

由收敛性定义知,对任意的正整数 N,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性与级数 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 的收敛性相同,这就是说去掉级数的任意有限项不影响其收敛性.

2. 正项级数

所谓正项级数指的是通项非负的级数,任给级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 都对应到一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$,于是如果能判断正项级数何时收敛,则可能帮助我们判断一般的常数项级数的收敛性. 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 而言,由于其部分和数列 $\left\{S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\right\}$ 是单调递增的,因此,其收敛性的判断相对于一般项级数要简单些.

定理 7.3 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

定理 7.4(比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数,如果 $a_n \leqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$,则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛,当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时,$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

证明 记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, T_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$,则有 $S_n \leqslant T_n$.

如果 T_n 收敛,则 T_n 必有界,从而 S_n 亦有界,故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;反之,若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则 S_n 无界,于是 T_n 也无界,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

也许两个级数的通项间并不像定理 7.4 所要求的那样可逐项比较,但只要它们通项比有极限存在,仍然可以通过比较来判断收敛性.

定理 7.5 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是正项级数.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l\ (0 \leqslant l < +\infty)$,且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l > 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = +\infty$,且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

证明 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$ 知对 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n \geqslant N$ 时,有 $\frac{a_n}{b_n} \leqslant l+1$,从而

$$a_n \leqslant (l+1)b_n, \quad n \geqslant N,$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛知 $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ 收敛,于是由

$$\sum_{i=N}^{\infty} a_i \leqslant (l+1)\sum_{i=N}^{\infty} b_i \quad (n > N)$$

知 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 是收敛级数,进而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 的证明可仿 (1) 进行,也可颠倒两级数的通项的顺序,即考察 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$,然后用 (1) 来证明(读者可以一试).

例 7.5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是否收敛?

解 由于

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad (n \neq 1),$$

故由 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ 的收敛性知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛的.

有一个比例 7.5 更一般的正项级数,称为 p **级数**,它常常作为判别其他级数收敛性的一个"参照物".

例 7.6 设 $p>0$,讨论 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的收敛性.

解 如果 $p \leqslant 1$,则 $\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n} (n \geqslant 1)$,故由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散级数知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 也是发散的. 困难之处在于 $p>1$ 的情形,关键是如何估计级数的部分和,记

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^p},$$

企图计算部分和 S_n 是徒劳的,但我们知道对任意 $i \leqslant x \leqslant i+1$,有 $\frac{1}{(i+1)^p} \leqslant \frac{1}{x^p} \leqslant \frac{1}{i^p}$,因此,在 $[i, i+1]$ 上,我们可以利用函数 $\frac{1}{x^p}$ 来控制 $\frac{1}{(i+1)^p}$,然后做积分得

$$\frac{1}{(i+1)^p} = \int_i^{i+1} \frac{1}{(i+1)^p} \mathrm{d}x \leqslant \int_i^{i+1} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x,$$

于是部分和 S_n 可以通过 $\frac{1}{x^p}$ 的积分来控制,即

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^p} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} \frac{1}{i^p} \mathrm{d}x \leqslant 1 + \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x \\ &= 1 + \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^n = 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1}. \end{aligned}$$

可见 $\{S_n\}$ 是有界数列,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛.

综上得,p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 在 $p \leqslant 1$ 时发数,$p>1$ 时收敛.

一般地,如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项刚好是某个函数 $y=f(x)$ 在 $x=n$ 处的取值,即 $f(n)=a_n$,并且 $f(x)$ 是单调递减的连续函数,则可以利用反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性来判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性,也就是说,我们有下面的

定理 7.6(积分判别法) 设$f(x)$为$[1,+\infty)$上的非负单调递减连续函数，$a_n=f(n)$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛当且仅当反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛.

定理 7.6 的证明按例 7.6 如法炮制(请读者自己作出证明).

例 7.7 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^2}$是否收敛?

解 令$a_n=\frac{\ln^2 n}{n^2}$，$b_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，由例 7.6 知$\sum\limits_{n=N}^{\infty}b_n$收敛，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$=4\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=4\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}=8\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0,$$

故由定理 7.5 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^2}$收敛.

比较判别法的本质是利用一个相对比较容易判别的级数去控制给定的级数，从而判别该级数的收敛性. 对于给定的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，我们通常是根据通项$a_n$的特征去寻找控制级数. 一种特殊情形是利用等比级数作控制级数，这就是下面的比值判别法，也称**达朗贝尔判别法**.

定理 7.7(比值判别法) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho,$$

则当$\rho<1$时级数收敛；当$\rho>1\left(\text{或}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty\right)$时级数发散；当$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散.

证明 首先假设$\rho<1$，则存在$\varepsilon_0>0$，使得$\rho+\varepsilon_0<1$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$知存在正整数$N$，当$n\geqslant N$时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho+\varepsilon_0,$$

于是

$$a_n < (\rho+\varepsilon_0)a_{n-1} < (\rho+\varepsilon_0)^2 a_{n-2} < \cdots < (\rho+\varepsilon_0)^{n-M}a_N \quad (n \geqslant N),$$

由级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(\rho+\varepsilon_0)^{n-M}a_N$ 的收敛性知 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

现设 $\rho>1$，取充分小的正数 $\varepsilon_0>0$，使得 $\rho-\varepsilon_0>1$，则存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \rho-\varepsilon_0,$$

于是

$$a_n > (\rho-\varepsilon_0)a_{n-1} > (\rho-\varepsilon_0)^2 a_{n-2} > \cdots > (\rho-\varepsilon_0)^{n-M}a_N \quad (n \geqslant N),$$

由级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(\rho-\varepsilon_0)^{n-M}a_N$ 发散知 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n$ 也是发散的，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

至于 $\rho=1$ 情形，只需要考察例 7.6 中不同的 p 便立知分晓.

例 7.8 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 的收敛性.

解 记 $a_n=\frac{1}{n^n}$，则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+1},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 收敛.

例 7.9 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^n}(a>0)$ 的收敛性.

解 记 $a_n=\frac{a^n}{n^n}$，则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{1}{n+1}<\frac{a}{n+1},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^n}$ 收敛.

例 7.10 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}(a>0)$ 的收敛性.

解 记 $a_n=\frac{a^n}{n!}$，则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{a^n}{n!}}=\frac{a}{n+1},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$,从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$收敛.

定理 7.8(根值判别法) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数,若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho,$$

则当$\rho<1$时级数收敛,当$\rho>1$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=+\infty$)时级数发散,当$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散.

证明 可仿定理 7.7 进行,例如,若$\rho<1$,则存在$\varepsilon_0>0$,使得$\rho+\varepsilon_0<1$,进一步存在正整数N,当$n\geqslant N$时,有$\sqrt[n]{a_n}<\rho+\varepsilon_0$,于是$a_n<(\rho+\varepsilon_0)^n\ (n\geqslant N)$,从而得到等比控制级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\rho+\varepsilon_0)^n$,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

$\rho>1$情形可类似证明,对于$\rho=1$情形例 7.6 仍然是一个适合的例子.

3. 交错级数收敛性判别法

一般常数项级数的收敛性判别通常是比较困难的,我们只能针对某些特殊情形判别.有一类级数称为**交错级数**,其通项的符号是交错出现的,即可以写成如下形式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n+\cdots,\qquad(7.7)$$

其中$a_n>0$,对这类级数有一个简单的收敛性判别方法.

定理 7.9(莱布尼茨判别法) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$是交错级数,满足

(1) $a_n\geqslant a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$,即$\{a_n\}$是单调递减的数列;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛.

证明 既然通项的符号交错出现,a_n又是单调的,我们可以将级数部分和中的项两两组合,便可以得到一个正项和与负项和,具体地说,记S_n为级数的部分和,则

$$S_n=\begin{cases}-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\cdots-(a_{2k-1}-a_{2k}), & n=2k,\\ -a_1+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{2k}-a_{2k+1}), & n=2k+1.\end{cases}$$

由于a_n单调递减,故$a_i-a_{i+1}\geqslant0$,从而S_{2k}是单调递减的.另一方面,由于

$$S_{2k}=-a_1+(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+\cdots+(a_{2k-2}-a_{2k-1})+a_{2k},$$

可见$S_{2k}\geqslant-a_1$,因此$\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}$存在.