GAODENG ZHIYE JIAOYU

主　编◎骈俊生

高等职业教育课程改革示范教材

工程应用数学

◎线性代数
◎计算方法
◎概率统计
◎离散数学

南京大学出版社

高等职业教育课程改革示范教材

工程应用数学

主　　编　骈俊生
编写人员　蔡鸣晶　冯　晨　廖芳芳　缪　蕙
　　　　　吴玉琴　张育蔺　王　罡　黄国建

南京大学出版社

内容简介

本书主要根据高职高专人才培养要求，本着帮助学生打好必要的应用数学基础，培养学生数学应用能力和逻辑思维能力的目的而编写的，包含线性代数、计算方法、概率统计和离散数学四部分内容，共15章.

本书可作为高职高专各专业教材使用，也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工程应用数学 / 骈俊生主编. —南京：南京大学出版社，2009.8

高等职业教育课程改革示范教材

ISBN 978-7-305-06308-4

Ⅰ.工… Ⅱ.骈… Ⅲ.工程数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第121628号

出 版 者 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路22号　　邮编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左 健

丛 书 名 高等职业教育课程改革示范教材
书　　名 工程应用数学
主　　编 骈俊生
责任编辑 吴 华　　编辑热线 025-83592146
照　　排 南京玄武湖印刷照排中心
印　　刷 南大印刷厂
开　　本 787×1092 1/16 印张 14 字数 355千
版　　次 2009年8月第1版 2009年8月第1次印刷
ISBN 978-7-305-06308-4
定　　价 25.00元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

高等职业教育课程改革示范教材
《工程应用数学》指导委员会

顾　　问 王　煌　王兆明

主任委员 南通职业大学副校长　陈家颐

副主任委员(排名不分先后)

盐城卫生职业技术学院党委书记兼院长　王光文

南京信息职业技术学院副院长　王钧铭

常州机电职业技术学院副院长　郝　超

常州工程职业技术学院副院长　陈炳和

江苏海事职业技术学院副院长　曹志平

常州轻工职业技术学院副院长　王志平

常州纺织服装职业技术学院副院长　贺仰东

连云港师范高等专科学校副校长　陈留生

无锡工艺美术职业技术学院副院长　邵汉强

无锡商业职业技术学院副院长　沈苏林

苏州拓普信息技术学院副院长　任祥生

硅湖职业技术学院副院长　黄月琼

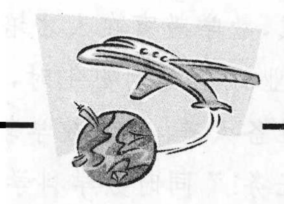
南京工业职业技术学院副院长　林　苏

扬州职业大学副校长　张　泰

苏州职业大学副校长　程宜康

南京大学出版社社长兼总编辑　左　健

序



近年来我国高等职业教育高速发展，规模已占我国高等教育的半壁江山．高职教育培养了大量社会急需的实用人才，为我国的社会经济发展做出了重要贡献．高职教育之所以能取得如此成就，主要是这种教育类型顺应了我国经济快速发展的时代需要和市场对实用型人才的急切需求．我认为高职院校现在应将主要精力放到学校的内涵式发展上，进一步构建和优化以工学结合为特征的人才培养体系，注重人才培养质量，为国家培养大量高素质技能型人才．为此，一方面专业建设必须强化实践教学，通过生产性实训和顶岗实习增强学生就业能力，提高毕业生的就业率和企业认可度，另一方面要同时抓好实践教学和基础课两个课程系统建设，着眼于学生综合素质培养，提高学生的社会竞争力和可持续发展能力．

值得注意的是，近年来一些高职院校偏重于职业训练，对基础理论课不予重视，学生往往只掌握较单一的职业技能，缺乏必要的理论根基．而我们所面对的挑战是，随着现代科学技术日新月异的发展，企业技术与设备在不断更新，毕业生的职业角色也会不断改变．我们培养的学生不能只满足于找到第一岗位的工作，还应该能够适应职业的流动和变化．文化基础课特别是数学课的基础，有利于更好地理解专业的理论基础，有利于更好地学习知识，有利于发展人的智力，有利于不断掌握新技术，有利于提高劳动生产率，有利于学生职业生涯的可持续发展．高等职业教育一定要充分重视包括数学在内的文化课，一定要处理好基础知识教育与专业知识教育、专业培训之间的关系．

数学作为自然科学、社会科学和行为科学的基础，与科学的各个分支、科学发

展的各个前沿学科有着广泛而密切的联系.现代高科技的发展与应用已经使数学以技术化的方式迅速辐射到了人们日常工作和生活的各个领域,数学的发展影响着人类的思维方式,数学教育在人才培养上的重要性是毋庸置疑的.美国《职业展望季刊》称:“当职业计划发生变化时,在接受新的教育或训练目标时最大的绊脚石之一就是数学准备太差.掌握数学较多的人不仅适合于承担更多的工作,他们也能更好地完成任务.”同时数学科学作为一种文化,是整个人类文化的重要组成部分,始终是推进人类文明的重要力量.在文化素质教育中,数学可以起到很积极的作用.数学教学不仅要向学生传授知识,更重要的是要让学生掌握严谨的思维方式,从而提高学生的综合素质.

但是在我国高职教育中,数学课的地位是比较尴尬的.一方面数学课成为很多高职院校挤压的对象,有些以数学为基础的专业只是象征性地开几节数学课,甚至不开数学课,另一方面,由于高职数学课仍然固守传统教法,教学内容理论性过强,过分强调自身的完整性、严密性,与社会实践和学生的专业学习脱节.因此,如何根据专业需求和学生的实际设计和安排数学课程?教多少,怎样教?如何使学生能将所学数学知识应用自如?如何以教学内容为载体,训练并提高学生思维能力,发挥数学在培养学生创新能力和提高科学素质方面的重要作用?如何使高职数学教学对学生职业能力和职业素养的形成起到重要的支撑和明显的促进作用?这些都是亟待高职数学教育工作者研究解决的问题.

骈俊生教授和他的团队在高职数学教学改革方面做了大量的尝试,取得了一些成果,《工程应用数学》就是他们根据实用人才培养目标和高职专业需求编写的.教材中教学内容采用模块化组合,可根据学生实际和专业需求进行个性化内容选择,便于对不同专业、不同对象实行差异化教学,以达到为各相关专业培养高素质技能型人才服务的目标.衷心希望教材的出版和使用能够达到预期的目的,也希望作者们继续努力,通过教学实践和教学研究,不断改进优化教学内容和教学手段,注重学生数学“动手”能力培养,激发学生自我学习潜能,探索出一套高效的高职数学教学方法,实现数学课程与专业课程的有机融合和对接,为培养具有较强竞争力和可持续发展能力的高素质技能型人才做出更大贡献.

张旭翔

2009年7月

前　言

我国高等职业教育发展到今天，已经取得了举世瞩目的成就．继续深化高职教育改革，提高教育教学质量，更好地为国家建设培养高素质技能型人才，是高职教育面临的新的重要课题．高职院校已经不再满足于教给学生一项技术，为学生谋到一份工作，而是面向学生职业生涯，既重视实践能力的培养，又重视基础知识的教学，力求全面提高学生文化修养、技能素养和创新能力，增强学生的社会竞争力和可持续发展能力．

数学作为诸多专业的重要基础课，在高职学生培养中具有十分重要的作用．高职数学教育不仅要向学生传授知识，为专业学习服务，还要为学生日后的工作和深造打下必要的数学基础，更要将数学文化有机地融入数学教学中，对学生施以潜移默化的影响，以提高学生的科学素养和综合素质．

本书是为了适应高职教育的新形势，根据高职人才培养要求，本着帮助学生打好必要的数学基础、培养学生数学应用能力的目的而编写的．一般在学习微积分等相关高等数学知识后再进行本书的学习．高职院校理论课学时较少，学生数学基础差异较大，各专业对数学的需求也不一样，因此，编写一本普遍适用的高职应用数学教材是不太可能的．在教材编写中，我们按照专业课程对应用数学基础的需求进行了内容选取，同时考虑了学生数学思维能力培养和利用计算机解决数学问题能力的培养等问题．我们以编写这本教材作为尝试，希望能为探索高职数学教材建设之路做点贡献．

全书由线性代数、计算方法、概率统计和离散数学四篇组成，各篇内容相对独立，各专业可根据专业需求选讲其中部分内容，讲解时先后顺序也可进行适当调整．本书还可配合数学实验课进行教学．建议教学总时数为 75 学时．

教材编写过程中，各级领导和专家给予了热情关心和指导，相关专业老师提出了不少宝贵意见，南京信息职业技术学院院长张旭翔教授欣然为本书作序，南京大学出版社吴华编辑和她的同事们为了本书顺利出版不辞辛劳地工作．对此，作者一并致以衷心的感谢！

由于编者水平和编写时间所限，本教材必定存在一些错误和不足之处，敬请广大师生批评指正，以便今后修订提高．

编　者
2009 年 7 月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　计算方法

第三篇　概率统计

第四篇 离散数学

第一篇

线性代数

第1章 行 列 式

1.1 行列式的定义

1.1.1 二、三阶行列式定义

规定记号：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$，并称之为**二阶行列式**，其中，$a,b,c,d$ 称为二阶行列式的元素. 横排称为行，竖排称为列. 从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为**次对角线**.

解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组的解为：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，即系数行列式 $D \neq 0$ 时，方程组的解可简洁地记为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为**三阶行列式**，其中 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是原行列式中划去元素 a_{11} 所在的第一行、第一列后剩下的元素按原来的顺序组成的二阶行列式，称它为元素 a_{11} 的**余子式**，记作 M_{11}，即

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

类似地，记 $$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

利用同样的方法，可得到 $M_{21}, M_{22}, \cdots, M_{33}$.

令 $$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \quad (i,j = 1,2,3),$$

称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

于是，三阶行列式也可以表示为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j},$$

而且它的值可以转化为二阶行列式计算而得到.

利用三阶行列式的概念，当三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$ 时，它的解也可以简洁地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中，D_1, D_2, D_3 是将方程组中的系数行列式 D 的第 1,2,3 列换成常数列得到的三阶行列式.

【例 1－1】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 9.$

1.1.2 n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素组成的一个算式，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 **n 阶行列式**，简称行列式，其中 a_{ij} 为 D 的第 i 行第 j 列的元素 $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

当 $n=1$ 时，规定：$D=|a_{11}|=a_{11}$.

当 $n-1$ 阶行列式已定义，则 n 阶行列式：

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

其中 A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式.

下面介绍几种特殊的行列式.

1. 三角形行列式

(1) **上三角形行列式** 主对角线下方元素全为零的行列式称为上三角形行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) **下三角形行列式** 主对角线上方元素全为零的行列式称为下三角形行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 对角形行列式

主对角线上方、下方的元素全为零的行列式称为对角形行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

【例 1-2】 求下列行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{vmatrix}.$$

解 $D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} c & d & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & g \end{vmatrix}+(-1)^{1+4}b\begin{vmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix}=aceg-bcef.$

1.2 行列式的性质

1.2.1 转置行列式的概念

如果把 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中的行与列按原来的顺序互换，得到新的行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

那么称行列式 D^{T} 为 D 的**转置行列式**，显然 D 也是 D^{T} 的转置行列式.

1.2.2 行列式的性质

性质 1－1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

例如，
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$

由此性质知，行列式中行和列所处的地位是一样的，所以凡是对行成立的性质，对列也同样成立.

性质 1－2 如果将行列式的任意两行(或列)互换，那么行列式的值改变符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1－3 行列式一行(或列)的公因子可以提到行列式记号的外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1-1 如果行列式中有一行(或列)的全部元素都是零,那么这个行列式的值为零.

性质 1-4 如果行列式中两行(或列)对应元素全部相同,那么行列式的值为零,即

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

推论 1-2 行列式中如果两行(或列)对应元素成比例,那么行列式的值为零.

性质 1-5 若行列式的某一行(或列)的元素都是两数之和,例如,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1-6 在行列式中,把某一行(或列)的倍数加到另一行(或列)对应的元素上去,那么行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1-7 行列式等于它的任意一行(或列)中所有元素与它们各自的代数余子式乘积之和,即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik} \text{ 或 } D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj},$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n$,换句话说,行列式可以按任意一行或列展开.

性质 1-8 行列式 D 中任意一行(或列)的元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即当 $i\neq j$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0 \text{ 或} \sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0.$$

由性质 1-7 和 1-8,我们可以得到下面一个非常有用的定理.

定理 1-1(代数余子式组合定理) 设 n 阶行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij},则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D & \text{当 } i=j\\ 0 & \text{当 } i\neq j\end{cases} \text{或} \sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D & \text{当 } i=j\\ 0 & \text{当 } i\neq j\end{cases}.$$

【例 1-3】 证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0.$$

证明 设此行列式为 D,先把 D 化简,得

$$D\xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}\xlongequal{\substack{c_3-2c_2\\c_4-3c_2}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

1.3 行列式的计算

1.3.1 计算行列式的常用方法

行列式的基本计算方法常用的有两种:"降阶法"和"化三角形法".

降阶法是根据性质 1-7 选择零元素最多的行(或列),按这一行(或列)展开;或利用行列式的性质把某一行(或列)的元素化为仅有一个非零元素,然后再按这一行(或列)展开.

【例 1-4】 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

解 $D=(-1)^{2+1}(-2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=-2.$

化三角形法是利用行列式的性质，把行列式逐步转化为等值的上(或下)三角形行列式，这时行列式的值就等于主对角线上元素的乘积.

把行列式化为上(或下)三角形行列式的一般步骤如下.

第一步　若 $a_{11}\neq 0$，将第一行分别乘 $-\frac{a_{21}}{a_{11}},-\frac{a_{31}}{a_{11}},\cdots,-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ 加到第 $2,3,\cdots,n$ 行对应元素上，把第一列 a_{11} 以下的元素全部化为零，但应注意尽量避免将元素化为分数，否则会给后面的计算增加困难；若 $a_{11}=0$，则通过行(或列)变换使 $a_{11}\neq 0$.

第二步　依次类似，把主对角线 $a_{22},a_{33},\cdots,a_{n-1,n-1}$ 以下的元素全部化为零，即可得上三角形行列式.

【例 1-5】 计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-3r_1}}-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\div(-5)}-5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_2]{r_3-r_2}-5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{4}{3}r_3}-5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=-5\times 8=-40.$$

1.3.2 计算行列式的特殊方法

在行列式的计算中，“数学归纳法”是比较实用的技巧，该方法从低阶到高阶进行归纳，通常用来进行证明.

【例 1-6】 证明 n 阶范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

证明　用归纳法. $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j).$$

现假设 $n-1$ 阶范德蒙行列式结论成立,那么

$$D_n\xlongequal[\substack{\vdots\\ r_2-x_1r_1}]{\substack{r_n-x_1r_{n-1}\\ r_{n-1}-x_1r_{n-2}}}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots\\ c_{n-1}\div(x_n-x_1)}]{\substack{c_1\div(x_2-x_1)\\ c_2\div(x_3-x_1)}}(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

上式最后一个行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式,由归纳假设,

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix}=\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

于是 $D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod\limits_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$

【例 1-7】 计算

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}.$$

解 由例 1-6,这是一个范德蒙行列式,所以

$$D=(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=12.$$

1.4 克莱姆法则

n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}. \tag{1-1}$$