

高等工业學校教學用書

高等数学教程

第二卷 第一分冊

陈 蓋 民 著



國防工業出版社

高等工业学校教学用书

高等数学教程

第二卷 第一分册

陈 盖 民 著

国防工业出版社

本書是为工学院編写的教科書，內容分为四卷：解析几何、数学分析初步、数学分析的进一步发展、补充教材。前三卷是根据高教部教学大纲的要求而編写的，曾在北京工业学院試教过，約需200学时講完。最后一卷是为了某些专业的需要而編写的，内容包括：复变函数、拉氏变换、矢量分析、概率与誤差等，約需60学时講完。

書中特別注意难点的处理与基本概念的闡述。对于难点的处理，除用深入分析的方法外，也用分散难点的方法来減輕困难的程度。对于基本概念是按历史的发展或具体的分析与綜合来叙述的。并且通过概念的闡述来进行政治思想的教育。

高等数学教程

第二卷 第一分册

陈 京 民 著

*

国际工业出版社出版

北京市書刊出版业营业許可証出字第074号

北京新中印刷厂印刷 新华書店发行

*

850×1168 $\frac{1}{32}$ ·67 $\frac{1}{8}$ 印張·179,700字

一九五七年十一月第一版

一九五七年十一月北京第一次印刷

印数：1—3,760册 定价：(10)1.20元

第二卷

数学分析初步

第一分册 目次

第一編 基础知识

第十章 函 数

| | |
|------------------------|----|
| 第一节 函数概念及其表示法 | 1 |
| § 10·1 函数的定义 | 1 |
| § 10·2 函数的记号 | 4 |
| § 10·3 函数表示法, 函数的图形 | 5 |
| § 10·4 函数的定义域, 数列 | 7 |
| § 10·5 函数的增量与增减性 | 10 |
| § 10·6 反函数概念及其图形 | 13 |
| § 10·7 复合函数的定义 (函数的函数) | 15 |
| 第二节 基本初等函数 | 16 |
| § 10·8 基本初等函数与初等函数 | 16 |
| § 10·9 幂函数 | 18 |
| § 10·10 指数函数与对数函数 | 19 |
| § 10·11 三角函数与反三角函数 | 21 |

第十一章 极 限

| | |
|---------------------|----|
| 第一节 无穷小量与无穷大量 | 27 |
| § 11·1 无穷小量的定义 | 27 |
| § 11·2 有界变量与无穷大量的定义 | 30 |
| § 11·3 无穷小量的运算 | 33 |
| 第二节 极限概念 | 35 |
| § 11·4 引言 | 35 |

| | | |
|------------------------|------------------|----|
| § 11·5 | 数列的极限概念 | 35 |
| § 11·6 | 函数的极限概念 | 39 |
| § 11·7 | 函数的左极限与右极限 | 44 |
| 第三节 极限的运算与无穷小的比 | | 47 |
| § 11·8 | 极限的四则运算 | 47 |
| § 11·9 | 极限存在的准则 | 49 |
| § 11·10 | 两个重要的极限 | 50 |
| § 11·11 | 复利律(或生长律) | 52 |
| § 11·12 | 双曲函数及其图形 | 54 |
| § 11·13 | 无穷小量的比, 同阶与高阶 | 57 |
| § 11·14 | 相当无穷小与无穷小的主部 | 59 |
| 第四节 函数的连续性 | | 62 |
| § 11·15 | 函数的连续概念 | 62 |
| § 11·16 | 函数的间断点 | 65 |
| § 11·17 | 连续函数的运算与初等函数的连续性 | 70 |
| § 11·18 | 连续函数在闭区间的特性 | 72 |
| § 11·19 | 均匀连续的概念与定理 | 74 |
| § 11·20 | 连续函数的反函数 | 76 |

第二編 一元函数微分学

第十二章 导数及其应用

| | | |
|--|-----------------|----|
| 第一节 导数的定义与Δ求法 | | 81 |
| § 12·1 | 函数的变化率问题与导数定义 | 81 |
| § 12·2 | 导数的几何意义及其应用 | 85 |
| § 12·3 | 导数在物理、化学方面的意义 | 87 |
| § 12·4 | 导数的 Δ 求法 | 89 |
| § 12·5 | 函数的可导性与连续性 | 90 |
| 第二节 代数式的微分法 | | 93 |
| § 12·6 | 引言 | 93 |
| § 12·7 | 导数公式第一表 | 93 |

| | | |
|-----------------------|-------------------|-----|
| § 12·8 | 常量与变量的微分法 (公式1及2) | 94 |
| § 12·9 | 和的微分法 (公式3) | 94 |
| § 12·10 | 积的微分法 (公式4) | 95 |
| § 12·11 | 商的微分法 (公式5) | 96 |
| § 12·12 | 复合函数微分法 (公式6) | 97 |
| § 12·13 | 幂函数微分法 (公式7) | 98 |
| § 12·14 | 举 例 | 98 |
| § 12·15 | 隐函数微分法 | 100 |
| 第 三 节 导数的应用 | | 101 |
| § 12·16 | 函数在一点的增减性 | 101 |
| § 12·17 | 函数的极值及其求法 | 102 |
| 第 四 节 超越函数微分法 | | 109 |
| § 12·18 | 导数公式第二表 | 109 |
| § 12·19 | 对数函数微分法 (公式8) | 110 |
| § 12·20 | 幂函数的导数公式的证明 | 113 |
| § 12·21 | 指数函数微分法 (公式9) | 114 |
| § 12·22 | 三角函数微分法 (公式10) | 115 |
| § 12·23 | 反三角函数微分法 (公式11) | 117 |
| § 12·24 | 反函数微分法 | 120 |
| 第 五 节 高阶导数及其应用 | | 123 |
| § 12·25 | 高阶导数的定义 | 123 |
| § 12·26 | 求高阶导数的法则 | 125 |
| § 12·27 | 曲线的回向 | 127 |
| § 12·28 | 极值的第二求法 | 128 |
| § 12·29 | 拐 点 | 129 |

第十三章 微分及其应用

| | | |
|------------------------|---------------|-----|
| 第 一 节 微分的定义与计算法 | | 132 |
| § 13·1 | 微分的定义 | 132 |
| § 13·2 | 微分与导数的关系 | 134 |
| § 13·3 | 微分的几何解释 | 137 |
| § 13·4 | 微分形式的不变性 | 138 |
| § 13·5 | 增量的近似值与函数的近似值 | 140 |

| | |
|-------------------------|-----|
| § 13·6 高阶微分与导数記号 | 142 |
| 第二节 微分的几何应用 | 144 |
| § 13·7 弧的微分, 切线的方向餘弦 | 144 |
| § 13·8 极方程的曲线 | 145 |
| § 13·9 参量方程的曲线 | 147 |
| § 13·10 曲率的定义 | 149 |
| § 13·11 計算曲率的公式 | 151 |
| § 13·12 圓的曲率 | 153 |
| § 13·13 曲率圓, 曲率半徑, 曲率中心 | 154 |
| § 13·14 法包线 | 156 |
| § 13·15 法包线与切展线的关系 | 159 |

第十四章 中值定理及其应用

| | |
|-------------------------|-----|
| 第一节 中值定理 | 162 |
| § 14·1 洛勒定理 | 162 |
| § 14·2 拉格郎日定理 | 164 |
| § 14·3 函数在区間上的性态 | 166 |
| § 14·4 拉格郎日公式在近似計算上的应用 | 168 |
| § 14·5 歐西定理 | 169 |
| § 14·6 未定式的定值法則 (罗彼塔法則) | 171 |
| § 14·7 台劳公式 | 178 |
| § 14·8 函数值的近似式 | 184 |
| 第二节 函数作图 | 186 |
| § 14·9 函数性态的研究 | 186 |
| § 14·10 无穷远支的漸近线 | 189 |
| § 14·11 作图的程序及举例 | 196 |
| 第三节 方程的近似解 | 201 |
| § 14·12 引言 | 201 |
| § 14·13 隔根法, 重根的充要条件 | 202 |
| § 14·14 近似解的弦位法与切线法 | 204 |
| § 14·15 举例 | 208 |
| 录 附 | 213 |

第二卷 数学分析初步

数学分析所研究的主要对象为函数，而所用的基本方法为极限法。极限与函数虽在中学已经讲过一些，但是，没有用极限方法来研究函数。现在要学习数学分析，这好像学了代数与几何，还要学习解析几何一样。一种科学，因为改变了研究的方法，就得到很大的进步与发展，这不仅在数学中是如此，就在其他科学中也是如此，这是值得我们注意的。

本书第二卷，分为四编：（一）数学分析的基础知识；（二）一元函数微分学；（三）一元函数积分学；（四）微分方程。

第一编 基础知识

第十章 函数

函数是数学分析的研究对象，现在要学习数学分析，就非有足够的函数知识不可，只靠中学那些知识是不能满足现在要求的，因此，我们要把它再详细地、深入地讲一讲。本章分为两节：（一）函数概念及其表示法；（二）基本初等函数。

第一节 函数概念及其表示法

§10.1 函数的定义

函数是反映客观世界中，量与量之间的变化关系。我们祖先对于这种变化关系的认识是很早的。远在公元前300年左右，我国

哲学家庄周在他所著的庄子^①中就說：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”用现代数学的语言来解释，就是：如果一尺长的杖被截取后所余的量为 y ，那么， y 的值在第一天是 $\frac{1}{2}$ ，第二天是 $\frac{1}{2^2}$ ，第三天是 $\frac{1}{2^3}$ ，第 n 天是 $\frac{1}{2^n}$ ；于是 y 是 n 的函数。

到了公元600年，我国数学家刘徽因为要求出开皇二十年（公元600年）的皇极历^②，曾提出求两个已知函数值的中間值的方法。他虽然没有提出函数这个名詞，但他对于函数概念已經有了深入的認識。函数这个名詞是1694年由德国数学家莱伯尼支提出的，但是他并没有給这个名詞下过定义，因为他对于函数的概念还不是十分明确的。瑞士数学家班奴里于1698年7月5日写信給莱氏，首先提出函数概念的定义：“一个解析式子的值，如果随所含字母的值而变，这个解析式子，就叫做这个字母的函数”。

例如，对 $\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ ，这个式子來說，当 t 每取一值时，它就有一值与 t 所取的值对应，所以它是 t 的函数。后来，俄国彼得堡科学院院士欧拉又提出第二个定义：在 x, y 平面上任意画一曲綫，这个曲綫上一点的坐标 x, y 的关系，就是函数。这个定义要比班奴里的定义来得广泛，因为它不仅允許用解析式子表示函数，也允許用图形表示函数。

在19世紀以前，数学、物理、或理論力学上所用的函数定义，都是上面所說的两个定义。但是，19世紀以后，由于自然科学与技术科学不断的发展，数学家就逐漸觉得原来的函数定义太

① 庄周約为公元前300年前后的人，著書52篇，名叫庄子。現存33篇，其中的天下篇載有惠施的話：“一尺之棰，……”但惠施并无其人（見范文瀾著中国通史簡編，修訂本，203頁，人民出版社，1953年）。因此，所謂惠施的話應該是庄子的話。

② 見李儼著中国古代数学史料，77~79頁，中国科学圖書仪器公司，1954年。

狹隘而不能和科技的发展相适应，因此俄国数学家罗巴切夫斯基首先把函数概念加以大大地扩充。现在的函数概念虽然还在不断的发展中，但是下面的定义，仍旧是最基本的定义。

函数的定义^① 如果有变量^② x, y ，当 x 每取一值时， y 就依一定的规律也有一值或多值与 x 的每一值对应，我们就说 y 是 x 的函数。

函数 y 也叫做因变量， x 叫做自变量。这种规律，叫做对应律。

单值函数与多值函数 如果函数 y 只有一值与 x 的每一值对应，我们就说 y 是单值函数；如果有两个，或两个以上的值与 x 的每一值对应，我们就说 y 是多值函数。

例如， $y = ax^2 + bx + c$ 是单值函数， $y^2 = 2px$ 是多值函数， $y = \arcsin x$ 也是多值函数。

一元函数与多元函数 上面的函数定义，仅指一个自变量而论，但是在自然界中，常有两个以上的自变量的函数。例如矩形的面积 $z = xy$ 就是两个自变量 x, y 的函数；又如长方体的体积 $u = xyz$ 就是三个自变量的函数；又如牛顿的万有引力定律 $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ，其中 F 就是 m_1, m_2 及 r 的函数。

只有一个自变量的函数，叫做一元函数；有两个自变量的函数，叫做二元函数；依此类推，可以有 n 元函数。二元，三元，以及 n 元的函数，叫做多元函数。

^① 这样的函数定义也叫做 Dirichlet 的函数定义，Dirichlet (1805 ~ 1859) 是德国数学家，他提出函数的定义要比罗巴切夫斯基稍晚几年。罗巴切夫斯基在 1834 年就给出了函数的一般概念(参考 H. II. 罗巴切夫斯基全集，卷五，43 页，苏联国家技术图书出版社；或 B. И. 尚恰罗夫著，何旭初，唐述钊译苏俄教育科学院初等数学全書，函数和极限，第一册，2 页，商务印书馆，1955 年)

^② 变量概念已在高中代数中讲过，它的定义可参看本书卷一绪论。

我們把常量看做函数，这也是符合函数定义的。因为任意一个常量 k ，或 $y=k$ ，当 x 每取一值时， y 恒以 k 为对应值，所以 $y=k$ 是 x 的函数。

§ 10.2 函数的記号

在自然界中，量与量的函数关系，有些是简单的，也有些是复杂的。例如物体在真空中落下的公式写不到半行就可以写完，而月球运动的公式写了六七十頁还写不完。欧拉为了避免复杂的書写而便于作抽象的理論研究起見，首先用記号： $f(x)$ 代表 x 的函数。 $f(x)$ ，可讀为“ f 含 x ”。

法国数学家拉格郎日于1797年出版解析函数論时，除用欧拉的記号外，又用 $F(x)$ ， $\varphi(x)$ ， $\psi(x)$ ，等代表 x 的函数。現在，也用 $y(x)$ ， $z(x)$ 代表 x 的函数。括弧內的 x 是自变量，括弧外的字母 f ， F ，……等等只代表函数的对应律，而不代表变量。如果两个函数的对应律不相同，那末括弧外的字母也不相同。例如：研究圓的性質时，我們知道圓的面积与圓周都是半徑 x 的函数，但是对应律不相同，因此就要用两个不同的字母写为：

$$f(x) = \pi x^2$$

$$\varphi(x) = 2\pi x$$

如果对应律相同而自变量不相同，那么，括弧外的字母不变更而括弧內的字母要变更，例如：

$$\text{若 } f(x) = x^3 - 5x + 3$$

$$\text{則 } f(t) = t^3 - 5t + 3$$

由这个例子，可知函数的对应律如果确定，这个函数也确定，而对对应律与代表自变量的字母无关。我們只須根据对应律，就可以由自变量所取的值計算出函数的对应值。例如：以 $x=2$ 与 $t=2$

代入上面两个等式，所得的函数值都是：

$$f(2) = 2^3 - 5 \times 2 + 3 = 1$$

但 $f(2)$ 不是 2 的函数，而是自变量等于 2 时，函数 $f(x)$ 或 $f(t)$ 的对应值，或函数值。 $f(x)$ 也常用一个字母来代表它，写为：

$$y = f(x)$$

依此类推，多元函数的记号为：

$$f(x, y), F(x, y, z), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{或 } z = f(x, y), u = F(x, y, z), u = \varphi(x_1, \dots, x_n)。$$

欧拉用 $f(x)$ 代表函数时，原来只代表一个解析式子，但是，自从函数的概念扩充以后，它的代表性也跟着扩充，它不仅代表一个解析式子，同时也代表函数定义所讲的函数概念。

§ 10.3 函数表示法。函数的图形

表达函数概念的方法很多，最常用的有三种：解析法，图示法，列表法。

(一) 解析法 就是用解析式子表达函数对应律的方法，也就是班奴里所定义的函数。上面所举的物体落下的路程是时间的函数，以及万有引力的定律都是这种表示法的例子。用解析法表示函数最适宜于理论的研究，所以，它是函数表示法中最重要的方法。

(二) 图示法 就是用图形表示函数对应律的方法，也就是欧拉所定义的函数。用图形表示函数，这在科学上是常用的，例如用“自记温度计”画出图形来表示温度与时间的函数关系；又如用“自记气压计”画出图形来表示大气压力与时间的函数关系；以及统计学的统计图等，都是用图形表示函数的方法。信重与邮资的函数关系，可用图10·3来表示。当信重20克时，函数的

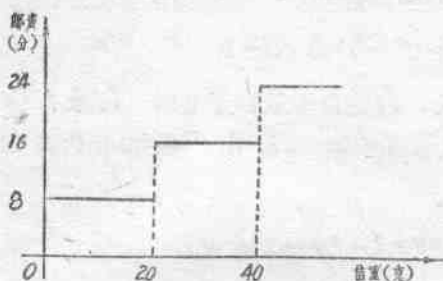


图 10.3

值不能确定，即邮资可以是8分，也可以是16分。凡函数，其值不定时，可以根据具体情况，或某种原则来决定。譬如信重20克时，就根据邮政章程，它的邮资应该是8分。读者对于这一点应当加以注

意，因为以后研究函数的值时，还会遇到函数值不定的情形。

(三) 列表法 就是用表格表示函数对应律的方法，也就是把自变量所取的值与函数的对应值列成一表，来表示函数的一种方法。例如三角函数表，对数表，立方表，平方表等都是用表格表示函数的方法。这种表格叫做函数表。函数的列表法，在自然科学与技术科学上特别用的多。因为由实验或观察所得的函数值，在研究的初级阶段，每每不能用解析式子来表示，而只能用表格来表示。

例如研究水的体积与温度的函数关系时，就用表格表示如下：

| | | | | | | | | |
|--------------------------|-----|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 温度 (百度表) | 0° | 2° | 4° | 6° | 8° | 10° | 12° | 14° |
| 体积 (公分 ³) | 100 | 99.996 | 99.987 | 99.990 | 99.998 | 100.012 | 100.032 | 100.057 |

以上三种表示法都各有优点与缺点。譬如解析法，它所表示的形式，比较简单而全面，研究起来也比较方便；但是，它不能把量与量之间的变化过程很显明地表示出来，使人一目了然；并且每一函数值都要临时计算，不能立刻得到结果。至于图示法虽然能把量与量之间的变化过程很显明地表示出来，但是，由于画图的技巧关系，每每缺乏精确性。列表法虽然可以从表上很快地查出函数的值，但不能查出函数的任意值。所以每一表示法，都

各有优缺点。因此，在数学分析教程中，研究函数 $f(x)$ 的变化过程时，为了使它明显起见，总把它的图形画出来。所谓函数 $f(x)$ 的图形，就是在直角坐标系中的点 (x, y) 满足这个方程

$$y = f(x)$$

的轨迹。

函数的图形的概念，把函数与几何图形统一起来，这不仅使研究函数的人，对于函数的变化状态可以从图形上一目了然，也使研究几何的人，可用数学分析的方法来研究几何图形。这比过去用代数方法研究图形（解析几何）又大大地提高了一步（只要学到微分学与积分学，就知道这种提高在实用上有很大的价值）。

§ 10.4 函数的定义域 数列

当自变量 x 在数轴上取一点 a 时，函数 y 如果有一值或多值与 a 对应，我们就说函数 y 在 a 点有定义。使函数有定义的一切点的全体，叫做函数的定义域。

对应律与定义域是函数概念的两个要素。在函数定义中虽然没有限定自变量在数轴上要取那些值，但是，论到每一个具体的函数时，就需要指出函数的定义域。譬如这两个函数：

$$V = \frac{k}{P}, \quad y = \frac{k}{x}$$

在形式上是一样的，但在实质上，前一函数是反映气体体积 V 与压强 P 的依从变化关系，因此，函数 V 的定义域是 $P > 0$ ，即开区间^① $(0, \infty)$ 。而后一函数，并没有具体的物理意义，它只是一个解析式子，因此，就它的表达式而论，它的定义域是两个开区间 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, \infty)$ 。又如：

例 1 由下面方程所确定的函数，它的图形是椭圆。如果把 y 看作是 x 的函数，它的定义域是 $[-a, a]$ ，即在椭圆的长轴

① 区间的定义见第一章。

上; 如果把 x 看作是 y 的函数, 那末, 它的定义域在椭圆的短轴上 $[-b, b]$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

例 2 函数 $y = \sqrt{(x-2)(x-3)(x-4)}$ 的定义域, 从下表知道它是 $[2, 3]$ 及 $[4, \infty)$ 。

| x | $-\infty \dots 2 \dots 3 \dots 4 \dots \infty$ |
|---------|--|
| $a=x-2$ | - 0 + + + |
| $b=x-3$ | - - 0 + + |
| $c=x-4$ | - - - 0 + |
| abc | - + - + |

例 3 設有一函数 $f(x)$,

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

当 $x < -1$ 时, $f(x) = -(x+1)$

当 $x > 1$ 时, $f(x) = x-1$

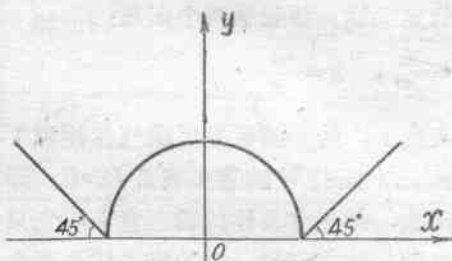


图 10·4-1

这个函数的定义域是全数轴, 即 $(-\infty, \infty)$ 。

它的图形如图 10·4-1。

例 4 函数 $y = |x|$

的定义域也是全数轴。

它的图形如图 10·4-2。

在数学分析中, 通常所研究的函数, 它的

定义域总是下列两种类型之一:

(一) 以全数轴, 或数轴上的一个或几个区间为定义域。例如上面所举出的函数就是属于这种类型。

(二) 以数轴上的正整数点为定义域, 即以自然数列: 1, 2,

3, …… 等为定义域。譬如:

例5 庄子所说“一尺之捶，日取其半，万世不竭。”的话，1) 如果令日数为 n ，杖的剩余部分为 $f(n)$ ，即得

$$f(n) = \frac{1}{2^n}; \quad (1)$$

2) 如果令所取得的杖长为 $\varphi(n)$ ，即得

$$\varphi(n) = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (2)$$

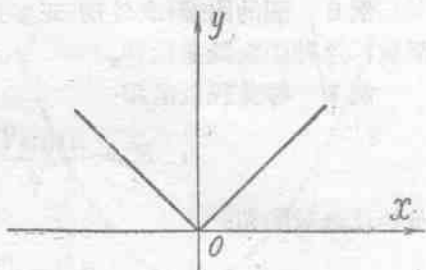


图 10.4-2

(1), (2) 两函数的定义域都是自然数 $1, 2, 3, \dots$ 。

这种函数有一个特性：不仅它的定义域能写成一个数列，并且函数值也能写成一个数列。譬如 (1) 式的函数值就是这个数列^①：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$$

而 (2) 式的函数值是这个数列：

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, 1 - \frac{1}{2^n}, \dots。$$

但是，第一类型的函数就没有这种特性。我们为了表达这种函数的特性起见就作出以下的规定：

以自然数列为定义域的函数，叫做**数列**。记为：

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots。$$

其中 u_n 叫做**数列的公项**，公项就是以自然数列为定义域的函数。即 $u_n = f(n)$ ，因此，以自然数列为定义域的函数记号，也写

① (1) 式是这个数列的公项。

为: u_n 。

例6 圆的内接(或外切)正多边形的面积是多边形的边数的函数, 这种函数就是数列。

例7 等差级数的和:

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2};$$

与等比级数的和:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q};$$

都是项数 n 的函数, 这种函数也是数列。

在日常生活中所遇到的数列是很多的, 例如木椿入地的深度是捶击次数的函数, 某省或某国人口是年或月的函数都是数列。

§ 10.5 函数的增量与增减性

我们研究任何变量时, 首先要观察它由一值变到另一值所增加的量是多少, 这种所增加的量, 叫做变量的增量。增量是数学分析中一个重要概念, 我们研究函数时, 常常要用到它, 它的定义如下:

定义 当自变量 x 由一值 x_1 变为另一值 x_2 时, 我们把 x_1 叫做 x 的旧值; x_2 叫做 x 的新值; 新旧值的差 $x_2 - x_1$, 叫做 x 的增量。函数 $y = f(x)$ 与 x 对应的新旧值的差

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1),$$

叫做函数 y 的增量。

在高等数学中, 变量的增量常记为

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1.$$

这就是 $x_2 = x_1 + \Delta x, \quad y_2 = y_1 + \Delta y$

增量的记号 Δx , 并不是 Δ 与 x 相乘, 而是代表增量的整个