

學何幾味趣

蘇聯青年科學叢書

學 何 幾 味 趣



開 明 書 店

趣味幾何學(上冊)

(ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ)

(ЧАСТЬ ПЕРВАЯ)

每冊定價 7,400 元

32 開本 184 定價頁

著者	蘇聯 別萊利曼 (Я. И. Перельман)
編者	蘇聯 科爾捷姆斯基 (Б. А. Кордемский)
譯者	符其珣
原著版本	蘇聯國家技術理論書籍出版局 1950
出版者	開明書店 (北京西總布胡同甲50號)
印刷者	青年印刷廠
發行者	中國圖書發行公司

一九五一年十一月第一版 分類5書號 0448(利)

一九五三年二月第二次印刷 8,001—18,000 ★

編者序言

‘趣味幾何學’不但是爲了那些對於數學上許多動人的方面覺得神祕的讀者而寫，也一樣是爲了那些愛好數學的人寫的。

這本書大半還是寫給那樣的讀者看的：他們只在學校裏學過（或者現在正在學）幾何學，卻不去注意在我們周圍世界裏各種事物的習見的幾何關係，不會把學到的幾何學知識應用到實際方面去，不知道在生活中間遇到困難的時候，在行軍的時候，在露營或者在前線的時候，應用學到的幾何學知識。

引起讀者對於幾何學的興趣，或者照本書著者的說法，‘引起研究幾何學的願望，養成研究幾何學的嗜好，是本書的主要任務。’

爲了這個目的，著者把幾何學‘從學校教室的圍牆中引到自由的空間，到樹林裏，到原野上，到河邊，到路上，以便在遼闊的天空下面，不用教科書和函數表，無拘無束的來做幾何作業’，把讀者的注意力吸引到托爾斯泰、柴霍夫、維恩（法國著名的科學小說作家——譯註）和馬克吐溫的篇頁上去，從果戈里和普希金的著作裏找出幾何問題的材料，並且，還向讀者提出‘形形色色的練習題目，內容是很有趣味的，結果是出人意外的。’

‘趣味幾何學’第七版不是經過著者自己修訂的。別萊利曼已在1942年列寧格勒被圍的時候逝世了。

這一個新版本保存上前一版的幾乎全部的章節，新配了

插圖，經過校訂，並且補充了一些有關蘇聯實際情況的事實和報道，還增加了不多幾節（大約是 30 節）。

爲了想使別萊利曼的著作發揮更大的作用，我把它改得更切合實際，更有趣味，來吸引新的讀者加入到愛好數學的人的隊伍裏來。

我這個工作究竟做得怎麼樣，希望讀者指教。

Б. 科爾捷姆斯基

目 次

上編 在自由空間的幾何學

第一章 樹林裏的幾何學..... 3

陰影的長度 還有兩個方法 ‘神祕寶島’裏的測高法 一位軍曹的測高法 利用袖珍日記冊的測高法 不和大樹接近的測高法 森林工作者的測高儀 鏡子測高法 兩棵松樹 大樹樹幹的形狀 萬能公式 種在地上的樹的體積與重量 樹葉的幾何學 六腳力士

第二章 河邊幾何學.....37

怎樣測量河面闊度？ 帽簷測距法 小島的長度 對岸上的行人 最簡單的測遠儀 河流的能量 水流的速度 河中水的流量 水渦輪 彩虹膜 水面上的圓圈 幻想中的榴霰彈 船頭浪 砲彈的速度 水池的深度 河中的星空 在什麼地方架橋？ 要架兩座橋梁

第三章 開闊原野上的幾何學.....75

月亮能見部分的大小 視角 盤子和月亮 月亮和銅幣 驚人的攝影術 活的測角儀 耶闊夫測角儀 釘耙測角儀 砲兵射擊的角度 視覺的靈敏度 視力的極限 地平線上的月亮和星辰 月亮影子的長度 雲層離地面多高？ 從照片上計算塔高 給你去做練習

第四章 路上的幾何學..... 110

步測距離的本領 目測法 坡度 一堆碎石 ‘驕傲的土丘’ 公路轉彎的地方 彎路半徑 談談海底 世界上有‘水山’嗎？

第五章 不用公式和函數表的行軍三角學..... 130

正弦的計算 怎樣開平方根？ 從正弦求角度 太陽的高度 小島的距離 湖的闊度 三角形地區 不作任何度量的測角法

第六章 天地在哪兒碰頭？.....145

地平線 地平線上的輪船 地平線的遠近 果戈里的塔 普希金的土丘 鐵軌在什麼地方碰頭？ 燈塔的題目 閃電 帆船 月球上的‘地平線’ 在月球的箕形山上 在木星上 給你做練習

第七章 魯濱孫的幾何學(‘魯濱孫飄流記’的一段)..... 162

星空幾何學 ‘神祕寶島’的緯度 地理經度的測量

上 編

在自由空間的幾何學

大自然以數學的語言講話——
這個語言的字母是：圓，三角形
以及其他各種數學形體。

——伽里略——

上 卷

五言古詩 空山獨坐

—— 詩集卷之三 五言古詩 ——
—— 詩集卷之三 五言古詩 ——
—— 詩集卷之三 五言古詩 ——

—— 詩集卷之三 ——

第一章

樹林裏的幾何學

陰影的長度

一直到今天，我還記得小時候一件使我驚愕的事情：一位禿頂的看林人，站在一棵大樹旁邊，打算測量一棵大樹的高度。他從懷中取出一具袖珍型的小型儀器——一塊四方形的木板——向樹梢上瞄了一下。這時我以為這個老頭兒馬上就要拿皮尺走去量度了，豈知他並沒有這樣做：他把那具小巧的測量儀器放回口袋裏，向大家說測量已經完畢了；可是我還以為沒有開始測量呢！……

我那時還很年青，這種既不要把大樹砍倒，也不用爬到它的頂端去測量高度的方法，對於我簡直像一件魔術那麼神奇。一直到後來我學到了初等幾何學以後，纔知道表演這種魔術竟是這麼簡單。

像這樣簡單的測量方法，有許多不同的種類，而且它們都可以使用最簡單的自製儀器（或者甚至根本不需任何用具）來做。

其中最簡單而最古老的一個方法，無疑是紀元前六世紀時希臘怪傑法列士用來測定埃及金字塔高度的那個方法，他的方法是利用金字塔的陰影的。測量的時候，在金字塔腳聚集了許多祭司，法老（國王）也親自駕臨了，他們都很關心地望

着這位想從陰影的長度確定金字塔高度的北方來客。根據歷史上的傳說，法列士選擇了當他自己的影子長度恰好與他身長相等的時候來從事測量，因為在這個時候，金字塔的高度必然等於它的陰影長度。^{*} 這或許是人利用他自己影子的唯一可能了。

這位古希臘聖人的難題，對於生在今天的我們，真是像孩子們的算題一樣容易解答，但是我們卻不應該忘記，我們現在是從法列士以後許多人所建立起來的幾何學的基礎上看這問題；我們都知道，兩千年來一直被人們在學習運用着的一部幾何學的書，它的作者歐幾里得還是在他——法列士——之後許久纔誕生的，因此，那本書裏所寫的一切定理，雖然在今天每一個初中學生都很熟知，但在法列士時代，卻還未被發現；而且，爲了利用陰影來測知金字塔的高度，卻必須要知道三角形在幾何學上的一些特性——特別是要知道下面的兩個特性（其中的一個是法列士自己發現的）：

1. 等腰三角形中，與底邊相交的兩角彼此相等；反過來說，三角形內相等兩角的對邊，必然相等。

2. 所有三角形（包括直角三角形在內），它的三個角的總和必然等於兩個直角，即等於 180° 。

只有在知道了這兩點之後，法列士纔能正確的斷定，當他的影子等於他的身長時，日光是以半個直角（ 45° ）的角度射向水平的地面，因此纔可以斷定，金字塔的頂點、塔底的中心點和塔影的端點三者，恰好形成一個等腰三角形。

在天氣晴朗的時候，用這個方法測量‘孤立大樹’的高度，

^{*} 當然，陰影的長度要從金字塔底的中心點起計算；至於塔底的長，法列士是可以很便當地直接量度出來的。

是很便利的；我說只對‘孤立大樹’便利，因為，如果有其他大樹或建築物在近旁的話，往往就不可能在地面上量出陰影的全長來。

但是在蘇聯境內，卻不像在埃及那麼容易選擇到適宜的時間。這是因為在蘇聯境內，太陽升起得較低，以致人體的陰影只能在夏季午飯前後的短暫時間中等於人體的高度。因此，法列士所採用的方法，並不一定能夠適用於任何地方和任何時間。

可是，我們不難把方纔那個方法略為變更，使它可以在有太陽的時候利用任何長度的陰影來從事我們的測量工作。我們只要把要測量的大樹的陰影長度量下來，然後把自己身體（或一段木桿）的高度和陰影的長度量出，就可以利用下列比例式算出要測量的大樹的高度了（圖1）。

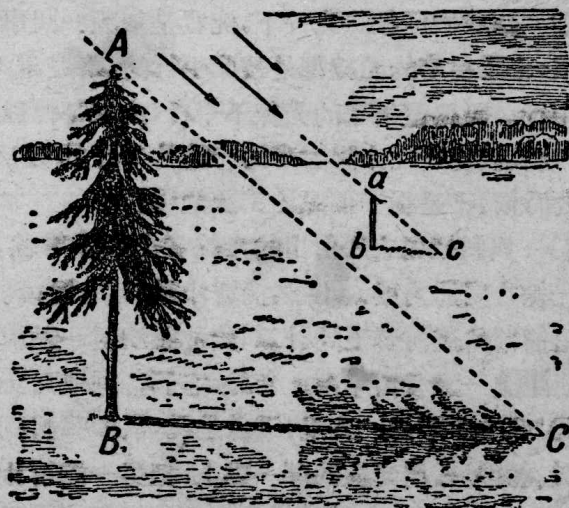


圖1. 利用陰影測量樹的高度

$$AB : ab = BC : bc$$

換句話說，就是：大樹比你身體（或木桿）的倍數，恰和樹影比你身體（或木桿）陰影的倍數相等。這個比例，自然是從幾何學中兩個三角形（ ABC 與 abc ）的相似關係得出來的，因為已知它們有兩角相等，所以我們斷定這兩個三角形相似。

也許有些讀者會提出抗議，認為像這麼簡單的東西，根本用不到拿幾何學來引證：難道沒有幾何學的話，我們就不知道樹高多少倍，它的陰影也就長多少倍嗎？可是，事情卻不像你所想像的那麼簡單。你不妨試把這個規則引用到由街頭路燈光投下的陰影上，就可以明白了：從圖 2 中，你可以看到，木柱 AB 的高度是木樵 ab 的三倍，但是木柱的陰影卻相當於木樵陰影（ $BC : bc$ ）的八倍。在一種情形下，這個方法可以行得通，在另一種情形下就行不通。你想解釋這個道理嗎？那就非請教幾何學不可了。

〔題〕 讓我們仔細研究一下，究竟是怎麼一回事。答案非常簡單：太陽射來的光線都是彼此平行的，路燈射來的呢，卻並不平行。說路燈射來的光線不平行，大家都可以同意，但是，為什麼我們能夠說太陽射來的光線是平行的呢？它們在射出來的時候，不是從一個點上出發的嗎？

〔解〕 我們把從太陽射出的光線看作平行射線，這是因為各條光線之間的角度太小了，簡直小得無法捉摸。我可以用一個最簡單的幾何學上的計算，給你證明這一點：我們不妨假定太陽上某一點發出了兩道光線，它們落到地面上的某兩點，這兩點間的距離為一公里；這就是說，假如我們把兩腳規的一端放在太陽發出光線的那一點上，把另一端用太陽到地球的距離（即 150,000,000 公里）為半徑畫一個圓的話，夾在兩

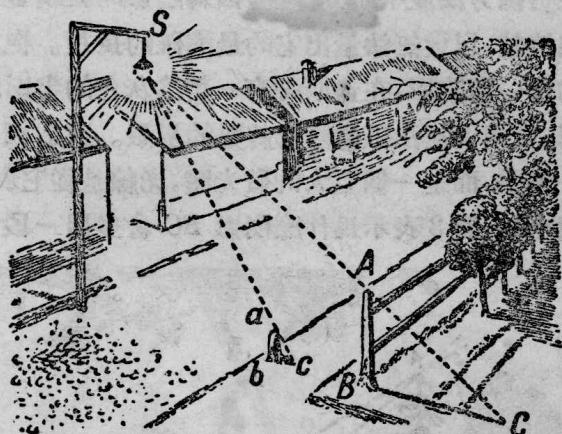


圖 2. 在什麼情形下這種測量方法不能適用？

條光線之間的弧的長度將為一公里，而整個圓周的長度將等於 $2\pi \times 150,000,000$ 公里 = 940,000,000 公里。那麼，在這個圓周上每一度的弧線長度將為圓周長的 360 分之一，也就是約等於 2,600,000 公里；每一分的弧線長度是每一度的 60 分之一，即約為 43,000 公里，而每一秒的弧線長度又是每一分的 60 分之一，即約 720 公里；但我們的弧線一共只有一公里長，因此，它所夾的角度應為 $\frac{1}{720}$ 秒。像這麼微小不足道的角度，就是用最精確的天文臺用的儀器，也無法測量得出，因此，我們很可以大膽地把由太陽射來的光線看做互相平行的射線。*

假如我們對上述幾何學方法的證明一無所知，那麼方纔所說的利用陰影測定高度的方法，就不能建立起來。

但是，假使你實地去試驗一下陰影測量法的話，你馬上就

* 從太陽射到地球直徑兩端點的光線卻不適用上項說明，這裏射線間的角度大得足夠使用儀器測量出來（約 $17''$ ），這個角度的確定，給了天文學家們又一個測定地球與日球間距離的方法。

可以發現這個方法並不十分可靠：因為陰影的盡頭並不是截然分得很清楚，以致無法量出它的最準確的長度。從太陽光投出來的每一個陰影，在盡頭都有一帶陰灰色的半影，正由於這個半影，就使人無法確定陰影終點的界限。這是因為太陽並不是一個點，而是一個巨大的發光體，光線是從它表面上許多點射出來的，圖 3 表示為什麼樹影 BC 會多出一段逐漸消

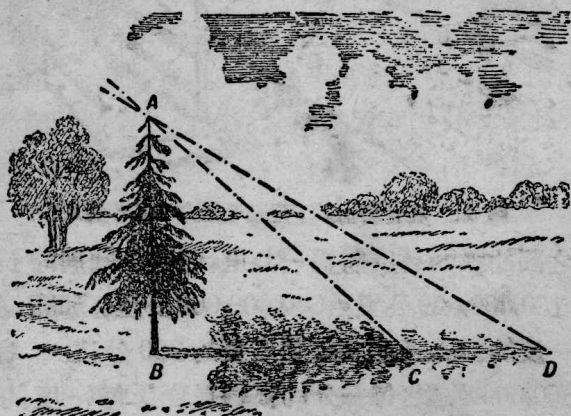


圖 3. 半影的形成

失的半影 CD 的原因。半影兩端 C 、 D 與樹梢 A 所形成的 CAD 角和我們所見太陽面所夾的視角相同，即等於半度（參閱第 78 頁第三章‘視角’一節），由於這個陰影量得不夠準確而產生的測量誤差，即使太陽位置並不過低時也可能達到百分之五或者更多，這個誤差再加上其他不可避免的誤差——例如由於地面不平所引起的誤差等——會把測量的結果弄成非常不可靠。譬如在丘陵地帶，這個方法就完全不能採用。

還有兩個方法

測量高度並不一定要利用陰影；測量的方法很多，我們先

拿最簡單的來開頭。

首先，我們可以利用等腰直角三角形的特性來從事高度的測量，這只要製造一具最簡單的小儀器就可以了。這個儀器所用的材料非常簡單：只需一塊木板或厚紙板和三枚大頭別針。做法：在木板的光滑一面上畫出一個等腰直角三角形，然後把三枚大頭別針釘牢在這三角形的三個頂點上（圖4）。

在製造的時候，假定你手頭沒有三角板或別的適當儀器，無法繪出正確的直角和繪出等長的兩個邊，那麼你可以把一張紙片對

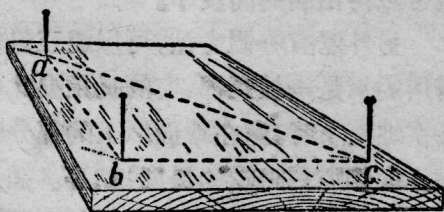


圖4. 測高用的三針儀

摺，然後沿着摺脊再橫摺一次，那麼就得到正確的直角了；這張紙片同時還可以代替兩腳規，來量出同樣長度的兩個邊。

你看，這個儀器可以完全不用任何工具和設備就製造成功了。

這儀器的使用方法，也不比它的製造來得困難。首先，把這個儀器拿在手中，使三角形的一條直角邊隨時保持鉛直狀態；

這事做起來非常便當，你只要在這直角邊上端的大頭針上垂下一條細線，下繫一塊重物，就可以找到正確的鉛直位置，隨時把儀器的位置校正。然後，你在要測量的大樹附近找出一個地點A（圖5），

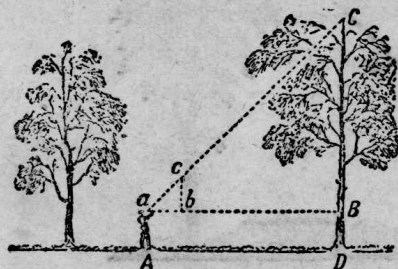


圖5. 三針儀使用法

使能在這個地方用眼睛通過大頭針 ac 望去時，大樹的頂端 C 恰好被這兩個大頭針所遮掩，就是說， ac 兩點的延長線恰好通過 C 點，那麼， aB 應當就和 CB 相等，因為 a 角 $= 45^\circ$ 。

因此，只要量出 aB （如果地面平坦，量出和它相等的 AD 就可以了）並把 BD 加進去（ BD 是你的眼睛和地面的距離），就可以得出樹的高度了。

另外還有一個方法，可以連三針儀的設備也不要。這裏需用的只是一枝長桿，它的長度要比你的身長略長，當你把它插在地面上時，露在地面以上的部分恰好和你的身長（應該說和你從腳踵到眼睛的長度）相等。插這枝桿子的地方，需要經過一番選擇：必須使你在仰面躺下腳跟緊抵桿底時，眼睛看到樹尖恰好和桿頂在同一直線上，如圖 6。那時候，由於三角形 Aba 是等腰三角形，又是直角三角形， A 角等於 45° ，因此 $AB = BC$ ，也就是說，樹的高度等於你的眼睛到樹根的距離。

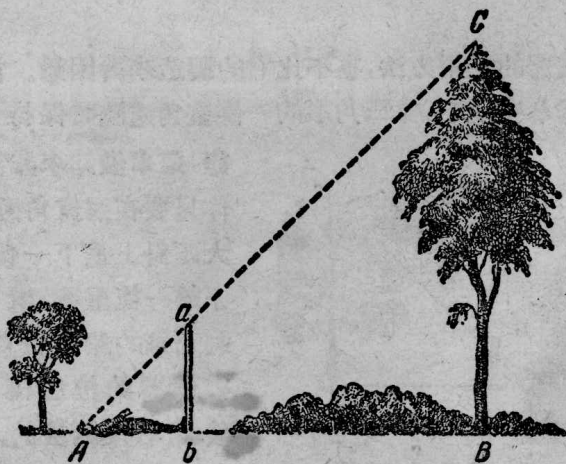


圖 6. 還有一個測量樹高的方法