

应用宏观经济学 研究方法

[意]法比奥·卡纳瓦 (Fabio Canova) 著
周 建 译

汉译经济学文库

Translated Economics Library

**METHODS FOR
APPLIED
MACROECONOMIC
RESEARCH**

 上海财经大学出版社

F015
90

汉译经济学文库

应用宏观经济 研究方法

[意] 法比奥·卡纳瓦 著
(Fabio Canova)
周 建 译

 上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用宏观经济研究方法/(意)卡纳瓦(Canova, F.)著;周建译.

—上海:上海财经大学出版社,2009.7

(汉译经济学文库)

书名原文: Methods for Applied Macroeconomic Research

ISBN 978-7-5642-0481-5/F·0481

I. 应… II. ①卡… ②周… III. 宏观经济学-研究方法

IV. F015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 055382 号

☐责任编辑 温 涌

☐封面设计 钱宇辰

YINGYONG HONGGUAN JINGJI YANJIU FANGFA 应用宏观经济研究方法

[意] 法比奥·卡纳瓦 著
(Fabio Canova)

周 建 译

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址: <http://www.sufep.com>

电子邮箱: webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海市印刷七厂印刷

上海远大印务发展有限公司装订

2009 年 7 月第 1 版 2009 年 7 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 26.25 印张(插页:2) 588 千字

印数:0 001—4 000 定价:55.00 元

图字:09-2008-486 号

Methods for Applied Macroeconomic Research

Fabio Canova

Copyright © 2007 by Princeton University Press.

All Rights Reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

Chinese (Simplified Characters only) Trade Paperback copyright © 2009 by Shanghai University of Finance & Economics Press.

2009 年中文版专有出版权属上海财经大学出版社

版权所有 翻版必究

译者序

Methods for Applied Macroeconomic Research 一书的中文翻译版《应用宏观经济研究方法》，经过一年多的艰苦努力工作终于问世了。该书系统全面地介绍了20世纪70年代以来在宏观经济学应用研究领域的各种主要分析方法和模型，内容丰富且体系庞大，具有显著的学术研究价值和应用价值。

原著自2007年出版以来，在学术界曾引起强烈的关注。20世纪70年代以来至今已近四十年，世界政治与经济形势及其格局发生了巨大的深刻变化，指导经济政策制订的宏观经济理论和方法也随之发生了显著的改变，特别是20世纪80年代以来，随着苏联解体、东南亚金融危机的蔓延、欧盟组织的一体化进程推进和最终形成、美国次贷危机所进一步演化的金融危机等众多重大事件的深远影响，世界各国政府不得不重新反思和审视它们曾经备受推崇和实施的各種经济政策的合理性和科学性。政府政策的制订自然离不开众多经济学家的聪明才智和卓越贡献，为了解决现实世界中眼花缭乱、错综复杂甚至是令人极其困惑乃至迷茫的经济难题，各种经济学派及其从事理论研究和实践政策分析的经济学家们也都陆续提出了层出不穷的相应“理论”和“观点”。然而，“理论”和“观点”虽多，但是真知灼见却寥寥无几；空谈容易，严格论证却十分困难，而伴随着各种形形色色“理论”和“观点”的重要支撑则是实证分析或者经验分析的检验和证明。因此，宏观经济研究的各种方法和手段也就成为在现代经济学理论研究和确认其理论正确性的过程中不可或缺的重要基石。

在经济学作为一种社会显学而被越来越多的人所认可的今天，其理论研究固然重要，但是作为理论检验的“试金石”——方法也绝不可少；特别是在伴随着现代计算机技术突飞猛进发展的当代，这点显得尤为重要，因为计算技术的发展和前进使我们各种先进和前沿方法的实现已变得不再是遥不可及。四十年前只能由经济学权威和大师们在实验室里进行应用的分析手段和方法，如今在被普通大众研究者所掌握的同时，再也不会因为计算技术等方面的障碍而成为一座不可逾越的大山。现代计算机的分析能力远非四十年前，甚至是十多年前、五年前可比拟，即使是相当繁琐和巨大的计算工作量，大多数也只需要在个人的笔记本电脑中就能够

轻而易举地完成。在作为各种宏观经济研究的计量分析方法的应用条件——计算技术日新月异的今天,如果对宏观经济学的各种现代和科学方法的研究跟不上时代发展的话,那么所谓的宏观经济学“理论”或“思想”研究自然也就暗淡无光,这是因为,经济学分析方法不仅是在相关理论指导下被动地进行实证分析和经验检验,而且方法似乎也更应该在检验各种“理论”的同时去发现新的“理论”。自然而然地,方法研究也就理所应当成为理论产生和创新的重要源泉之一,所以方法不仅可以检验“理论”,同时也可以发现和创造“理论”。如果没有方法对于经济学理论推动的能动作用,全世界就只能产生和充斥着所谓的各种空洞“理论”或“假说”及其“思想”而已。本书原著正是以现代宏观经济研究方法为主题内容的一部专著。

《应用宏观经济研究方法》之所以能够受到众多学者的关注,其原因自然有很多,但是在众多原因之中,最不可忽视的便是,本书有着与其他类似相关书籍不同的四大特色:

1. 本书内容全面。20世纪70年代应用于宏观经济学的最重要的分析方法在本书中都有所体现和涉猎,具体包括:动态随机一般均衡模型、向量自回归方法、广义矩估计法、广义模拟方法、校准法、动态宏观面板方法、贝叶斯结构向量自回归方法等。这些方法和模型无论是在一般的宏观经济学分析中,还是在专门的计量经济学研究中都占据着非常重要的位置,只不过它们在不同的研究体系中侧重点不同,有所差异而已。在计量经济学领域中,以上方法更多偏向于理论研究和方法本身的分析;而在宏观经济研究中,它们则更多偏向于实践应用。当然,无论什么体系,本书都从应用分析的角度把它们包含。

2. 本书内容前沿。本书涉及的所有方法都是20世纪70年代以来新近发展的领域,有的方法在现代宏观经济研究和计量经济学分析中都已高频率地被多次使用,例如,动态随机一般均衡模型、向量自回归方法、校准法等;但是,还有类似于动态宏观面板方法、贝叶斯结构向量自回归方法等众多学术前沿领域,虽然它们的理论研究也在进一步推进和发展之中,但是本书把它们作为非常重要的内容也都进行详细讲解。科学使用这些方法无疑将显著地提高我国现代宏观经济学的整体研究水平和能力,由此也能够为更加深入分析越来越复杂的经济问题提供新颖的研究手段和途径。因此,这些前沿方法内容的介绍为现代宏观经济学的研究注入了新鲜血液和活力。研究者们在使用这些分析方法的过程中,也容易产生新的灵感 and 研究成果。

3. 本书应用性强。在本书中,所有的方法都是以应用分析和政策研究为主,并不过重地去讨论方法本身及其性质问题,这对于做实证研究和经验分析的学者来讲,具有极其重要的现实意义。当然,方法本身更需要长时间地进行深入研究,只有这样,才可能使我们的应用分析有所依靠。方法的研究需要靠计量经济学家去推动,而应用者则更应关心如何将这些方法“用得”好、“用得”巧、“用得”妙”。随着自21世纪以来,我国经济学研究现代化的深入推进,大多数国内外经济学家都有一致共识——不懂分析方法的经济学研究范式会越来越多地受到各种限制,而采用科学的研究方法和规范的分析模式来研究经济问题已经成为主流趋势。以上共识已是无须争论的话题,因为在经济全球化的今天,各种经济问题错综复杂,相

互影响,如果没有科学的方法进行系统分析,很难想象仅靠一个人的思辨能力能够做出更加符合现实价值的前瞻性成果。本书所涉猎的方法都从应用角度出发,集中于讨论如何解决和研究现实经济问题,毫无疑问,这对于数理基础不强的研究者们来讲大有裨益,他们可以通过本书的应用举例和分析过程,将已有方法“移植”到自己所要研究的问题中去,为真正深入分析经济现象提供坚实的数理基础。当然,在“移植”过程中不能简单地照搬照用,而更应当注重科学合理性。

4. 本书案例分析新颖,富有深刻的经济理论指导和现实应用价值。本书中使用了大量的实际经济问题案例,详细充分地采用现代方法对其进行细致剖析,这些案例普遍基于世界各国的经济现实而提出,无论是从理论层次分析上,还是从应用政策研究上,均具有显著的学术意义和重要的研究价值。读者完全可以通过本书中的案例分析而受到较大的启发,甚至也可以直接选取这些重要的相关问题做进一步深入研究。因此,本书拓宽了已有经济学相关领域的研究范围,为进一步加强和提高现有经济学理论和应用研究水平,提供了更加广阔的分析思路和方法。

翻译本书的原著是一件极其艰苦的事情,好在有我的众多学生的大力支持和帮助。为了使本书能够高质量出版,我们曾经组成一个非常高效、善于合作和极其团结的研究团队。我们定时召开讨论和分析工作,从名词术语的翻译和解释、内容的科学理解、文字的润色和加工到排版格式的统一等,无一不渗透着我们集体工作的付出和所有人员的全部智慧。令我感到十分欣慰的是,我的这些学生不仅英语水平高、基础知识扎实,而且勤奋、敬业,我经常把他们聚在一起进行相关问题的分析和讨论,他们都能够提出自己深刻而独到的见解,这些都为本书保质保量的完成奠定了坚实的学术基础。我在引导学生进行讨论的过程中,对原著内容进行了相应分工,具体为:张译文、韩丹负责第1~3章,刘畅负责第4~5章,丁海琼负责第6~7章,龚玉婷负责第8~9章,顾柳柳负责第10~11章。在我和他们充分讨论的基础上,以上同学都将相应章节进行过初译,然后我将初译稿进行加工、润色以及审校,最终将它们合并成集系统性、学术性、应用性于一体的一本译著。

上海财经大学出版社温涌女士是本书的策划和责编,我翻译此书的初衷也是被她长期工作的高涨热情所打动。在合作过程中,我们曾对译著的修正和审校进行了多次探讨。在极其繁琐的校对细节中,她依然能够保持高度的认真和勤奋的敬业精神,令人感到钦佩,这也是本书得以较高质量完成的重要保障之一。在此,我要向温涌编辑表示感谢!

由于我们的水平和能力有限,难免对原著内容把握不准,也会在翻译过程中出现错误,在此恳请读者批评指正,以便再版时进行修正。

周 建

上海财经大学经济学院

2009年6月

序 言

在过去 20 年中,可用于进行宏观经济分析的数学、统计学、概率论和计算工具得到了长足的发展,这些最新扩展的工具已经逐渐改变了研究人员进行参数估计、验证理论或者简单识别数据正则性的方法。理性预期和校准革命也迫使学者们尝试在理论研究和实际应用之间搭建一座桥梁,而这座桥梁正是在 20 世纪七八十年代的研究及应用工作中所欠缺的。

本书力求将动态总体平衡理论、数据分析、高级计量分析和计算方法相结合,为广大学术、商业和中央银行经济学家们提供一系列全面的方法来解决在宏观经济和商业周期分析、经济增长,以及货币、金融和国际经济学中所产生的问题。本书主要讲述应用经济学家如何处理时间序列数据(有时是来自不同国家的面板数据),通过这些内容的讲解来帮助应用经济学家验证动态理论的预测结果,并且给予模型及理论研究人员建议来对当前的模型进行修正,以获得数据和模型间更好的匹配,以及从实践中获得政策性结论。本书阐述了一些可用于解决我们感兴趣的问题的一些技巧,并且评价它们的实用性以便给读者带来更多相关的信息;同时给出了本书所讲述的方法如何应用或者不可应用的实例,并指出在研究时间序列时使用微观经济数据的过程中所产生的问题。

不可避免地,这一复杂问题的现代解决方法需要定量的分析、坚实的动态理论背景以及经验和数量方法的建立。数量分析可以将理论应用于实践;经验方法可以在经济理论和实际数据之间建立有效的联系;数学技巧帮助我们解决动态随机一般均衡模型(DSGE)和进行高级计量经济估计,在古典理论和贝叶斯传统框架下都是如此。在一些情况下,经验方法是和我们所选定的数学方法紧密联系的;在另外一些情况下,它们仅仅是受经济理论施加于数据上的约束条件的制约而形成的。

鉴于此种背景条件,本书的结构与一般用于研究生阶段的宏观和计量经济学教材相比,有很大不同。本书从一族 DSGE 模型开始讲起,为决策准则提供一个近似的表达式,给出估计/选择它们参数的方法,提供检验它们对数据拟合性的途径以及做出政策性决策的步骤,而不是简单地列举一系列估计量以及它们对于不同数据生成序列的性质。本书前三章所涵盖的内容是基础知识,帮助我们回顾曾经

学过的并将在本书之后的章节中得到广泛应用的知识。具体来说,第1章给出了时间序列和概率论的基本概念以及大数定律和中心极限定理的内容,这些将在第4~8章中得到应用;同时,也给出了一些关于谱分析的基本内容,这将在第3章、第5章和第7章中得到广泛应用。第2章介绍了一些现在普遍应用的宏观经济模型,并讨论了一些求解它们的数学方法。本书的大部分例题和练习都是基于这些模型的简化或扩展形式而进行的。第3章讨论了如何获得长期和周期性数据中信息的步骤。

在其余的章节中,我们给出了对数据应用模型的方法,并且讨论如何应用它们来解决实际经济问题。从我们的经验来看,一些正式的结论往往不附加证明,而是主要关注它们在特定宏观经济问题中的应用上,这似乎更有现实意义。第4章讲述了向量自回归(VAR)方法,这里只应用了很少的经济理论来整合数据。第5章讲述了有限信息方法,例如,广义矩估计法(GMM)、模拟矩估计法(SMM)和广义模拟方法。第6章检验了完全信息最大似然法,第7章讨论了校准的技巧。在第8章,我们讨论了动态宏观面板方法,这一方法可以广泛地应用于对一些跨国问题的分析。在本书的最后,我们给出贝叶斯方法的广泛描述,以及它们在VAR模型、面板VAR模型、高级时间序列设定以及DSGE模型领域中的应用(第9~11章)。

本书所介绍的方法与汉密尔顿(Hamilton, 1994)或是林文夫(Hayashi, 2002)有很大的区别,他们都是基于计量分析而不是验证DSGE模型。同时,本书的重点也不同于以宏观经济分析为主的萨金特和利奎斯特(Sargent and Liungqvist, 2004),或是以计算方法见长的贾德(Judd, 1998);此外,在米兰达和法克勒(Miranda and Fackler, 2002)的著作中,经验方法起到了重要的作用,并且清楚地说明了理论、数学和经验工具之间的联系。

本书的绝大部分内容是自成体系的,但是也运用了现代宏观经济理论(例如,部分宏观经济学的博士生课程)、标准计量分析(例如,部分计量经济学的博士生课程)的基础知识以及部分编程技巧(例如,RATS、Matlab、Gauss)。本书计划授课时间为一年,建议按照如下顺序进行:从第一年第二学期讲授计量经济学或者应用宏观计量经济学课程开始,直到第二年第一学期的宏观计量经济学课程结束。大体上,本书前五章和第7章可以应用于上述第一部分,第6章及后四章可用于第二部分的学习。这是我多年以来教授这门课程的基本方法,也自然地将课程分成了基础和高级两个部分。

来自布朗大学、罗切斯特大学、庞培法布拉大学、那不勒斯大学、波尔图大学、南安普顿大学、伦敦商学院、博克尼大学、米兰—博可卡大学的博士生;来自巴塞罗那宏观经济学暑期班(BSSM)、欧洲经济学学会(EEA)宏观经济学暑期班、金融研究中心(CFS)宏观经济学暑期班、ZEI暑期班、Genzersee(瑞士)中央银行进修班的参与人员;来自欧洲中央银行、英格兰银行、意大利银行、加拿大银行、匈牙利银行、瑞典中央银行、德意志联邦银行、阿根廷银行、瑞士国家银行、欧盟委员会、欧盟商业周期网络(EABCN)各个短期集中培训的参与人员,也查阅了本书的几个版本,并利用一些实际例子按照本书中的准则进行讨论研究。有些人不是很理解其中的部分内容,有些人很欣然地接受了本书中的一些方法,有些人很挑剔,也有一些人

提供了一些有用的建议以此帮助修正本书中的一些准则,但是他们都给予了我们极大的鼓励,我在这里诚挚地感谢他们。在撰写和教授本书的过程中,我自己也学到了很多,就如我的学生学习讲义和进行实际研究一样。

有三个人教导我要用一种合理且严谨的方法去解决实际问题,将经济理论和高级统计学与数学工具相结合,并对研究问题的主要内容保持一种质疑的态度。克里斯托弗·西姆斯(Christopher Sims)和汤姆·萨金特(Tom Sargent)使我了解到,理论和计量经济学交叉的灰色区域是很难去研究的,但是非常有意思,他们的学术好奇心、严谨的直觉以及对经济学和政策的深刻理解是本书强大的后盾。安德里安·帕冈(Adrian Pagan)教授了我利用数据和模型能进行哪些分析。我一直很喜欢和他进行讨论,因为他的一些非传统的观点总是能引发我们对已经被遗忘的方法及其实际应用的思考。在大多数应用宏观经济学家所感兴趣的问题中,他总是有着很正确的见解。正是他们最基本的贡献促成了本书的成功出版;作为导师,他们是无与伦比的。在此,我同样要感谢爱德·普雷斯科特(Ed Prescott),正是他坚定地拒绝沿袭传统计量经济学方法的态度,才促使我去理解在理论、计量和统计技巧与数据之间建立坚实联系的必要性。我的一些同事,艾伯特·马塞特(Albert Marcet)、莫藤·拉文(Morten Ravn)、若尔迪·加利(Jordi Gali)、卢克雷齐娅·莱希林(Lucrezia Reichlin)、哈拉尔德·乌利希(Harald Uglig)、卡洛·法尔罗(Carlo Favero)、马尔科·马费佐利(Marco Maffezzoli)和卢卡·萨拉(Luca Sala)对本书中一些观点的形成和发展做出了杰出的贡献。我同样要感谢汤姆·多恩(Tom Doan)、克里斯·西姆斯(Chris Sims)、科尔·丹利斯(Kirdan Lees)和安德里安·帕冈,他们在本书早期的手稿中发现了一些错误和不准确的术语。我还要特别感谢马尔科·戴尔·内格罗(Marco del Negro),他耐心地梳理了本书的结构,并利用他的宝贵时间提供了大量有用并且深刻的建议。

编写一部教材是很艰难的,编写一部需要整合不同领域内容的高级教材更是一项艰巨的任务。有很多次我感到迷茫和厌倦,已经打算放弃它去做一些其他的事情,然而当我发现一个新的例子从而能够使本书的观点得以应用时,我就会重拾在早期编写本书时的那种兴奋感。我同样感谢我的家人在编写本书这么长时间以来的耐心和支持。动态宏观经济学中的一部分是关于不同时期间的替代关系。耐心可能是建立在相同的准则之上的。

目录

CONTENTS

译者序 / 1

序言 / 1

1 准备知识 / 1

- 1.1 随机过程 / 2
- 1.2 收敛的概念 / 2
- 1.3 时间序列概念 / 7
- 1.4 大数定理 / 12
- 1.5 中心极限定理 / 14
- 1.6 谱分析的元素 / 16

2 动态随机一般均衡模型的解答和模拟 / 23

- 2.1 一些有用的模型 / 23
- 2.2 近似方法 / 37

3 提取和测量周期性信息 / 58

- 3.1 统计分解 / 59
- 3.2 混合分解 / 69
- 3.3 经济分解 / 83
- 3.4 时间总体和周期 / 86
- 3.5 收集周期性信息 / 88

4 向量自回归模型 / 92

- 4.1 沃尔定理 / 93
- 4.2 模型设定 / 98
- 4.3 矩和 VAR(q)的参数估计 / 105
- 4.4 报告 VAR 结果 / 109
- 4.5 识别 / 118
- 4.6 相关问题 / 127
- 4.7 验证含有 VAR 的 DSGE 模型 / 134

5 GMM 和模拟估计量 / 138

- 5.1 广义矩估计和其他标准估计量 / 139
- 5.2 线性模型中的 IV 估计 / 142
- 5.3 GMM 估计:概述 / 147
- 5.4 DSGE 模型的 GMM 估计 / 160
- 5.5 模拟估计量 / 166

6 似然法 / 178

- 6.1 卡尔曼滤波 / 179
- 6.2 似然函数的预测误差分解 / 185
- 6.3 数字技巧 / 190
- 6.4 DSGE 模型的 ML 估计 / 192
- 6.5 两个例子 / 200

7 校准 / 206

- 7.1 定义 / 206
- 7.2 公认的部分 / 207
- 7.3 选择参数和随机过程 / 209
- 7.4 模型评价 / 215
- 7.5 测量的灵敏度 / 230
- 7.6 储蓄、投资和减税:一个例子 / 232

8 动态宏观面板 / 237

- 8.1 从经济理论到动态面板 / 238
- 8.2 同质性动态面板 / 239

- 8.3 动态异质性 / 251
- 8.4 是否需要混合数据? / 260
- 8.5 货币是超中性的吗? / 265

9 贝叶斯方法介绍 / 269

- 9.1 预备知识 / 270
- 9.2 决策理论 / 277
- 9.3 推断 / 278
- 9.4 分层和实证贝叶斯模型 / 286
- 9.5 后验模拟器 / 293
- 9.6 稳健性 / 306
- 9.7 估计西班牙规模报酬 / 307

10 贝叶斯向量自回归 / 310

- 10.1 m 个变量的 VAR(q) 的似然函数 / 311
- 10.2 VAR 的先验 / 312
- 10.3 结构性 BVAR / 324
- 10.4 时间上系数可变的 BVAR / 329
- 10.5 面板数据的 VAR 模型 / 335

11 贝叶斯时间序列和 DSGE 模型 / 347

- 11.1 因子模型 / 348
- 11.2 随机扰动模型 / 355
- 11.3 马尔科夫转换模型 / 360
- 11.4 贝叶斯 DSGE 模型 / 366

附录 统计分布 / 384

参考文献 / 389

准备知识

本章主要为那些不熟悉时间序列概念、随机序列性质、渐近理论的结果以及谱分析理论的读者做一个介绍。对于已经熟悉这些概念的读者,可以跳过本章直接学习第2章。

由于这部分知识内容繁多且复杂,我们尽量简单讲解。内容主要是那些与本书有关的话题,并重点强调所涉及的知识。本书的主要内容是比较动态随机一般均衡模型(dynamic stochastic general equilibrium, DSGE)和实际数据的差距,这就意味着我们需要严格的数学证明,而不是凭直觉推断。很多学者都曾经出版过著作,对这一问题进行了深入全面的研究,例如,布洛克韦尔和戴维斯(Brockwell and Davis, 1991)、戴维森(Davidson, 1994)、普里斯特利(Priestley, 1981)以及怀特(White, 1984)。

当讲解背景知识的时候,经常容易讲得过于基础,或者试图把所有知识都重新解释。为了避免这一弊端,我们认为,读者已经熟悉一些简单的微积分概念,譬如函数的极限、连续、一致连续等概念;此外,读者还了解分布函数、估计以及概率空间等。

本章分为六个部分。第一部分定义了随机过程。第二部分检验了随机过程的极限行为,并且介绍了四个收敛的概念以及它们的性质和关系。第三部分主要讲解时间序列的概念。第四部分介绍大数定理。这些定理主要用于确保随机过程的函数收敛于适当的极限。我们检验以下三种情况:随机过程的元素相互独立且服从相同的分布;随机过程的元素相互独立,但是服从不同的分布;这些元素是鞅差分的。第五部分描述了与第四部分相对应的三个中心极限定理。要得到随机过程的函数的极限分布,需要用到中心极限定理,同时,中心极限定理也是假设检验和某些模型的评价标准的基础。

第六部分介绍了谱分析。当我们需要把经济时间序列分解成各个部分(例如,趋势、循环等)的时候,谱分析就显得非常有用。谱分析还可以用于建立对波动反应的持续性度量,计算某些估计量的渐近相关矩阵,以及度量数据和模型之间的差距。这在开始可能显得有些困难,但是,读者会很快意识到,日常生活中能用到的很多函数都用了谱的方法(例如,音响系统的频率调节、手机的接收频率带宽等),这样,这部分知识也就显得不那么陌生了。谱分析也为分析时间序列提供了另一

种方法,把序列相关的时间序列观测量转换为同时发生且独立的频率观测量。这一等价转换有利于我们分析组成时间序列的原始循环,并分析它们的步长、振幅和持续性。

当没有特别说明的时候,本章所提及的机制同时适用于标量和矢量的随机过程。本书关注的对象都是定义在一个概率空间 $(\mathbb{K}, \mathcal{F}, P)$ 上的;这里, $\mathbb{K}$ 是自然数 x 的可能状态空间, $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ 的波瑞尔集(Borel sets)的集合, P 是 x 的概率函数,决定了随机过程向量的联合分布。 $\{y_t(x)\}_{t=-\infty}^\infty$ 表示序列 $\{\cdots, y_0(x), y_1(x), \cdots, y_t(x), \cdots\}$,这里,对于不同的 t ,随机变量 $y_t(x)$ 是自然数 x 的状态的可测函数^[1];也就是说, $y_t(x): \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^m$,这里, $\mathbb{R}$ 是一条实线。我们假设,对于任意的 t , $\{y_t(x)\}_{t=-\infty}^\infty$ 都属于 $\mathcal{F}_t$,所以任何函数 $h(y_t)$ 都可以被看作 $\mathcal{F}_t$ 。为了简化这一标记,我们有时把 $\{y_t(x)\}$ 记作 y_t 。一个均值为0、方差是 Σ_y 的正态随机变量记作 $y_t \sim N(0, \Sigma_y)$;一个在 $[a_1, a_2]$ 上均匀分布的随机变量记作 $y_t \sim U[a_1, a_2]$ 。最后,“i. i. d”表示独立同分布的随机变量,白噪声就是一个均值为0、方差相同的独立同分布的过程。

1.1 随机过程

定义 1.1(随机过程) 随机过程 $\{y_t(x)\}_{t=1}^\infty$ 是定义在实向量序列的集合上的概率测度(即该过程的“路径”)。

这一定义表示,对于任意的 $q \in \mathbb{R}$ 和固定的 t ,集合 $\mathbb{X} = \{y: y_t(x) \leq q\}$ 有明确的概率。也就是说,选择不同的 $q \in \mathbb{R}$,给定 t ,执行可数联合、有限交集,补充以上路径的集合,我们可以得到有一定概率的事件的集合。对于所有的 $\tau \leq t$, y_t 是无限制的,这意味着它的实现仅仅在 t 处不一定超过 q 。可观测的时间序列是在给定 x 的情况下随机过程 $\{y_t(x)\}$ 的实现^[2]。这里给出两个简单的随机过程的例子。

例题 1.1 (i) $\{y_t(x)\} = e_1 \cos(t \times e_2)$,这里, e_1 和 e_2 是随机变量, $e_1 > 0$, $e_2 \sim U[0, 2\pi]$, $t > 0$ 。其中, y_t 是有周期性的, e_1 是振幅, e_2 是 y_t 的周期。

(ii) 对于所有的 t , $\{y_t(x)\}$ 满足 $P[y_t = \pm 1] = 0.5$ 。这个过程是没有记忆的,并且在 t 变化的时候,它在-1和1之间变动。

例题 1.2 由简单的随机过程,我们可以很容易得到复杂的随机过程。例如,如果 $e_{1t} \sim N(0, 1)$, $e_{2t} \sim U(0, 1]$,并且 e_{1t} 和 e_{2t} 是相互独立的, $y_t = e_{2t} e_{1t}^{e_{2t}/(1+e_{2t})}$ 就是一个随机过程。相似地, $y_t = \sum_{i=1}^T e_i$, $e_t \sim$ i. i. d. $(0, 1)$ 也是一个随机过程。

1.2 收敛的概念

在经典的理论框架中,估计量的性质可以由带有样本容量编号的估计量的序列得到。当样本容量趋向于无穷大的时候,这些序列可以逼近真实值(未知的)。

[1] 函数 h 是 $\mathcal{F}$ -可测的:如果对于任何实数 q ,集合 $\{x: h(x) < q\}$ 属于 $\mathcal{F}$ 。

[2] 一个随机过程也可以被定义为联合可测的随机变量的一个序列。

因为估计量是数据的连续函数,我们有必要确保数据有合理的极限,而且数据的连续函数也符合这些性质,这可以通过几个收敛的概念来验证:前两个概念是关于序列收敛的,第三个概念是关于序列矩的,最后一个概念是关于序列分布的。

1.2.1 几乎完全收敛

几乎完全收敛(a. s.)的概念是实数序列收敛到某一极限这一概念的扩展。

就像我们在前面看到的,序列 $y_t(x)$ 的元素是自然状态的函数。然而,如果 $x = \bar{x}$ 是已知的, $\{y_1(\bar{x}), \dots, y_t(\bar{x}), \dots\}$ 看起来就像是一个实数序列。因此,在给定 $x = \bar{x}$ 时,收敛也可以以类似的方法定义。

定义 1.2 (几乎完全收敛) 对于 $x \in \mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}$ 和任意 $\epsilon > 0$, 如果有 $\lim_{T \rightarrow \infty} P[\|y_t(x) - y(x)\| \leq \epsilon, \forall t > T] = 1$, 则 $y_t(x)$ 几乎完全收敛于 $y(x) < \infty$, 记作 $\{y_t(x)\} \xrightarrow{\text{a. s.}} y(x)$ 。

根据定义 1.2, 当 T 足够大时, 如果找到一条使 y_t 收敛于 $y(x)$ 的路径的概率是 1, 则 $\{y_t(x)\}$ 是几乎完全收敛的, 这一概率与 x 的取值有关。从这个概念可以看出, 不收敛的可能性是存在的, 只是这种情况发生的概率很小。如果 $\mathbb{K}$ 是无限维的, 几乎完全收敛被称作几乎处处收敛, 有时几乎完全收敛被记作: 以概率为 1 收敛, 或强一致准则。

下面, 我们描述几乎完全收敛的函数的极限性。

结论 1.1 设 $\{y_t(x)\} \xrightarrow{\text{a. s.}} y(x)$, h 是 $n \times 1$ 维向量的函数, 在 $y(x)$ 上连续, 那么有 $h(y_t(x)) \xrightarrow{\text{a. s.}} h(y(x))$ 。

结论 1.1 扩展了“收敛序列的连续函数也是收敛的”这一事实。

例题 1.3 给定 x , 令 $\{y_t(x)\} = 1 - 1/t$, $h(y_t(x)) = (1/T) \sum_t y_t(x)$ 。那么, $h(y_t(x))$ 在 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t(x) = 1$ 和 $h(y_t(x)) \xrightarrow{\text{a. s.}} 1$ 处连续。

练习 1.1 设 $\{y_t(x)\} = 1/t$ 的概率是 $1 - 1/t$, $\{y_t(x)\} = t$ 的概率是 $1/t$ 。 $\{y_t(x)\}$ 能几乎完全收敛于 1 吗? 设 $h(y_t) = (1/T) \sum_t (y_t(x) - (1/T) \sum_t y_t(x))^2$, 它的极限是什么?

在实际应用中, 我们对检验哪些情况不符合几乎完全收敛很感兴趣。例如, 观测量的概率密度函数随时间改变, 或者矩阵出现在估计量不收敛于固定极限的公式中, 都属于这种情况。然而, 即使 $h(y_{1t}(x))$ 不收敛于 $h(y(x))$, 也有可能当 $t \rightarrow \infty$ 时, $h(y_{1t}(x))$ 和 $h(y_{2t}(x))$ 的距离无穷小, 这里, $(y_{2t}(x))$ 是另一个随机变量序列。要想在这种情况下得到收敛, 我们需要加强条件, 要求 h 一致连续(例如, 假设它在致密集上连续)。

结论 1.2 令 h 是致密集 $\mathbb{R}_2 \in \mathbb{R}^m$ 上的连续函数, 设 $\{y_{1t}(x)\} - \{y_{2t}(x)\} \xrightarrow{\text{a. s.}} 0$, 并且存在 $\epsilon > 0$, 对于所有的 $t > T$, y_{2t} 在 $\mathbb{R}_2$ 的范围内随 t 均匀变化。那么有 $h(y_{1t}(x)) - h(y_{2t}(x)) \xrightarrow{\text{a. s.}} 0$ 。

这里给出结论 1.2 的一个应用: 设 $\{y_{1t}(x)\}$ 是实际的时间序列, $\{y_{2t}(x)\}$ 是在给定变量和 x 时的估计, h 是连续的数据, 譬如变量的均值。那么, 由结论 1.2 可以

得出,当 $t \rightarrow \infty$ 时,通过模拟得出的结果与实际的路径很接近,由这些路径得到的数据也很接近。

1.2.2 依概率收敛

依概率收敛的概念要比几乎完全收敛弱。

定义 1.3 (依概率收敛) 如果存在 $y(x) < \infty$, 那么对于任意 $\epsilon > 0$, $P[x: \|y_t(x) - y(x)\| < \epsilon] \rightarrow 1$. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\{y_t(x)\} \xrightarrow{P} y(x)$.

$\xrightarrow{P}$ 比 $\xrightarrow{a.s.}$ 要弱, 因为在依概率收敛中, 我们仅仅要求 $(y_t(x), y(x))$ 的联合分布, 而不是 $(y_t(x), y_\tau(x), y(x))$ 的联合分布, $\forall \tau > T$. $\xrightarrow{P}$ 表示当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\{y_t(x)\}$ 中的一个元素与 $y(x)$ 的距离比 ϵ 大的可能性很小. $\xrightarrow{a.s.}$ 表示在 T 之后, $\{y_t(x)\}$ 的路径与 $y(x)$ 的距离不大于 ϵ . 因此, 很容易找到满足 $\xrightarrow{P}$ 而不满足 $\xrightarrow{a.s.}$ 的情况。

例题 1.4 令 y_τ 和 y_t 是相互独立的, $\forall t, \tau$, 令 y_t 只取 0 或 1, 并且:

$$P[y_t = 0] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t = 1, 2 \\ \frac{2}{3}, & t = 3, 4 \\ \frac{3}{4}, & t = 5, \dots, 8 \\ \frac{4}{5}, & t = 9, \dots, 16 \end{cases}$$

那么, 对于 $t = 2^{j-1} + 1, \dots, 2^j, j > 1$, 有 $P[y_t = 0] = 1 - 1/(j+1)$, 从而有 $y_t \xrightarrow{P} 0$. 这是因为 y_t 在以上任意一个范围内的概率是 $1/j$, 而且当 $t \rightarrow \infty$ 时, 划分范围的个数趋近于无穷大. 但是, y_t 并不是几乎完全收敛于 0, 因为得到一个收敛路径的概率是 0; 也就是说, 对于任意的 $t = 2^{j-1} + 1, \dots, 2^j, j > 1$, y_t 等于 1 的概率很小. 但是, 因为 $2^{j-1} + 1, \dots, 2^j$ 这一范围很大, 得到 1 的概率是 $1 - [1 - 1/(j+1)]^{2^{j-1}}$, 当 j 趋向于无穷大的时候, 这一概率是收敛于 1 的. 总的来说, $y_t \xrightarrow{P} 0$ 收敛的速度很慢, 不能保证 $y_t \xrightarrow{a.s.} 0$.

尽管依概率收敛并不能保证几乎完全收敛, 下面这个结论说明了, 怎样从依概率收敛得到几乎完全收敛。

结论 1.3 如果 $y_t(x) \xrightarrow{P} y(x)$, 存在序列 $y_{t_j}(x)$, 使得 $y_{t_j}(x) \xrightarrow{a.s.} y(x)$ [参见卢卡奇 (Lukacs, 1975), 第 48 页]。

自然地, 因为依概率收敛比几乎完全收敛允许收敛序列中出现更多的异常行为, 我们可以忽略这些异常的元素, 从依概率收敛得到几乎完全收敛. 依概率收敛的概念经常应用于研究某些估计量的弱一致性。

例题 1.5 (i) 令 y_t 是独立同分布的随机变量序列, 那么有: $(1/T) \sum_{t=1}^T y_t \xrightarrow{a.s.} E(y_t)$ [柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 强大数定理]。