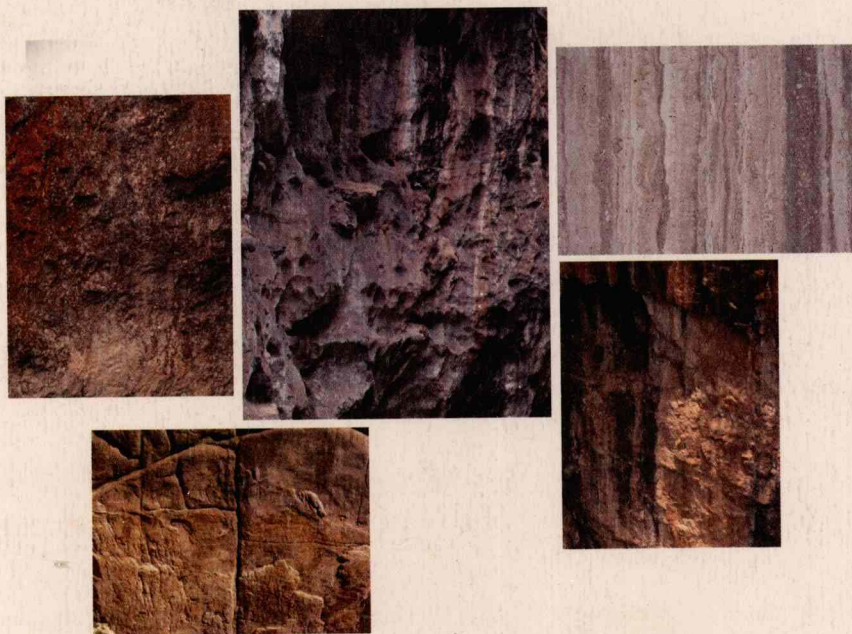


# 岩石时效特性与节理模型

YANSHI SHIXIAO TEXING YU JIELI MOXING

许宏发 陈力新 著



上海交通大学出版社

# 岩石时效特性与节理模型

许宏发 陈力新 著

上海交通大学出版社

## 内 容 提 要

本书的主要内容有:岩石蠕变模型、时效强度、时效弹模、时效损伤模型、回归反演法求流变力学参数;节理分形特征及分维与 *JRC* 间的关系、节理剪切和闭合力学模型、优势节理组的确定;空区监测和三带划分。书末附录了四个应用程序,分别是:求岩石流变力学参数 FORTRAN 源程序文本;求节理面分维值的 FORTRAN 源程序文本;节理面分形模拟 MATLAB 源程序文本;确定岩体优势节理面 FORTRAN 源程序文本。

本书可供岩石力学与工程研究、设计、勘察、施工人员参考,也可作为硕士研究生的教学参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

岩石时效特性与节理模型/许宏发,陈力新著. —上海:上海交通大学出版社,2009

ISBN978-7-313-05746-4

I. 岩... II. ①许... ②陈... III. ①岩石—时效—研究 ②岩石—节理—研究 IV. TU45

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 055385 号

### 岩石时效特性与节理模型

许宏发 陈力新 著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

常熟市文化印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

开本:787mm×960mm 1/16 印张:8 字数:147 千字

2009 年 5 月第 1 版 2009 年 5 月第 1 次印刷

印数:1~1 320

ISBN978-7-313-05746-4/TU 定价:48.00 元

---

版权所有 侵权必究

# 前 言

随着工程建设的迅速发展,岩石工程稳定性问题日益引人注目。像岩石工程的时间效应问题、岩石结构面的力学特性问题、空区的顶板监测问题等都是工程技术和研究人员十分关心的。作者在近几年中,结合教学、科研和工程实际对上述问题进行了研究,取得了一些成果。本书主要论述了以下内容:

(1) 岩石的蠕变或时间效应问题。在工程设计和施工过程中,岩石工程的时间效应是不能忽视的,有时可能是关键的。本书的研究表明,岩石的长期强度和长期弹模与瞬时值相比降低了近  $2/3$ 。本书对时效强度、时效弹模,及其损伤模型进行了研究,提出了岩石强度和弹模随时间变化具有相似性的观点,导出了它们的本构方程,并利用此观点建立了岩石蠕变损伤模型。

(2) 在岩石工程的数值分析计算中,正确确定岩土体的本构方程是很关键的,其中优选模型参数一直是困扰我们的问题。本书采用岩石的蠕变试验数据,提出了回归反演求岩石流变力学参数的方法。该方法对其他类似试验中物理参数的求解问题有一定的参考价值,可作为同类实际工程问题数据研究的基础。书末附录了该方法的 FORTRAN 源程序文本。

(3) 自然岩石节理表面轮廓线可以看作一条分形曲线,这一点已得到许多学者的认同。本书介绍了计算节理表面分维值的方法和计算机程序。另外,分维和  $JRC$  间的关系也是研究人员关心的。本书根据 Hurst 指数法模拟节理表面轮廓线,然后分析了  $JRC$  和码尺法分维之间的关系,并建立关系式。书末附录了节理表面分维计算的 FORTRAN 源程序文本和用 Hurst 指数法模拟节理表面轮廓线的 MATLAB 源程序文本。

(4) 岩体节理的剪切变形和正向压缩变形力学模型,在岩石力学中具有重要的意义。本书在介绍了双曲线模型、指数模型和对数模型的基础上,提出了能更好地反映真实试验曲线的幂函数模型,并对模型中的参数进行了研究,可供数值计算时选用。

(5) 在岩体强度及稳定性的研究中,节理组被认为是特别重要的因

素,即节理组是岩体工程失稳的主要原因。本书根据施氏赤平等积投影原理,编制了统计区域岩体优势节理组的程序。该程序用 FORTRAN 语言编写,可与 AutoCAD 绘图系统接口,进行显示、打印、绘制图形,制图精度较高。书末附录了该程序文本,供读者参考。

(6) 空区稳定性的研究,是岩石力学的重要内容之一。本书以垂直深孔多点位移计为例,介绍了空区顶板岩层移动观测的设计方法。最后,提出了用位移梯度划分空区覆岩三带的方法。

本书的第1章、第2章、第6章、第7章、第8章、第9章、第10章、第11章由许宏发撰写,第3章、第4章、第5章、第12章由陈力新撰写。

尽管作者的研究工作非常认真、仔细,但由于水平有限,书中不足和错误之处敬请读者批评指正。

许宏发 陈力新

2009年4月8日

# 目 录

|                              |    |
|------------------------------|----|
| <b>1 岩石的时效强度和时效弹模</b> .....  | 1  |
| 1.1 引言 .....                 | 1  |
| 1.2 岩石强度和弹模的时间关系及分析 .....    | 1  |
| 1.3 强度、弹量时间关系的相似性 .....      | 3  |
| 1.4 由力学模型导出弹模的时间关系式 .....    | 4  |
| 1.5 软岩蠕变损伤及损伤方程 .....        | 6  |
| 1.6 结论 .....                 | 7  |
| <b>2 回归反演法求解流变力学参数</b> ..... | 8  |
| 2.1 引言 .....                 | 8  |
| 2.2 流变力学参数求解原理 .....         | 9  |
| 2.3 计算机程序的编制要点 .....         | 12 |
| 2.4 实例分析 .....               | 13 |
| 2.5 结论 .....                 | 15 |
| <b>3 岩石流变及其进展</b> .....      | 17 |
| 3.1 引言 .....                 | 17 |
| 3.2 岩石流变试验 .....             | 18 |
| 3.3 岩石流变本构方程研究 .....         | 20 |
| 3.4 岩石时效强度及分析 .....          | 21 |
| <b>4 岩石力学中的分形理论</b> .....    | 24 |
| 4.1 分形的概念 .....              | 24 |
| 4.2 分形维数的测定 .....            | 25 |
| 4.3 分形与混沌的关系 .....           | 27 |
| 4.4 岩石力学中的分形方法 .....         | 28 |
| 4.5 至今没有解决、需要深入研究的若干问题 ..... | 29 |

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| <b>5 节理表面分形特征与分维计算</b>                      | 31 |
| 5.1 引言                                      | 31 |
| 5.2 分维计算                                    | 31 |
| 5.3 微机计算分维的方法                               | 32 |
| 5.4 节理表面分形特征分析                              | 35 |
| 5.5 结论                                      | 38 |
| <b>6 节理面的分形模拟及 <math>JRC</math> 与分维间的关系</b> | 39 |
| 6.1 引言                                      | 39 |
| 6.2 自然节理剖面的模拟                               | 40 |
| 6.3 分维数和 $JRC$ 之间的关系                        | 42 |
| 6.4 结论                                      | 44 |
| <b>7 岩体节理剪切变形的幂函数型模型</b>                    | 46 |
| 7.1 引言                                      | 46 |
| 7.2 对常用非线性模型的讨论                             | 47 |
| 7.3 对幂函数型模型的讨论                              | 48 |
| 7.4 $K_{si}$ 、 $n$ 的影响因素分析                  | 49 |
| 7.5 结论                                      | 52 |
| <b>8 岩体节理法向变形模型的讨论</b>                      | 54 |
| 8.1 引言                                      | 54 |
| 8.2 双曲线型模型的讨论                               | 54 |
| 8.3 对数型模型的讨论                                | 55 |
| 8.4 幂函数型模型的讨论                               | 55 |
| 8.5 $v_m$ 、 $k_{ni}$ 、 $c$ 的影响因素分析          | 56 |
| 8.6 结论                                      | 57 |
| <b>9 区域岩体优势节理组的确定</b>                       | 59 |
| 9.1 引言                                      | 59 |
| 9.2 赤平等积投影极点密度作图原理                          | 60 |
| 9.3 统计极点密度的程序编制要点                           | 62 |
| 9.4 程序编制说明                                  | 64 |

---

|                                    |           |
|------------------------------------|-----------|
| 9.5 实例分析 .....                     | 68        |
| <b>10 采空区顶板岩移观测设计 .....</b>        | <b>72</b> |
| 10.1 引言 .....                      | 72        |
| 10.2 垂直深孔多点位移计的设计 .....            | 72        |
| 10.3 应用实例 .....                    | 74        |
| <b>11 划分空区覆岩“三带”的方法 .....</b>      | <b>76</b> |
| 11.1 引言 .....                      | 76        |
| 11.2 “位移梯度”的概念 .....               | 77        |
| 11.3 划分“三带”的判别准则 .....             | 78        |
| 11.4 实例 .....                      | 79        |
| <b>12 岩土工程中的科学方法论 .....</b>        | <b>81</b> |
| 12.1 岩土工程的特点 .....                 | 81        |
| 12.2 不连续性和非线性研究方法 .....            | 83        |
| 12.3 不确定性研究方法 .....                | 84        |
| 12.4 系统分析方法 .....                  | 85        |
| 12.5 非线性系统理论分析方法 .....             | 89        |
| 附录 1 求岩石流变力学参数 FORTRAN 源程序文本 ..... | 92        |
| 附录 2 求节理面分维值的 FORTRAN 源程序文本 .....  | 105       |
| 附录 3 节理面分形模拟 MATLAB 源程序文本 .....    | 108       |
| 附录 4 确定岩体优势节理面 FORTRAN 源程序文本 ..... | 110       |

# 1 岩石的时效强度和时效弹模

**本章提要:**本章根据软弱岩石的单轴压缩蠕变试验,讨论了软岩强度和弹性模量的时间效应问题。本章表明,软岩的强度和弹模均为时间的函数,它们的变化规律具有相似性,都随时间的延长而降低。本章分析了岩石损伤的时间效应,提出了长期弹模和长期损伤变量的概念。

## 1.1 引言

我们知道,在岩石工程中,岩石强度和弹性模量是两个重要的力学参数,研究的学者很多,但对两者的时间效应问题很少有人研究。文献<sup>[1]</sup>探讨了岩石压缩破坏强度、弹性模量随应变速度的变化情况,得到了强度与到达破坏为止载荷作用时间的回归关系式,表明载荷越大,破坏时间越短。文献<sup>[2]</sup>结合蠕变试验,说明了长期强度的概念,认为存在一临界强度  $f_3$ , 压力  $\sigma < f_3$  时,变形为稳定蠕变;当  $\sigma > f_3$  时,为加速蠕变。陈宗基教授把该临界值  $f_3$  称为岩石的长期强度。

至于岩石弹性模量的时间效应问题,很少见类似的论述。通过本章的研究发现,弹性模量是时间的函数,随着时间的延长而降低,这和岩石强度(本章指单轴压缩强度)的时间关系类似。根据岩石长期强度的概念,可以引出岩石长期弹模的概念。

岩石强度、弹模随时间延长的过程,实质上是岩石内部结构损伤的结果,所以又可以看出,损伤是时间的函数,即流变问题的损伤力学。

本章试图通过对软岩单轴压缩蠕变实验的数据处理,分析强度、弹模的时间效应,进而推出长期强度和长期弹模;然后根据流变力学模型,导出弹模的时间关系理论公式。最后,分析了损伤的时间关系问题。

## 1.2 岩石强度和弹模的时间关系及分析

### 1.2.1 蠕变试验及结果

在实验室内,作者对某泥质板岩进行了单轴压缩蠕变试验。试件的

规格为  $\phi 50 \times 100$ , 共进行了六个不同应力水平的试验, 试验温度在  $(20 \pm 3)^\circ\text{C}$  范围内, 场地不受外界干扰。试验曲线如图 1-1 所示。同时测量得到该软岩的瞬时抗压强度平均值为 37.88MPa。

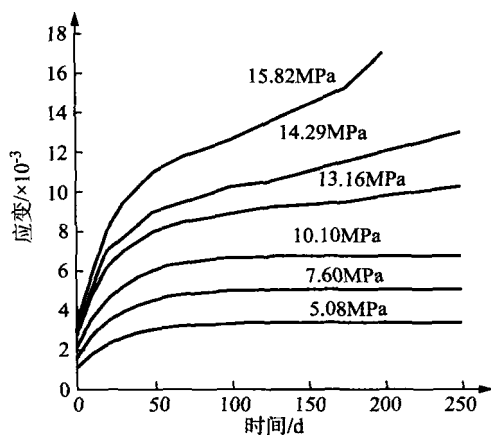


图 1-1 蠕变试验曲线

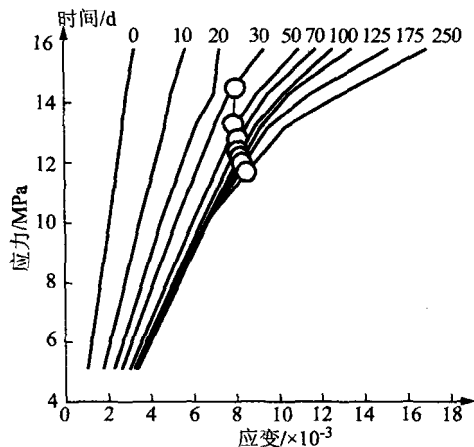


图 1-2 应力-应变等时曲线

### 1.2.2 强度和时间的关系

根据图 1-1 所示的蠕变试验曲线, 可以作出一簇不同时刻的等时应力-应变曲线(见图 1-2)。由图可知, 每条等时曲线都由近似线性段和非线性段组成, 并且有明显的转折点, 且此点随时间的增加逐步降低, 并趋于某极限值, 即长期强度。该转折点标志着岩石由粘弹性阶段向粘塑性阶段转化, 岩石内部结构发生变化, 开始发生破坏。陈宗基教授把此转折点称为“第三屈服点”, 其应力值为“第三屈服强度”(见表 1-1)。于是, 可以得到第三屈服强度与时间的关系曲线(见图 1-3)。

表 1-1 不同时刻第三屈服强度

| 时间/d   | 30   | 50   | 70   | 100  | 125  | 175  | 250  |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|
| 强度/MPa | 14.5 | 13.3 | 12.8 | 12.4 | 12.2 | 12.0 | 11.7 |

用关系式  $\sigma_c = A \cdot \exp\left(\frac{B}{t}\right)$  进行回归, 得到第三屈服强度与时间的关系式为

$$\sigma_c = 11.5046 \cdot \exp\left(\frac{7.0884}{t}\right) \quad (1-1)$$

(相关系数为 0.996 6)

当时间  $t \rightarrow \infty$  时,可求得该软岩的长期强度为  $\sigma_{\infty} = 11.5046 \text{ MPa}$ 。

### 1.2.3 弹性模量与时间的关系

由图 1-2 等时应力-应变曲线还可以求出不同时刻近似线性段部分的弹性模量(见表 1-2),于是,同样可以得到弹性模量与时间的关系(见图 1-4)。

表 1-2 不同时刻弹性模量

| 时间/d   | 0    | 10   | 20   | 30   | 50   | 70   | 100  | 125  | 175  | 250  |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 弹模/GPa | 4.85 | 2.87 | 2.24 | 1.94 | 1.68 | 1.58 | 1.53 | 1.51 | 1.50 | 1.50 |

用关系式  $E = a \cdot \exp\left(\frac{b}{t}\right)$  进行回归,得

$$E = 1.4551 \cdot \exp\left(\frac{7.2236}{t}\right) \quad (1-2)$$

(相关系数为 0.987 3)

当时间  $t \rightarrow \infty$  时,可求得该软岩的长期弹模为  $E_{\infty} = 1.4551 \text{ GPa}$ 。

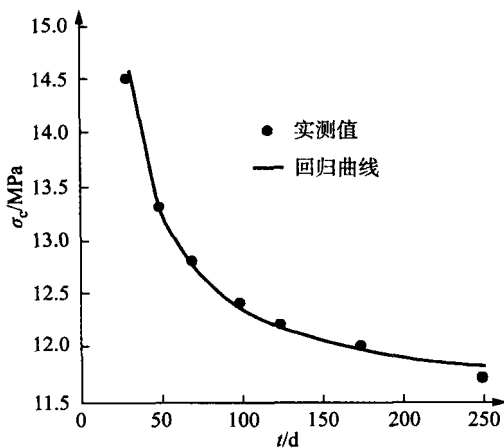


图 1-3 第三屈服强度与时间的关系

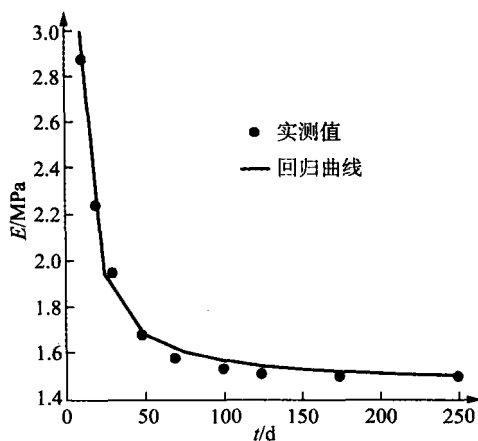


图 1-4 弹性模量与时间的关系

## 1.3 强度、弹量时间关系的相似性

由式(1-1)、式(1-2)比较可知,指数系数  $b$  非常接近,只相差

1.87%。可见强度和弹模的时间关系在曲线形式上是相似的,即:

$$\frac{E(t_0)}{\sigma_c(t_0)} \approx \frac{E(t_1)}{\sigma_c(t_1)} \approx \dots \approx \frac{E(t_\infty)}{\sigma_c(t_\infty)} \quad (1-3)$$

我们知道,  $\sigma_c(0) = 37.88 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_\infty = 11.504 \text{ MPa}$ ,

$$E(0) = 4.85 \text{ GPa}, E_\infty = 1.4551 \text{ GPa}.$$

即有  $\sigma_c(0)/\sigma_\infty = 3.2922$ ,  $E_0/E_\infty = 3.3331$ 。这就证明了式(1-3)的正确性。

## 1.4 由力学模型导出弹模的时间关系式

根据试验结果分析可知,轴向压力小于长期强度时,其力学模型可用 Poytin-thomson 模型表达(见图 1-5)。由力学推导可知<sup>[3]</sup>其蠕变方程为

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{K_2} \left[ 1 - \frac{K_1}{K_1 + K_2} \exp\left(-\frac{K_1 K_2}{(K_1 + K_2) \eta} t\right) \right] \quad (1-4)$$

式中,  $K_1$ 、 $K_2$ 、 $\eta$  为弹性元件和黏性元件的力学参数。

将式(1-4)简写为

$$\epsilon = \sigma_0 [P + Q \exp(-Rt)] \quad (1-5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{K_2} \\ Q &= \frac{K_1}{K_2(K_1 + K_2)} \\ R &= \frac{K_1 K_2}{(K_1 + K_2) \eta} \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

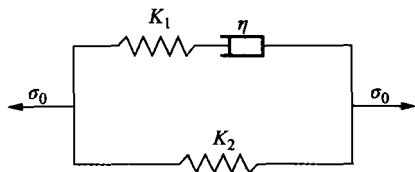


图 1-5 Poytin-thomson 模型

文献<sup>[4]</sup>介绍了一种求解流变力参数的方法。该方法是建立试验数据多项式回归方程与蠕变方程多项式展开式之间的间接联系,联立方程组,求解力学参数。本章也利用此方法求解蠕变方程中的系数  $P$ 、 $Q$ 、 $R$

(具体计算步骤见第 2 章)。表 1-3 为不同恒压力作用下的  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  值。

表 1-3 不同  $\sigma_0$  下的  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  值

| $\sigma_0/\text{MPa}$ | 回归多项式系数 (回归指数为 5) |               |               | 蠕变方程中系数            |                 |               |
|-----------------------|-------------------|---------------|---------------|--------------------|-----------------|---------------|
|                       | $a_0/10^{-3}$     | $a_1/10^{-5}$ | $a_2/10^{-6}$ | $P=a_0/\sigma_0-Q$ | $Q=a_1^2/a_2/2$ | $R=-2a_2/a_1$ |
| 5.08                  | 1.06727           | 7.79230       | -1.10176      | 0.7525E-3          | -0.5424E-3      | 0.02828       |
| 7.60                  | 1.60102           | 11.6050       | -1.65147      | 0.7472E-3          | -0.5366E-3      | 0.02846       |
| 10.10                 | 2.13465           | 15.5818       | -2.20235      | 0.7571E-3          | -0.5458E-3      | 0.02827       |
| 平均值                   | —                 | —             | —             | 0.7524E-3          | -0.5416E-3      | 0.02834       |

给定同一时刻  $t$ , 但压力  $\sigma_0$  不同, 则可以得到一条  $t$  时刻的等时应力-应变曲线, 其方程为

$$\sigma = \frac{\epsilon}{P + Q\exp(-Rt)} \quad (1-7)$$

可求得  $t$  时刻岩石的弹性模量

$$E(t) = \frac{1}{P + Q\exp(-Rt)} \quad (1-8)$$

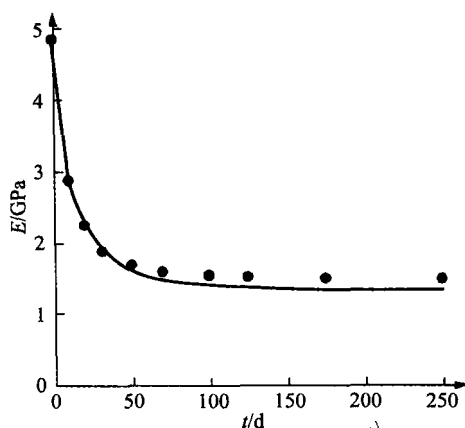


图 1-6 弹模的时间函数曲线与实测值比较

式(1-8)即为由力学模型导出的岩石弹模与时间的关系方程。图 1-6 对弹模的时间函数曲线(式中  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  取表 1-3 中的平均值)与实测值进行了比较, 可知其精度是较高的。前面已经导出, 弹模和强度的时间关系具有相似性。因此

$$\frac{\sigma_c(t)}{E(t)} = \frac{S_c}{E_0} \quad (1-9)$$

即

$$\sigma_c(t) = \frac{S_c}{E_0[P + Q\exp(-Rt)]} \quad (1-10)$$

式中,  $\sigma_c$  为  $t$  时刻第三屈服强度;

$E_0$  为瞬时弹性模量(4.85GPa);

$S_c$  为瞬时抗压强度(37.88MPa)。

由式(1-8)、式(1-10)可求得软岩的长期弹模和长期强度,其值各为1.33GPa和10.39MPa(式中  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  取表1-3中的平均值),与实测值十分接近(分别为1.4551GPa和11.504MPa)。因此,实际工程中,可以用式(1-8)、式(1-10)作为软岩弹模和强度的时间关系方程进行工程设计和数值计算。

## 1.5 软岩蠕变损伤及损伤方程

软岩的弹性模量和强度随着时间的延长而降低,是由于岩石内部损伤的结果,说明损伤是时间的函数,或称为蠕变损伤。这方面的研究还很少。

损伤力学的研究方法有好几种,对于岩石材料,一般用连续介质损伤力学的方法。该方法用损伤变量来度量材料损伤的程度<sup>[5,6]</sup>,本章用弹性模量法来测定损伤变量。则有

$$\omega(t) = 1 - \frac{E(t)}{E_0} \quad (1-11)$$

式中,  $\omega$  为损伤变量;

$E(t)$  为损伤后  $t$  时刻的弹性模量;

$E_0$  为损伤前的弹性模量。

将式(1-8)代入式(1-11),得

$$\omega(t) = 1 - \frac{1}{E_0[P + Q\exp(-Rt)]} \quad (1-12)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-QR \exp(-Rt)}{E_0[P + Q \exp(-Rt)]^2}$$

建立了式(1-12)、式(1-13)损伤演化的方程之后,就可以利用损伤力学的方法推导得到软岩的物理方程。将此方程应用于有限元程序中,可求出蠕变损伤后的应力场和位移场。这里不再详述。显然,式(1-10)

用损伤力学的方法可写成

$$\sigma_c(t) = [1 - \omega(t)]S_c \quad (1-13)$$

利用式(1-12),可求得长期损伤变量  $\omega_\infty = 0.7258$ 。

## 1.6 结论

通过本章的分析,可以得到如下结论:

(1) 软岩的强度和弹性模量均为时间的函数,并随时间的延长而降低,且它们的变化规律具有相似性。

(2) 通过蠕变方程可以导出软岩弹模的时间函数关系,与实测值比较很接近,可用于实际工程的设计和数值计算中。

(3) 通过软岩的弹性模量的时间函数关系,弹模、强度随时间变化的相似性,可以导出屈服强度、损伤变量的时间函数关系。

(4) 文中提出了长期强度、长期弹模、长期损伤变量的概念,并利用各自的函数关系式,求得了它们的值分别为:10.39MPa、1.33GPa、0.7258。长期强度、长期弹模与瞬时值相比,降低了近2/3。

(5) 软岩的强度和弹性模量随时间降低的现象,完全可以用损伤力学的方法进行描述,用损伤力学的方法建立力学模型。

## 参考文献

- [1] 金丰年. 岩石的时间效应[D]. 上海: 同济大学博士论文, 1993.
- [2] 陈宗基. 地下巷道长期稳定性的力学问题[J]. 岩石力学与工程学报, 1982, 1(1).
- [3] 高磊. 矿山岩石力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1987.
- [4] 许宏发, 陈新万. 多项式回归间接求解岩石流变力学参数的方法[J]. 有色金属, 1994, 46(4).
- [5] 楼志文. 损伤力学基础[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.
- [6] 余天庆, 钱济成. 损伤理论及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.

## 2 回归反演法求解流变力学参数

**本章提要:**本章以岩石单轴蠕变实验为例,介绍了求解岩石流变力学模型中各元件力学参数的回归反演方法。该方法是通过建立实测蠕变数据多项式回归方程与流变力学模型蠕变方程 Taylor 展开式之间的间接联系,联立方程组,求解出未知的岩石流变力学参数。此方法简单易懂、实用,精度符合工程要求。本章给出了计算机程序框图。

### 2.1 引言

在岩土工程的数值分析计算中,正确确定岩土体的本构方程是很关键的,其中优选模型参数一直是困扰我们的问题。理论上,每种岩体都对应着一特定流变力学模型,通过数学推导,可求出模型的本构方程。但一般来说,要确切知道模型中各元件的力学参数的具体数值具有较大的困难性。虽然可以借助计算机通过有限元反分析<sup>[1]</sup>、参数优化<sup>[2]</sup>等方法求解,但由于解的不唯一性,所求参数不一定是模型参数,给计算结果带来误差。

岩石的流变性常常用蠕变试验来反映,其试验数据处理研究较多<sup>[3]</sup>。一般用能线性化的初等函数作为经验公式进行数据回归,定量描述岩土蠕变的现象或趋势,而不能说明其力学模型的特性。本章力图寻找回归方程与蠕变本构方程间的间接联系,建立方程组,求解出蠕变方程中的流变力学参数。

我们知道,初等函数一般可用 Taylor 公式进行级数展开<sup>[4]</sup>。而另一方面试验数据又可用多项式进行回归<sup>[5]</sup>。很显然,这两方面建立了一种间接的联系。因而用回归反演法求解岩石流变力学参数存在着可行性。

本章以蠕变试验为例,推导了求解力学模型中各元件力学参数的方法,并求出蠕变方程,此方程与实验结果非常接近,满足实际工程的需要。这样,各元件的力学参数确定后,很容易确定本构方程。

该方法对其他类似试验中物理参数的求解问题有一定的参考价值,可作为同类实际工程问题数据研究的基础。

## 2.2 流变力学参数求解原理

### 2.2.1 数学原理

设一组试验数据为  $\{(x_i, y_i): (i=1, 2, \dots, m)\}$ , 它表达的物理方程可用函数  $Y=f(x)$  表示。

(1) 根据数学原理<sup>[5]</sup>, 这组试验数据  $\{(x_i, y_i): (i=1, 2, \dots, m)\}$  可用多项式回归进行拟合。设该多项式回归方程为

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^N \quad (2-1)$$

式中,  $a_0, a_1, a_2, \dots, a^N$  为多项式回归系数;

$N$  为多项式回归幂指数, 理论上  $N$  越大, 拟合精度越高, 但实际计算时, 应根据求得的物理方程的精度而定, 一般  $N$  在 5~10 之间就能满足工程要求。

(2) 根据数学原理<sup>[4]</sup>, 对于初等函数  $Y=f(x)$ , 若在  $x=0$  的某个开区间  $(-a, a)$  内具有  $(n+1)$  阶导数, 则当  $x$  在  $(-a, a)$  内时, 根据麦克劳林(Machlaurin)公式,  $f(x)$  可表示为  $x$  的一个  $n$  次多项式与一个余项  $R_n(x)$  之和。即

$$Y = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \quad (2-2)$$

这里

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

由式(2-1)、式(2-2)可知, 函数  $y$  和  $Y$  均是对试验数据的描述。 $y$  是对实验数据在数学上的近似描述, 只表明试验现象; 而  $Y$  是对试验数据在物理意义上的精确描述, 表明试验的实质。可见, 函数  $y$  和  $Y$  是近似等价的关系, 可写成

$$Y \approx y \quad (2-3)$$

所以, 由式(2-1)和式(2-2)可知, 下列方程组近似成立: