浙江省重点专业资助项目
杭州市重点学科资助项目

JINSHI DAISHU GUANDIAN XIA DE GAODENG DAISHU

近世代数观点下的高等代数

陈辉 著

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{<f(t)\mid x^k>}{k!}t^k$$

$$f(t)g(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a_k b_{m-k}\right)t^m$$

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

■ 浙江省重点专业资助项目
杭州市重点学科资助项目

近世代数观点下的高等代数

陈　辉　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

近世代数观点下的高等代数/陈辉著．—杭州：浙江大学出版社，2009.8

浙江省重点专业资助项目、杭州市重点学科资助项目

ISBN 978-7-308-06882-6

Ⅰ.近… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等代数—研究 Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第112940号

近世代数观点下的高等代数

陈 辉 著

责任编辑	阮海潮(ruanhc@163.com)
封面设计	姚燕鸣
出版发行	浙江大学出版社
	(杭州天目山路148号 邮政编码310028)
	(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版	杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷	杭州杭新印务有限公司
开　　本	787mm×960mm 1/16
印　　张	20.5
字　　数	436千
版 印 次	2009年8月第1版 2009年8月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-06882-6
定　　价	45.00元

前　言

代数学是近代数学的一个重要分支，随着科学的发展和实际应用的需要，代数学的内容和方法都在不断地扩充和深化，特别是由于电子计算机的飞速发展和广泛应用，使许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，这是离不开代数理论的.

为了适应新的形势，满足广大读者深入学习和研究的需求，作者根据多年的积累完成此书.我们是在近世代数思想指导下对线性代数的基本概念、基础理论、基本方法进行系统归纳与提升，同时把国内外线性代数研究的新成果引入本书.

本书首先概括地介绍了高等代数的一些主要内容，包括多项式理论、矩阵理论、向量空间和线性变换、欧氏空间和二次型等基础理论.

接下来讨论了近世代数的一些主要内容，包括群、环、域、模等代数系统，又进一步讨论了主理想整环上的模理论，证明了有限生成模的循环分解定理.这一定理对于后面讨论的有限维线性算子的结构定理是至关重要的.

最后对代数学的后续内容进行了讨论，把这些内容归纳为几个专题：线性算子的结构理论、谱理论、赋范线性空间、希尔伯特空间、双线性映射与张量积、仿射几何与多项式函数等.各章都是由各自相对独立的主题所组成的.

编写本书的目的是使读者能用近世代数观点来讨论高等代数问题，通过对这些专题的深入讨论，激发读者的原始性创新，从而培养读者的发散型思维.

陈　辉

2009 年 7 月

目　　录

第 1 章　基础知识

本章讲述的是全书经常会用到的一些基本概念，将主要介绍：集合与映射、代数系、等价关系、基数（势）的基本性质以及同态与同构等基本概念. 通过本章的学习，将对近世代数常用的方法有初步的了解，为后续学习奠定基础.

1.1　集合与映射

1.1.1　集合

在数学中，经常讨论的不是孤立的个体，也不是包罗万象的宇宙，而往往是对具有某些特性之个体的联合体进行研讨，这样就产生了集合的概念. 这是数学上一个不定义的原始概念，通常是用各种同义语来解释的.

定义 1.1.1　若干个确定事物的全体称为一个**集合**，简称为**集**.

把不含有任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$. 一个集合若仅含有有限个元素，则称该集合为**有限集**；若集合含有无限多个元素，则称该集合为**无限集**.

定义 1.1.2　集合的相等：如果集合 A 与集合 B 含有完全相同的元素，那么就称**集 A 与集 B 相等**，记为 $A = B$.

换言之：$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in A$ 有 $x \in B$，$\forall y \in B$ 有 $y \in A$. 这是判别集合相等的方法.

表示集合的方法一般有列举法和描述法. 所谓列举法，就是把集合的所有元素直接列出来；所谓描述法，就是规定集合中元素所具有的性质.

两种方法都用符号 $\{\cdots\}$ 来表示. 列举法用 $\{a, b, c\ \cdots\}$ 来表示；描述法用 $\{x \mid p(x)\}$ 来表示，其中 $p(x)$ 表示元素 x 所具有的性质.

例如：$A = \{1, -1\}$，$B = \{1, 2, 3 \cdots 10\}$；$C = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x^3 - 2 = 0\}$.

前者具体写出 A 是由 1 与 -1 两个整数组成的集合，B 是由 1 到 10 十个整数组成的集合；C 是方程 $x^3 - 2 = 0$ 的实数根所组成的集合.

常用数集：自然数集 $\mathbf{N}$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$，复数集 $\mathbf{C}$.

例 1.1.1　设 F 是数域，F 上所有一元多项式以及零多项式构成的集合记为：

$$F[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in F,\ i = 1, 2 \cdots n,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

例 1.1.2 数域 F 上所有 n 阶方阵的集合 $M_n(F) = \{(a_{ij})_n \mid a_{ij} \in F,\ i, j = 1, 2 \cdots n\}$.

定义 1.1.3 如果 B 的每个元素都属于 A，那么称 B 为 A 的**子集**，记为 $B \subseteq A$.

如果集合 B 是 A 的子集，且 $B \neq A$，则称 B 为 A 的**真子集**，记为 $B \subset A$.

$\varnothing$ 被认为是任意集合的子集，因此，对于任意集合 A，总有 $\varnothing \subseteq A$，$A \subseteq A$，并称其为 A 的**平凡子集**；A 的其他子集称为 A 的**非平凡子集**.

定义 1.1.4 设 A 是一个给定的集合，由 A 的所有子集组成的集合称为 A 的**幂集**(power set)，用符号 2^A 表示.

例 1.1.3 设 $A = \{0,1,2\}$，则 $2^A = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\}$.

1.1.2 集合的运算

设 I 是一个集合，A, B, C 都是 I 的子集.

1) 由一切属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**，记为 $A \cup B$，即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$；

2) 由 A 与 B 公共的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，记为 $A \cap B$，即 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$；

3) 由一切属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**，记为 $A - B$，即 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$；

4) 由一切不属于 A(但属于 I)的元素组成的集合，称为 A 的**余集**，记为 A'，即 $A' = I - A$.

这些运算满足以下运算规律：

(1) $A \cup A = A \cap A = A$ (幂等律)

(2) $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$ (交换律)

(3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (结合律)

(4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$， (分配律)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(5) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$ (吸收律)

(6) 若 $A \subseteq C$，则 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ (模　律)

(7) $(A \cup B)' = A' \cap B'$，$(A \cap B)' = A' \cup B'$ (DeMorgan 律)

(8) $(A')' = A$ (对合律)

这些运算与运算规律可推广到多个子集的情形.

设 $A_1, A_2 \cdots A_n$ 是 n 个任意集合，它们的并集记为 $\bigcup A_i$，定义为：

$$\bigcup A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_i, \text{对于某一个 } i\}$$

这 n 个集合的交集记为 $\bigcap A_i$，定义为：

$$\bigcap A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_i, i = 1, 2 \cdots n\}.$$

定义 1.1.5　设 A, B 是两个集合，由一切有序对 (a, b)，其中 $a \in A, b \in B$ 组成的集合，称为 A 与 B 的**乘积集**，记为 $A \times B$，即 $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$，并且规定，$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

例 1.1.4　笛卡尔坐标平面上点的坐标的集合就是 $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$.

又，$\mathbf{R} \times \{1\} = \{(y, 1) \mid y \in \mathbf{R}\}$，显然是由过点 $(0, 1)$ 且平行于 x 轴的直线上的所有点的坐标组成的集合.

乘积集的概念也可以推广到多个集合的情形，设 $A_1, A_2 \cdots A_n$ 是任意 n 个集合，令

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2 \cdots a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2 \cdots n\}$$

其中

$$(a_1, a_2 \cdots a_n) = (b_1, b_2 \cdots b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i,\ i = 1, 2 \cdots n,$$

称 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 为**乘积集**，也可以记为 $\prod_{i=1}^{n} A_i$. 如果 $A_1, A_2 \cdots A_n$ 均为有限，那么 $\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

1.1.3　包含与排斥原理

关于集合运算后元素个数的变化有以下规律：设 I 是一个集合，A, B, C 是 I 的有限子集，则有

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,

$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$,

$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|$,

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

当 $A \cap B = \varnothing$ 时，有 $|A \cup B| = |A| + |B|$，这就是"加法原理". 这些公式很容易用图形加以证明. 对于多个子集的情形有以下定理：

定理 1.1.1（包含与排斥原理）　设 $A_1, A_2 \cdots A_n$ 是 I 的有限子集，则

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cup A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|, \quad (1.1)$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cup A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|. \quad (1.2)$$

下面举例说明包含与排斥原理的应用.

例 1.1.5 求不大于 500 可被 5,7,9 中某一个数整除的正整数的个数.

解 设不大于500可被5整除的正整数集合为 A_1,不大于500可被7整除的正整数集合为 A_2,不大于500可被9整除的正整数集合为 A_3,则

$$|A_1| = 100,\ |A_2| = [500/7] = 71,\ |A_3| = [500/9] = 55.$$

$$|A_1 \cap A_2| = [500/35] = 14,\quad |A_1 \cap A_3| = [500/45] = 11,$$

$$|A_2 \cap A_3| = [500/63] = 7,\quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = [500/315] = 1.$$

故由(2)式得:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \sum |A_i| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 100 + 71 + 55 - 14 - 11 - 7 + 1 \\ &= 195. \end{aligned}$$

1.1.4 映射

代数研究的基本对象是代数系统,所谓代数系统就是带有运算的集合.这些代数系统的内部以及互相之间往往存在一定的联系,而映射则是建立这种联系的有用工具,所以说映射概念是近代数学最基本的概念.

映射是函数概念的推广,它描述了两个集合的元素之间的关系,是数学中最基本的工具之一,我们必须对它十分熟悉.

定义 1.1.6 设 A,B 是两个给定的集合,若存在一个 A 到 B 的对应关系 f,使得对 A 中的每一个元素 x,都有 B 中唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 是 A 到 B 的一个**映射**,记作: $y = f(x)$.其中 y 称为 x 的**象**(image),x 称为 y 的**原象**(inverse image),A 称为 f 的**定义域**(domain),B 称为 f 的**值域**(codomain).

通常,用 $f: A \to B$ 抽象地表示 f 是 A 到 B 的一个映射,用记号 $f: x \to y$ 表示映射 f 所规定的元素之间的具体对应关系.

例 1.1.6 设 $A = \{a, b, c, d\}$,$B = \{1, 2, 3, 4\}$. $f: a \to 1, b \to 2, c \to 4, d \to 4$,则 f 满足定义中的条件,是一个 A 到 B 的映射.

例 1.1.7 设 $A = \{1,2\}$,$B = \mathbf{Z}$,规定 A 到 B 的对应为 f: $1 \to$ 奇数,$2 \to$ 偶数.

由于 $\mathbf{Z}$ 中的奇、偶数不止一个,故 $f(1)$,$f(2)$ 都不唯一确定,故 f 不是 A 到 B 的映射.

主要是由于自变量的表达形式不唯一而引起象的不唯一.因此,遇到这种情况时检验一个对应关系 f 是否是映射需检验是否满足下列条件:若 $x_1 = x_2$,则 $f(x_1) = f(x_2)$.

定义 1.1.7(映射的相等)　由于一个映射由定义域、值域、对应关系三个因素决定,所以两个映射相等必须这三个因素都相等,即如果 $f: A_1 \to B_1$,$g: A_2 \to B_2$,当且仅当 $A_1 = A_2$,$B_1 = B_2$,和任意 $x \in A_1$ 有 $f(x) = g(x)$ 时,称 f 与 g **相等**,记作 $f = g$.

例 1.1.8　设 $A = (-\infty, +\infty)$, $B = [0, +\infty)$,对于 $\forall x \in A$ 令

$$f: x \to |x| + 1,\ g: x \to \sqrt{x^2} + 1, \text{则 } f = g.$$

定义 1.1.8　设 f 是 A 到 B 的一个映射,称 $f(A) = \{f(x) \mid \forall x \in A\}$ 为 A 在 f 下的**象集**(也记为 $\mathrm{Im} f$),显然 $f(A)$ 是 B 的子集;

称 $f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$ 为 B 在 f 下的**完全原象集**,显然 $f^{-1}(B)$ 是 A 的子集.

定义 1.1.9　设 f 是 A 到 B 的一个映射,如果 $f(A) = B$,则称 f 是 A 到 B 的**满射**(surjection).

设 f 是 A 到 B 的一个映射,$\forall x_1$、$x_2 \in A$ 且 $x_1 \neq x_2$,若 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 是 A 到 B 的一个**单射**(injection).

如果 f 既是满射又是单射,则称 f 是 A 到 B 的**一一映射**(bijection),或**双射**.

要证明 f 是满射,就是要证明 $f(A) = B$,也就是要证明 $f(A) \supseteq B$,即 $\forall b \in B$,存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$. 这是判断 f 是不是满射的有效方法.

要证明 f 是单射,就是要证明它的逆否命题:如果 $f(x_1) = f(x_2)$,就有 $x_1 = x_2$.

定义 1.1.10　令 f 是 A 到 B 的一个映射,如果 $X \subset A$,那么 $f: A \to B$ 的**限制**是函数 $f|_X: X \to B$. 显然,单射的限制是单射.

例 1.1.9　设 $A = \{0,1,2,3 \cdots\}$,$B = \{1,2,3 \cdots\}$,定义对应关系:$f: n \to n+1$,不难验证 f 是一一映射.

例 1.1.10　设 $M = \{1/2, 1/3, 1/4 \cdots\}$,$N = \{0, 1, 1/2, 1/3 \cdots\}$,则 M 是 $(0, 1)$ 的子集,N 是 $[0, 1]$ 的子集. 作 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的对应关系

$$f: 1/2 \to 0, \quad 1/3 \to 1, \quad 1/4 \to 1/2, \quad 1/5 \to 1/3 \quad \cdots \quad 1/n \to 1/(n-2) \ \cdots$$

显然 f 是 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的一一映射.

若 f 是 A 到 A 自身的映射,则称 f 是 A 上的一个**变换**.

例 1.1.11　$\forall f(x) \in F[x]$,规定 $\varphi: f(x) \to f'(x)$(这里表示导数),则 φ 是 $F[x]$ 的一个变换,并且是一个满变换.

当 A 是有限集时,A 上的变换通常用“列表法”表示.

1.1.5　映射的合成

类似于熟知的复合函数的概念,我们给出两个映射复合的概念.

定义 1.1.11　设 A,B,C 为三个集合,有两个映射:

若 $f: A \to B, g: B \to C$,则 f,g 可确定 A 到 C 的映射 $h: h(x) = g(f(x)), \forall x \in A$,称 h 是 f 与 g 的**合成**(或**复合**)(composite),记作:$h = g \circ f$.

设 I_A 是 A 上的一个变换,若对于 $\forall x \in A$,有 $I_A(x) = x$,则称 I_A 是 A 上的一个**单位变换**或**恒等变换**. 映射的复合有时也称为映射的**乘法**,记为 $g \cdot f$ 或 gf.

根据复合映射的定义,f 的值域与 g 的定义域必须相同,才能复合成为 $g \circ f$.

对于 A 的任意两个变换 f,g 总是可以合成为 A 的变换 gf 或 fg,但一般 $gf \neq fg$.

关于映射的复合有以下性质:

定理 1.1.2 设有映射 $f: A \to B, g: B \to C, h: C \to D$,则有:

1) $h(gf) = (hg)f$;

2) $I_B f = f I_A = f$.

证明 1) 易见 $h(gf)$ 和 $(hg)f$ 的定义域都是 A,值域都是 D,且对于 $\forall x \in A$,有 $(h(gf))(x) = h((gf)(x)) = h(g(f(x))), ((hg)f)(x) = (hg)(f(x)) = h(g(f(x)))$,所以 $h(gf) = (hg)f$.

2) 若 $I_B f$ 和 f 的定义域都是 A,值域都是 B,且 $\forall x \in A$,则有 $I_B f(x) = I_B(f(x)) = f(x)$.

类似于反函数,对映射有逆映射的概念.

定义 1.1.12 设 $f: A \to B$,

1) 若存在映射 $g: B \to A$,使 $gf = I_A$,就称 g 是 f 的**左逆**;

2) 若存在映射 $h: B \to A$,使 $fh = I_B$,就称 h 是 f 的**右逆**;

3) 若 f 同时有左、右逆,则左、右逆相等,称为 f 的**逆**(inverse),记作 f^{-1}.

定理 1.1.3 设 $f: A \to B$,则

1) f 有左逆的充分必要条件为 f 是单射;

2) f 有右逆的充分必要条件为 f 是满射;

3) f 可逆的充分必要条件为 f 是双射.

证明 1) 设 f 有左逆 g,若 $f(x_1) = f(x_2)$,两边用 g 作用,得 $gf(x_1) = gf(x_2)$,即 $I_A(x_1) = I_A(x_2)$,得 $x_1 = x_2$,所以 f 是单射.

充分性:设 f 是单射,定义 B 到 A 的对应关系 g 为 $g(b) = a$,若 $b \in f(A)$,且 $f(a) = b$, $g(b) = a_1$,若 $b \in B - f(A)$,其中 a_1 是 A 中任意取定的一个元素. 因 f 是单射,$g(b)$ 唯一确定,故 g 是映射.

又对于 $\forall a \in A$ 有 $gf(a) = g(b) = a$,所以 $g \cdot f = I_A$,g 是 f 的左逆.

2) 必要性:设 f 有右逆 h,则对于 $\forall b \in B$,有 $fh(b) = b$,即 $f(h(b)) = b$,即对 $\forall b \in B$,存在 $x = h(b)$ 使 $f(x) = b$,所以 f 是满射.

充分性:设 f 是满射,$\forall b \in B$,存在一个 a,使 $f(a) = b$,于是,我们定义一个 B 到 A 的对应关系 $h: b \to a$,则 h 是 B 到 A 的一个映射,且有 $fh(b) = f(h(b)) = f(a) =$

b,所以 $fh = I_B$,即 h 是 f 的右逆.

3) 由 1),2) 直接可得.

关于逆映射有以下性质:

1) $(f^{-1})^{-1} = f$;

2) 若 f 是 $A \to B$ 的可逆映射,g 是 $B \to C$ 的可逆映射,则 $g \cdot f$ 是 $A \to C$ 的可逆映射,且有$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

当 A 是有限集时,A 上的一个变换 f 可逆的充分必要条件是 f 是单射,或只要 f 是 A 上的满射.

1.2 等价关系与集合的分类

利用映射可以建立起两个集合间的联系以利于对两个集合进行分析比较,有时我们还需要把一个集合分成若干个子集来进行研讨,这就需要有等价关系与集合的分类这样两个概念,本节将介绍这两个概念并进行一些初步的讨论.

1.2.1 二元关系

关系是一个使用非常广泛的基本概念,在日常生活中我们也熟悉这个词的含义.在数学上关系可以表达集合中元素间的联系,例如"3 小于 5"、"x 大于 y"、"点 a 在 b 与 c 之间"等.在给出关系这个概念的定义之前我们先分析两个例子.

例 1.2.1 某电影院的电影票与座位之间有"对号"关系.用 A 表示电影票的集合,用 B 表示座位的集合,用 R 表示"对号"关系,对于 $\forall a \in A$ 与 $b \in B$,则 a 与 b 有对号关系或没有对号关系两者必居其一,若 a 与 b 有对号关系,则说序对$(a,b) \in R$;若 a 与 b 没有对号关系,则说序对$(a,b) \notin R$,因此,全体有对号关系的序对作成一个集合就是 R,而 R 是卡氏积 $A \times B$ 的一个子集合.

例 1.2.2 考虑实数集 $\mathbf{R}$,$\forall a,b \in \mathbf{R}$,$a > b$ 与 $a \not> b$ 两者必居其一,令 A 表示实数的"$>$"关系.当 $a > b$ 时,就说$(a,b) \in \mathbf{R}$,当 $a \not> b$ 时,就说$(a,b) \notin \mathbf{R}$,因此,所有适合 $a > b$ 的序对(a,b)作成的集合就是 $\mathbf{R}$,而 $\mathbf{R}$ 是卡氏积 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 的一个子集合.

定义 1.2.1 设 A、B 是任意两个集合,规则 R,对于 $\forall a \in A$ 与 $b \in B$,均可以确定 a 和 b 是否适合这个规则,若适合这个规则,就说 a 和 b 有**关系** R,记作 aRb,否则记作 $aR'b$.

A 和 B 之间的关系 R 也可以用 $A \times B$ 的一个子集来表示:$A \times B$ 的一个子集 R 称为 A 和 B 之间的关系.当$(a,b) \in R$ 时,说 a 和 b 有关系 R,记作 aRb;当$(a,b) \notin R$ 时,说 a 和 b 没有关系 R,记作 $aR'b$.

特别地,$A \times A$ 的一个子集 R 就称为 A 上的一个**二元关系**.

例 1.2.3　集合 $X = \{a,b\}$，$Y = \{c,d,e\}$，设 R 是集合 X 和 Y 间的一种规则：

$$aRc, aRd, aR'e, bR'c, bR'd, bRe.$$

它可以用 $X \times Y$ 的子集 $R = \{(a, c)、(a, d)、(b, e)\}$ 来表示.

例 1.2.4　在 $\mathbf{Z}$ 中取定一个正整数 n，规定

$$aRb \Leftrightarrow n \mid (a-b).$$

则 R 是 $\mathbf{Z}$ 上的一个二元关系，称为 $\mathbf{Z}$ 上的"模 n 同余关系"，记为 $a \equiv b(n)$. 用 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 的子集 $R = \{(a, b) \mid n \mid a-b\}$ 来表示.

1.2.2　等价关系

由以上例子可以看出，集合 A 上的二元关系有各种不同的类型，现在我们具体看看例 1.2.4 给出的 $\mathbf{Z}$ 上的模 n 同余关系的特性：

1）$\forall a \in \mathbf{Z}$，有 $n \mid a-a$，则 aRa，也就是说，$\forall a \in \mathbf{Z}$，都有 $(a, a) \in R$；

2）如果 aRb，即 $n \mid a-b$，则有 $n \mid b-a$，则 bRa，如果 $(a, b) \in R$，就有 $(b, a) \in R$；

3）如果 aRb，bRc，即 $n \mid a-b$ 且 $n \mid b-c$，则有 $n \mid (a-b)+(b-c)$，即 $n \mid a-c$，也就是说，如果 $(a, b) \in R$，$(b, c) \in R$，就有 $(a, c) \in R$.

这样的三条性质并不是每个二元关系都能同时具有的，具有上述三条性质的二元关系在代数上特别重要，通常称为等价关系.

定义 1.2.2　设 R 是集合 A 上的二元关系，如果 R 具有下述性质：

1）反身性：aRa，对于 $\forall a \in A$；

2）对称性：如果 aRb，那么 bRa；

3）传递性：如果 aRb 且 bRc，那么 aRc.

那么称 R 是 A 上的一个**等价关系**. 通常用符号"$\sim$"表示等价关系. 当 $a \sim b$ 时，就说 a 与 b 是**等价**的.

例 1.2.5　集合 $M_n(\mathbf{R})$ 上的二元关系都是 $M_n(\mathbf{R})$ 上的等价关系.

$\sim_1 = \{(A,B) \mid$ 存在可逆阵 P、Q，使得 $B = PAQ\}$；

$\sim_2 = \{(A,B) \mid$ 存在可逆阵 P，使得 $B = P^{-1}AP\}$；

$\sim_3 = \{(A,B) \mid$ 存在可逆阵 P，使得 $B = P'AP\}$.

1.2.3　集合的分类

为了进一步描述等价关系的性质，我们引进集合分类的概念.

定义 1.2.3　设 A 是任一非空集合，$A_i (i \in I)$ 为 A 的非空子集组成的以 I 为指标集的集合 $\sum = \{A_i \mid A_i \subseteq A, A_i \neq \varnothing, i \in I\}$，如果具有条件：