大学数学简明教程
(第2版)

盛祥耀 陈魁 王飞燕 编著

清华大学出版社

大学数学简明教程

(第2版)

盛祥耀 陈魁 王飞燕 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书按微积分、线性代数、概率论与数理统计三篇简要地介绍了大学数学中的基本内容，其中微积分部分包括空间解析几何、向量代数、函数、极限、连续、微分学、积分学、微分方程、级数6章内容；线性代数部分包括行列式、矩阵、n维向量和线性方程组、特征值和特征向量4章内容；概率论与数理统计部分包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验6章内容。各篇均以简洁明了的文字讲述了相应课程的基本概念、基本定理和基本方法，以利于读者用较少的时间了解和掌握大学数学的基本内容.

本书可供大学及大专数学课时安排较少的学科或专业作为教材使用.

图书在版编目（CIP）数据

大学数学简明教程/盛祥耀，陈魁，王飞燕编著．—2版．—北京：清华大学出版社，2009.9
ISBN 978-7-302-17991-7

Ⅰ．大…　Ⅱ．①盛…　②陈…　③王…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 094436 号

责任编辑：刘　颖　王海燕
责任校对：王淑云
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
社　总　机：010-62770175
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座
邮　　编：100084
邮　　购：010-62786544
印　刷　者：北京市人民文学印刷厂
装　订　者：三河市兴旺装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：27.25　**字　数**：588 千字
版　　次：2009 年 9 月第 2 版　**印　次**：2009 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：36.00 元

第 2 版 前 言

《大学数学简明教程》从 2005 年出版至今已经 3 年多了. 从此教材的使用者所反馈的信息来看，教材中所包含的内容多了些，而且有些章节的要求偏深了些. 为了使此教材更好地适应当今的教学发展要求，我们对此教材进行了修改，出版第 2 版.

第 2 版与第 1 版相比较总体框架基本上没有变化，但文字上有些修改，在内容上作如下的一些调整：

1. 考虑到不少学生在中学没有学过极坐标，我们在微积分的附录中增设了极坐标内容，供学生选用.

2. 微积分部分删除了隐函数的二阶导数、曲率等内容.

3. 概率论与数理统计部分删除了二维随机变量的分布，调整了例题及习题中的难度.

编　者

2008 年 6 月　于清华园

第 1 版 前 言

我们编写的"微积分"、"线性代数"、"概率论与数理统计"三种内容的合订本是为下列一些读者所准备的：

- 需要上述三种教材内容，但又不需要像大学本科那样全面掌握的理工类各专业（简称为少学时）；
- 文科需要数学的各专业；
- 医科需要数学的专业；
- 专科理工类各专业；
- 各种培训班等.

我们所写入的内容并非对上述提到的各类各专业均需要，读者可以根据需要酌情删减.

由于各类各专业所需内容有所差别，较难估计出各类各专业的学时数，如果各类各专业的学时存在中位数的话，我们设想在 100 学时左右. 仅供参考.

编　者

于清华园

目录

第1篇 微积分

第1章 空间解析几何 向量代数 …… 3
第1节 二阶及三阶行列式 空间直角坐标系 …… 3
第2节 曲面、曲线的方程 …… 7
第3节 向量及其加减法 数与向量的乘积向量的坐标表示式 …… 12
第4节 数量积与向量积 …… 16
第5节 平面方程与直线方程 …… 20
习题1 …… 26

第2章 函数 极限 连续 …… 29
第1节 集合 映射 函数 …… 29
第2节 函数的基本形态 …… 35
第3节 极限的概念 …… 37
第4节 极限的四则运算 两个重要的极限 …… 41
第5节 无穷小的比较 …… 47
第6节 函数的连续性 …… 49
习题2 …… 54

第3章 微分学 …… 57
第1节 导数的概念 …… 57
第2节 函数的微分法 …… 62
第3节 函数的微分 隐函数的微分法参数表示的函数的微分法 …… 66
第4节 高阶导数 …… 71
第5节 多元函数的偏导数 …… 73
第6节 函数的增减性 极值 最值 …… 77
第7节 洛必达法则 …… 87
习题3 …… 91

第 4 章　积分学 …… 95
第 1 节　原函数与不定积分　不定积分的性质 …… 95
第 2 节　变量置换法与分部积分法 …… 99
第 3 节　定积分概念及其性质 …… 109
第 4 节　定积分的基本公式 …… 114
第 5 节　定积分的变量置换法与分部积分法 …… 117
第 6 节　反常积分 …… 122
第 7 节　定积分的应用 …… 125
第 8 节　二重积分 …… 131
习题 4 …… 139

第 5 章　微分方程 …… 144
第 1 节　微分方程的基本概念 …… 144
第 2 节　一阶微分方程的解法 …… 145
第 3 节　二阶常系数线性微分方程的解 …… 152
习题 5 …… 159

第 6 章　级数 …… 162
第 1 节　级数的基本概念及其性质 …… 162
第 2 节　级数收敛性的判别法 …… 165
第 3 节　幂级数 …… 170
习题 6 …… 177

习题答案 …… 179

附录 A　极坐标 …… 190

第 2 篇　线 性 代 数

第 1 章　行列式 …… 197
第 1 节　二、三阶行列式 …… 197
第 2 节　n 阶行列式 …… 206
习题 1 …… 215

第 2 章　矩阵 …… 219
第 1 节　矩阵的概念及运算 …… 219
第 2 节　可逆矩阵与逆矩阵 …… 229
第 3 节　分块矩阵 …… 233
第 4 节　矩阵的初等变换 …… 235
习题 2 …… 240

第 3 章　n 维向量和线性方程组 …… 244
第 1 节　高斯消元法 …… 244
第 2 节　n 维向量及其线性相关性 …… 249
第 3 节　向量组的秩及最大线性无关组 …… 255
第 4 节　矩阵的秩 …… 257
第 5 节　齐次线性方程组 …… 262
第 6 节　非齐次线性方程组 …… 267
习题 3 …… 273

第 4 章　特征值和特征向量 …… 277
第 1 节　矩阵的特征值和特征向量 …… 277
第 2 节　n 阶矩阵的对角化问题 …… 282
习题 4 …… 288

习题答案 …… 291

第 3 篇　概率论与数理统计

第 1 章　随机事件及其概率 …… 299
第 1 节　随机事件 …… 299
第 2 节　随机事件的概率 …… 303
第 3 节　条件概率 …… 307
第 4 节　全概率公式和逆概率公式 …… 310
第 5 节　事件的独立性 …… 313
习题 1 …… 316

第 2 章　随机变量及其分布 …… 320
第 1 节　随机变量 …… 320

第2节　离散型随机变量的概率分布…………………………………… 321
第3节　分布函数……………………………………………………… 330
第4节　连续型随机变量的概率分布…………………………………… 333
第5节　函数的分布…………………………………………………… 342
习题2 ……………………………………………………………… 347

第3章　随机变量的数字特征……………………………………… 352
第1节　数学期望……………………………………………………… 352
第2节　方差…………………………………………………………… 358
第3节　常见分布的数学期望与方差…………………………………… 360
第4节　随机变量的矩………………………………………………… 362
习题3 ……………………………………………………………… 363

第4章　数理统计的基本概念……………………………………… 366
第1节　总体和样本…………………………………………………… 366
第2节　抽样分布……………………………………………………… 368
习题4 ……………………………………………………………… 375

第5章　参数估计…………………………………………………… 376
第1节　参数的点估计………………………………………………… 376
第2节　参数的区间估计……………………………………………… 381
习题5 ……………………………………………………………… 386

第6章　假设检验…………………………………………………… 388
第1节　基本概念……………………………………………………… 388
第2节　正态总体数学期望的假设检验………………………………… 389
第3节　正态总体方差的假设检验……………………………………… 394
第4节　两种类型的错误……………………………………………… 397
习题6 ……………………………………………………………… 399

习题答案…………………………………………………………… 400

附录B　常用统计数表 …………………………………………… 409

第 1 篇　微　积　分

第 1 章　空间解析几何　向量代数
第 2 章　函数　极限　连续
第 3 章　微分学
第 4 章　积分学
第 5 章　微分方程
第 6 章　级数

第 1 章　空间解析几何　向量代数

第 1 节　二阶及三阶行列式　空间直角坐标系

1　二阶行列式

设 a_1, b_1, a_2, b_2 为实数，我们把 $a_1b_2 - a_2b_1$ 记为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

这叫做二阶行列式，a_1, a_2, b_1, b_2 称为行列式的元素，横排称为行，纵排称为列，二阶行列式含有两行两列.

二阶行列式可按下面所示来计算

$$\begin{vmatrix} a_1 & & b_1 \\ & & \\ a_2 & & b_2 \end{vmatrix}$$

实线上的两个元素的乘积取正号，虚线上的两个元素的乘积取负号.

例如计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 2 - 3\times(-2) = 8, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1.$$

用二阶行列式可解二元一次方程组，设

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

记 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$. 如果 $D \neq 0$，则二元一次方程组的解可

表示为

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{D_y}{D}.$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases}3x-2y-4=0,\\x+y-3=0.\end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}3&-2\\1&1\end{vmatrix}=5\neq0,D_x=\begin{vmatrix}4&-2\\3&1\end{vmatrix}=10,D_y=\begin{vmatrix}3&4\\1&3\end{vmatrix}=5.$

故得

$$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}=2,\\[2mm]y=\dfrac{D_y}{D}=1.\end{cases}$$

2 三阶行列式

记

$$D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3.$$

则称上式为三阶行列式，其中 $a_i,b_i,c_i(i=1,2,3)$ 称为元素，横排称为行，纵排称为列. 它的计算方法如图 1-1所示：实线上 3 个元素乘积取正号，虚线上 3 个元素的乘积取负号.

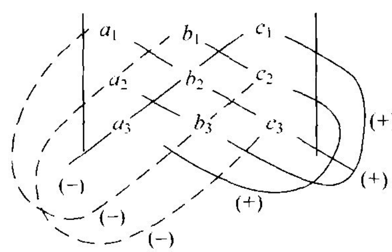

图 1-1

有了三阶行列式，则三元一次线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}\tag{1.1.2}$$

的解可用三阶行列式表示.

令
$$D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}.$$

当 $D\neq0$ 时，则方程组(1.1.2)的解为

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}.$$

例 2　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 7 & 10 & 19 \\ 11 & 2 & 13 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 19 \\ 11 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 7\times 2\times 0+11\times 5\times 19+4\times 3\times 10$$
$$-19\times 2\times 4-3\times 5\times 7-0\times 11\times 10=908.$$

例 3　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+3y-z=-1, \\ x-y+z=5, \\ 3x+y-z=3. \end{cases}$$

解
$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2\times(-1)\times(-1)+1\times 1\times(-1)+3\times 1\times 3$$
$$-3\times(-1)\times(-1)-3\times 1\times(-1)-2\times 1\times 1=8.$$

同理可得

$$D_x=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=16,\quad D_y=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-8,$$
$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=16.$$

解得

$$x=\frac{D_x}{D}=2,\quad y=\frac{D_y}{D}=-1,\quad z=\frac{D_z}{D}=2.$$

三阶行列式也可用二阶行列式来计算：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$
$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$$
$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

3 空间直角坐标系

在空间取三条相互垂直且相交于一点的数轴(一般讲它们的单位长度相同),其交点是这些数轴的原点,记为O.这三个数轴分别叫做x轴、y轴和z轴.一般x轴和y轴放置在水平面上,z轴垂直于水平面.它们的方向规定如下:从面对正z轴的方向看,x轴的正向以逆时针方向转$\frac{\pi}{2}$时,正好是y轴的正向.这种放置法称为右手系统,也可比喻为:当我们右手的食指、中指和大拇指相互垂直时,若食指指向x轴的正向,中指指向y轴的正向,那么大拇指就指向z轴的正向,这样的三条坐标轴就组成空间直角坐标系.交点O称为坐标原点.每两条坐标轴所组成的平面称为坐标面.x轴与y轴组成的平面称为xy坐标面.类似有yz坐标面、zx坐标面.这些坐标面把空间分成8个部分,每一部分称为卦限,如在$x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$的卦限称为第一卦限.

数组与点的对应关系:设点M为空间内任意一点,过点M分别作与x轴、y轴和z轴垂直的平面,这些平面分别交x轴、y轴和z轴于点P,Q和R.设x,y和z分别是P,Q和R在其相应的坐标轴上的坐标.于是点M就对应一组有序的数组x,y,z,用(x,y,z)表示.(x,y,z)称为点M的坐标.它们分别称为x坐标、y坐标和z坐标.反之,任给出一组有序的数组x,y和z,分别在x轴,y轴和z轴上取得对应点P,Q和R,过P,Q和R三个点依次作垂直于坐标轴的平面,则它们交于一点M.这样一组有序数组就确定了空间内惟一的一个点M,由上述的规则我们建立了空间一点与一组有序数x,y和z之间的一一对应关系,并用$M(x,y,z)$表示点M.

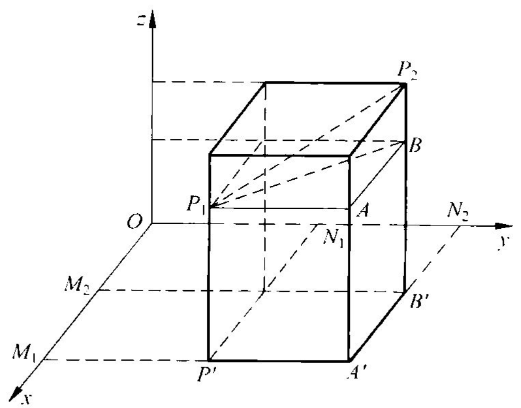

图 1-2

设两点$P_1(x_1,y_1,z_1)$和$P_2(x_2,y_2,z_2)$,则P_1与P_2之间的距离$|P_1P_2|$为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

上述结果可从图1-2中得到

$$|P_1P_2|^2=|P_1B|^2+|BP_2|^2=|P_1A|^2+|AB|^2+|BP_2|^2.$$

又因为$|P_1A|=|P'A'|=|N_2N_1|=|y_2-y_1|$,$|AB|=|x_2-x_1|$,$|BP_2|=|z_2-z_1|$,代入后得

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例4 求$P_1(-1,-1,3)$与$P_2(1,2,0)$之间的距离.

解　$|P_1P_2|=\sqrt{[(-1)-1]^2+(-1-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{22}$.

第 2 节　曲面、曲线的方程

1　曲面的方程

在平面解析几何中我们知道，变量 x 与 y 之间的一个方程记为$F(x,y)=0$，一般地表示了一条曲线. 同样在空间解析几何中，变量 x,y 与 z 之间的一个方程，记为 $F(x,y,z)=0$，一般地表示了一张曲面.

定义　设在直角坐标系中的一张曲面 S 与三个变量 x,y,z 之间的一个方程 $F(x,y,z)=0$ 有下列的对应关系：在曲面 S 上任意一点 P 的坐标(x,y,z)满足方程 $F(x,y,z)=0$；而不在曲面 S 上任意一点的坐标不满足方程 $F(x,y,z)=0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 叫做曲面 S 的方程，而曲面 S 叫做方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

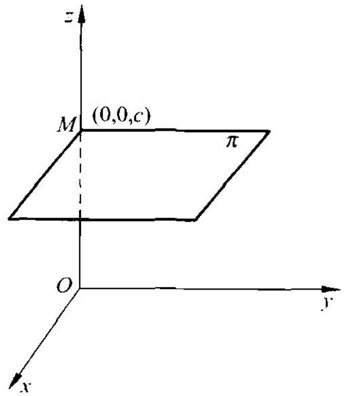

图　1-3

(1) 与坐标面平行的平面的方程

以平行 xy 坐标面的平面为例（见图 1-3）. 求过点 $M(0,0,c)$且平行于 xy 坐标面的平面 π 的方程.

因为平面 π 上任何一点的 z 坐标均为 c，而不在平面 π 上的点的 z 坐标均不等于 c，所以方程

$$z=c \tag{1.2.1}$$

就是平面 π 的方程. 方程(1.2.1)的特点是方程中缺少变量 x 与 y. 特别地，方程$z=0$就是 xy 坐标面的方程.

同理可知，$y=c$，$x=c$ 分别是平行于 zx 坐标面，yz 坐标面的方程. 而 $y=0$，$x=0$ 分别是 zx 与 yz 坐标面的方程.

(2) 球心在点 $P(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的球面的方程

设点 $M(x,y,z)$是球面上任意一点，显然有$|PM|=R$，即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{1.2.2}$$

反之，不在球面上的任意一点 $M(x,y,z)$，$|PM|\neq R$，即点 $M(x,y,z)$的坐标不满足方程(1.2.2)，所以方程(1.2.2)是球面的方程.

当球心在原点 $P=O(0,0,0)$时，则球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{1.2.3}$$

将式(1.2.2)展开得

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2=0.$$

可见球面方程的特点：①是关于 x,y,z 的二次方程，且 x^2,y^2,z^2 的系数相等；②缺少 xy，

yz 和 zx 项. 我们要问具备①与②特点的方程是否就是球面的方程呢？回答是否定的. 请看下例①.

例 1 问下列方程的图形是球面吗？

① $x^2+y^2+z^2-2x+2y-z+3=0$;

② $x^2+y^2+z^2=2Rx$(R 为大于 0 的常数).

解 ① 配方得

$$(x-1)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-1-1-\frac{1}{4}+3=0,$$

即

$$(x-1)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}.$$

显然没有这样的实数 x,y,z 能使上式成立，因而它不代表任何图形，当然也不是球面的方程.

② 配方得

$$(x-R)^2+y^2+z^2=R^2.$$

所以所给方程为球心在$(R,0,0)$，半径为 R 的球面方程.

(3) 母线平行于坐标轴的柱面方程

动直线 L 沿曲线 C 平行移动所形成的曲面称为柱面，动直线 L 称为母线，曲线 C 称为准线. 我们着重介绍母线平行于坐标轴，而准线在垂直该坐标轴的坐标面上的柱面方程.

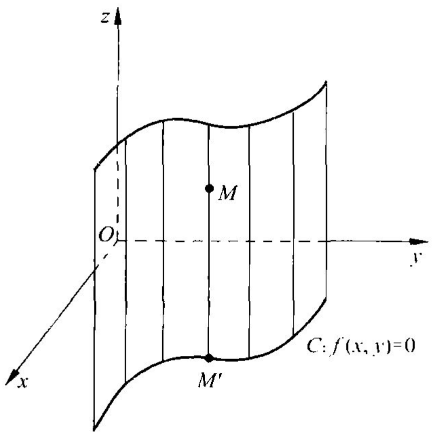

图 1-4

设准线 C 在 xy 坐标面上，其方程为 $f(x,y)=0$ (如图 1-4). $M(x,y,z)$为柱面上任意一点，过 M 作平行于 z 轴的直线交 xy 坐标面于点 $M'(x,y,0)$. 由假设及柱面方程的定义可知 M'必在准线 C: $f(x,y)=0$ 上，所以点 M'的坐标满足方程 $f(x,y)=0$. 由于该方程不含 z，所以点 $M(x,y,z)$也满足方程 $f(x,y)=0$. 而不在柱面上的点且过该点作平行于 z 轴的直线与 xy 坐标面的交点必不在曲线 C 上，也就是说不在柱面上的点的坐标不满足方程 $f(x,y)=0$. 所以不含变量 z 的方程

$$f(x,y)=0$$

在空间中表示为以 xy 坐标面上的曲线为准线，母线平行于 z 轴的柱面.

类似地，不含变量 x 或 y 的方程

$$f(y,z)=0 \quad 或 \quad f(x,z)=0,$$

在空间中表示以 yz 坐标面上或 xz 坐标面上的曲线为准线，母线平行于 x 轴或 y 轴的柱面