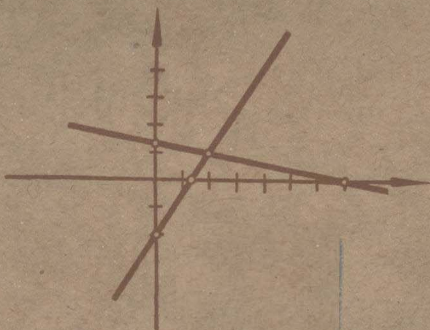
初級中学課本

代　数

DAISHU

下　册



人民教育出版社

目　录

第六章　一元一次方程

I　方程的两个基本性質

69. 一元方程的根的个数　含有一个未知数的方程叫做**一元方程**. 一元方程的根的个数可以有下列各种不同的情況:

(1) 沒有根.

例如, 在方程 $x+1=x+2$ 里, 不論用什么数代替 x, 它的左右两边的值都不相等, 所以这个方程沒有根.

(2) 有一个根.

例如, 在方程 $x-5=0$ 里, 用 5 代替 x, 它的左右两边的值相等, 而用 5 以外的任何数代替 x, 它的左右两边的值都不相等, 所以这个方程有一个根, 并且只有一个根, 就是 $x=5$.

(3) 有几个根.

例如, 在方程 $(x-5)(x-2)=0$ 里, 用 5 代替 x, 它的左边的第一个因式等于零, 用 2 代替 x, 它的左边的第二个因式等于零. 因此, 不論用 5 或者 2 代替 x, 它的左边的值都等于零, 而和右边相等; 用 5 和 2 以外的任何数代替 x, 它的左边的两个因式的值都不等于零, 因此, 它的左边的值也不等于零, 而和右边不相等. 由此可見, 这个方程有两个根, 并且只有两个根, 就是 $x_1=5$, $x_2=2$.

同样我們可以知道，方程 $(x-5)(x-2)(x+4)=0$ 有三个根，并且只有三个根，就是 $x_1=5$, $x_2=2$, $x_3=-4$.

(4) 有无数个根.

例如，在方程 $(x+1)(x-1)=x^2-1$ 里，不論用什么数代替 x, 它的左右两边的值都相等，所以这个方程有无数个根. 事实上，这是一个恒等式.

70. 同解方程 我們来看下面的两个方程：

$$3x-5=1, \tag{1}$$

$$\frac{x}{2}+1=2. \tag{2}$$

利用算术中加减乘除四种运算的已知数和得数間的关系，我們可以得出，方程 (1) 的解是 $x=2$, 方程 (2) 的解也是 $x=2$, 方程 (1) 的解和方程 (2) 的解完全相同.

再来看下面的两个方程：

$$x^2=4, \tag{3}$$

$$(x-2)(x+2)=0. \tag{4}$$

因为 2 和 -2 的平方都等于 4, 而 2 和 -2 以外的任何数的平方都不等于 4, 所以方程 (3) 的解是 $x_1=2$, $x_2=-2$.

因为用 2 或者 -2 代替方程 (4) 里的 x, 它的左右两边的值都相等，而用 2 和 -2 以外的任何数代替方程 (4) 里的 x, 它的左右两边的值都不相等，所以方程 (4) 的解也是 $x_1=2$, $x_2=-2$.

因此，方程 (3) 的解和方程 (4) 的解完全相同.

如果两个方程的解完全相同，也就是說，如果第一个方程的解都是第二个方程的解，并且第二个方程的解也都是第一个方程的解，那末这两个方程就叫做**同解方程**．例如，方程(1)和方程(2)是同解方程，方程(3)和方程(4)也是同解方程，但是方程(1)和方程(3)并不是同解方程，因为虽然方程(3)的一个解 $x_1=2$ 是方程(1)的解，但是方程(3)的另一个解 $x_2=-2$ 并不是方程(1)的解．

很明显，如果第一个方程和第二个方程同解，第二个方程和第三个方程同解，那末第一个方程和第三个方程也同解．例如，方程 $3x-5=1$ 和方程 $3x=6$ 同解，方程 $3x=6$ 和方程 $x=2$ 同解，方程 $3x-5=1$ 和方程 $x=2$ 也同解．

在解方程的时候，我們需要把已知的方程逐步变形成为比較簡单的方程，直到得出最簡单的形式 $x=a$ 为止（如果方程有解的話）．但是在进行变形的时候，每次所得的方程都必須和变形以前的方程是同解方程．这就是說，在进行每一次变形的时候，都要保証，既沒有失去任何的解，也沒有增加任何的解，因为只有这样，才能保証最后所得的方程的解和已知方程的解完全相同．

把一个方程变形成为和它同解的方程，是根据方程的两个基本性質来进行的．下面我們就举例来說明这两个性質．

71. 方程的第一个基本性質 **如果方程的两边都加上同一个数或者同一个整式，那末所得的方程和原方程是同解方程．**

首先我們来說明，在一个方程的两边都加上同一个数或者同一个整式，方程不会失去任何的解.

例如，方程

$$3x-2=10 \tag{1}$$

的解是 $x=4$. 用 4 代替 x，它的左右两边的值相等：$10=10$.

如果在方程(1)的两边都加上同一个数，例如 -6，那末方程(1)就成为

$$(3x-2)+(-6)=10+(-6). \tag{2}$$

$x=4$ 还是方程(2)的解. 这是因为用 4 代替 x，方程(2)就成为 $10+(-6)=10+(-6)$，它的左右两边的值相等.

如果在方程(1)的两边都加上同一个整式，例如 $2x-5$，那末方程(1)就成为

$$(3x-2)+(2x-5)=10+(2x-5). \tag{3}$$

$x=4$ 还是方程(3)的解. 这是因为用 4 代替 x，方程(3)就成为 $10+3=10+3$，它的左右两边的值相等.

其次我們再来說明，在一个方程的两边都加上同一个数或者同一个整式，方程不会增加任何的解. 这很容易用反証法来說明.

我們仍旧来看方程

$$3x-2=10 \tag{1}$$

和方程

$$(3x-2)+(-6)=10+(-6). \tag{2}$$

假如在方程(1)变形为方程(2)的时候，增加了某一个解，

那末很明显，在方程(2)的两边都加上同一个数$+6$而把它变形为方程(1)的时候，将要失去这一个解．但是从上面的説明，我們知道这是不可能的．

同样，把方程

$$3x-2=10 \tag{1}$$

变形为

$$(3x-2)+(2x-5)=10+(2x-5) \tag{3}$$

的时候，也不会增加任何的解．因为假如增加了某一个解，那末在方程(3)的两边都加上同一个整式$-2x+5$而把它变形为方程(1)的时候，将要失去这一个解，这也是不可能的．

由上面的説明可以看出，在方程的两边都加上同一个数或者同一个整式，所得的方程和原方程是同解方程．

現在我們举例来説明方程的第一个基本性質在解方程的时候的应用．

例1　解方程：　$x-7=15.$

解　方程的两边都加上7，得

$$x=15+7.$$

就是　$$x=22.$$

例2　解方程：　$7x=6x-4.$

解　方程的两边都加上$-6x$，得

$$7x-6x=-4.$$

就是　$$x=-4.$$

从上面的例題可以看出：方程中的任何一項，都可以把它

的符号改变后，从方程的一边移到另一边.

例如，在例 1 中，我們可以把 -7 改变成 $+7$ 后，从左边移到右边；在例 2 中，我們可以把 $+6x$ 改变成 $-6x$ 后，从右边移到左边.

把方程中的項改变符号后，从一边移到另一边，叫做**移項**. 移項以后所得的方程和原方程是同解方程. 在解方程的时候，我們常常利用移項的方法，把方程中含有未知数的項移到方程的左边，不含未知数的項移到方程的右边.

例 3 解方程：$3x-4=2x+7$.

解 把不含未知数的項移到右边，得

$$3x=2x+7+4.$$

把含有未知数的項移到左边，得

$$3x-2x=7+4.$$

就是 $$x=11.$$

例 4 解方程：$5(x+2)=4(x-3)$.

解 去括号，得

$$5x+10=4x-12.$$

移項，得

$$5x-4x=-12-10.$$

就是 $$x=-22.$$

72. 方程的第二个基本性質 **如果方程的两边都乘以不等于零的同一个数，那末所得的方程和原方程是同解方程.**

我們先来說明，把一个方程的两边都乘以不等于零的同

一个数，方程不会失去任何的解.

例如，方程

$$3x-2=10 \tag{1}$$

的解是 $x=4$. 用 4 代替 x，它的左右两边的值相等：$10=10$.

如果把方程(1)的两边都乘以不等于零的同一个数，例如 $\frac{1}{3}$，那末方程(1)就成为

$$\frac{1}{3}(3x-2)=\frac{1}{3}\times 10. \tag{2}$$

$x=4$ 还是方程(2)的解. 这是因为用 4 代替 x，方程(2)就成为 $\frac{1}{3}\times 10=\frac{1}{3}\times 10$，它的左右两边的值相等.

現在我們再来說明，把一个方程的两边都乘以不等于零的同一个数，方程不会增加任何的解.

我們仍旧来看方程

$$3x-2=10 \tag{1}$$

和方程

$$\frac{1}{3}(3x-2)=\frac{1}{3}\times 10. \tag{2}$$

假如在方程(1)变形为方程(2)的时候，增加了某一个解，那末把方程(2)的两边都乘以同一个数 3 而把它变形为方程(1)的时候，將要失去这一个解. 但是从上面的說明，我們知道这是不可能的.

由上面的說明可以看出，如果把方程的两边都乘以不等于零的同一个数，那末所得的方程和原方程是同解方程.

现在我們举例来說明方程的第二个基本性質在解方程的时候的应用.

例 1　解方程: $\frac{x}{3}=5$.

解　方程的两边都乘以 3, 得

$$x=15.$$

例 2　解方程: $-4x=6.8$.

解　方程的两边都乘以$-\frac{1}{4}$(就是除以-4), 得

$$x=-1.7.$$

例 3　解方程 $\frac{x+9}{2}=3$.

解　方程的两边都乘以 2, 得

$$x+9=6.$$

移項, 得

$$x=-3.$$

例 4　解方程: $7x-25=3x-5$.

解　移項, 得

$$7x-3x=-5+25.$$

就是 $$4x=20.$$

方程的两边都乘以$\frac{1}{4}$(就是除以 4), 得

$$x=5.$$

在应用方程的第二个基本性質的时候, 要特别注意这个条件: 用作乘数的数不等于零. 事实上, 如果方程的两边都乘

以零，那末方程就会增加解．例如，方程

$$x-2=3 \tag{1}$$

只有一个解，就是 $x=5$．如果方程(1)的两边都乘以零，那末得到新的方程：

$$(x-2)\times 0=3\times 0. \tag{2}$$

我們可以看到，不但 5 是方程(2)的解，并且任何其他的数也都是方程(2)的解，因为不論 x 等于任何的数，方程(2)的左右两边的值都相等：$0=0$．

在应用方程的第二个基本性質的时候，还要注意用来乘方程两边的应当是一个数(不等于零的)．如果方程的两边都乘以同一个整式，那末方程就有增加解的可能．例如，方程

$$x-2=3 \tag{1}$$

只有一个解 $x=5$．如果方程(1)的两边都乘以整式 $x-1$，那末得到新的方程：

$$(x-2)(x-1)=3(x-1). \tag{3}$$

$x=5$ 还是方程(3)的解．因为当 $x=5$ 的时候，方程(3)的左右两边的值相等：$3\times 4=3\times 4$．但是 $x=1$ 也是方程(3)的解，因为当 $x=1$ 的时候，方程(3)的左右两边的值也相等：$-1\times 0=3\times 0$．这就是説，把方程(1)的两边都乘以整式 $x-1$，方程(1)的解 $x=5$ 虽然沒有失去，但是增加了一个新的解 $x=1$．由于把一个方程变形而增加的解，叫做这个方程的**增根**．例如，把方程(1)的两边都乘以整式 $x-1$，就产生增根 $x=1$．

习题三十五

1. 說明下列方程的根的个数：

(1) $x+2=3$;　　(2) $x+2=x+4$;

(3) $x^2=9$;　　(4) $x+3=3+x$.

2. (1) 利用算术中加减乘除四种运算的已知数和得数間的关系，解方程：$\frac{x}{3}+2=4$ 和 $3x-8=10$.

(2) 方程$\frac{x}{3}+2=4$和方程 $3x-8=10$ 是不是同解方程？

3. (1) 求証 $x=3$ 和 $x=-5$ 都是方程$(x-3)(x+5)=0$的解.

(2) 方程 $x-3=0$ 和方程 $(x-3)(x+5)=0$ 是不是同解方程？

(3) 方程 $(x-3)(x+5)=0$ 和方程 $x+5=0$ 是不是同解方程？

4. 根据方程的第一个基本性質，証明下列各題里的两个方程是同解方程：

(1) $2x-1=3$ 和 $2x=4$;　　(2) $7+5x=12$ 和 $5x=5$;

(3) $3x=1+x$ 和 $2x=1$;　　(4) $3x-5=11-2x$ 和 $5x=16$.

5. 用移項的方法解下列各方程：

(1) $x+15=23$;　　(2) $x-1.8=3.2$;

(3) $2x-\frac{2}{3}=x+\frac{1}{6}$;　　(4) $4x+7=3x$;

(5) $2(x-5)=x-9$;　　(6) $7(1+x)=6(2+x)$.

6. 根据方程的第二个基本性質，証明下列各題里的两个方程是同解方程：

(1) $\frac{x-1}{2}=5$ 和 $x-1=10$;

(2) $6x+2=14$ 和 $3x+1=7$;

(3) $-3(x-2)=-1$ 和 $x-2=\frac{1}{3}$;

(4) $\frac{2}{3}(x-5)=4x$ 和 $x-5=6x$.

7. 把方程的两边同乘以或者同除以一个适当的数，解下列各方程：

(1) $5x=-6$; (2) $4x=0.12$;

(3) $\frac{x}{2}=8$; (4) $\frac{x}{3}=\frac{5}{6}$;

(5) $-x=2$; (6) $-\frac{x}{6}=-\frac{1}{2}$;

(7) $\frac{2}{3}x=1$; (8) $\frac{3x}{4}=\frac{2}{3}$.

8. 根据方程的两个基本性质，解下列各方程：

(1) $2x+3=11$; (2) $\frac{x-5}{3}=4$;

(3) $2x-1=5x-7$; (4) $\frac{1-3x}{2}=8$;

(5) $x^2-3x=x^2+6$; (6) $(x+2)^2=(x+4)(x-4)$.

9. 某人解方程 $3(x-4)=2(x-4)$，得出下面錯誤的結果：

把方程的两边都除以 $x-4$（就是都乘以$\frac{1}{x-4}$），得

$$3=2.$$

他的解法錯在什么地方？应当怎样做才正确？

10. 下列各題里的两个方程是不是同解方程？为什么？

(1) $\frac{3x+4}{2}=\frac{4x-5}{3}$和 $3(3x+4)=2(4x-5)$;

(2) $\frac{x}{x-5}=\frac{5}{x-5}$ 和 $x=5$;

(3) $5(x+2)=20$ 和 $x+2=4$;

(4) $x(x+2)=4x$ 和 $x+2=4$;

(5) $x+5=3$ 和 $x+5-5=3-5$;

(6) $x+5=3$ 和 $x+5-x=3-x$

II 一元一次方程的解法和应用

73. 一元一次方程 我們来看下面的方程:

$$3x+5=7-2x.$$

把这个方程里含有未知数的項移到左边,不含未知数的項移到右边,得

$$3x+2x=7-5,$$

合并同类項,就得

$$5x=2.$$

这个方程含有未知数的項里,未知数的次数是一次. 象上面这样,把一个方程移項和合并同类項以后,如果含有未知数的項里,未知数的次数是一次,那末这个方程就叫做**一次方程**.

含有一个未知数的一次方程,叫做**一元一次方程**. 例如,方程 $3x+5=7-2x$ 是一元一次方程; 方程 $x^2-3x=x^2+6$ 也是一元一次方程,因为把这个方程移項和合并同类項以后,就变形为 $-3x=6$. 但是方程 $x^2=2+x$ 就不是一元一次方程,因为这个方程移項和合并同类項以后,含有未知数的項里,未知数的次数不只是一次; 方程 $x+y=7$ 也不是一元一次方程,因为这个方程含有两个未知数 x 和 y.

74. 一元一次方程的解法 現在我們举例来說明一元一次方程的解法.

例 1 解方程:

$$3x-8+x=2x+16-6x.$$

解 移項，得

$$3x+x-2x+6x=16+8.$$

合并同类項，得

$$8x=24.$$

两边都除以 8，得

$$x=3.$$

因为上面的解法中的每一步变形后所得的方程都和变形前的方程同解，所以 $x=3$ 就是原方程的根.

为了檢驗解方程的时候計算有沒有錯誤，可以把求得的根代替原方程里的未知数，檢查方程左右两边的值是不是相等(§9).

檢驗：用 3 代替原方程中的 x，得

$$左边=9-8+3=4,$$

$$右边=6+16-18=4.$$

所以 3 是原方程的根.

例 2 解方程：

$$2(x-2)-3(2x-1)=7(1-x)-5(x+2).$$

解 去括号，得

$$2x-4-6x+3=7-7x-5x-10.$$

移項，得

$$2x-6x+7x+5x=7-10+4-3.$$

合并同类項，得

$$8x=-2.$$

两边都除以8，得

$$x=-\frac{1}{4}.$$

例3 解方程：

$$\frac{2x-1}{2}-\frac{2x+5}{3}=\frac{6x-7}{4}-1.$$

解这个方程可以先把方程的两边乘以一个适当的数，使所得的方程沒有1以外的分母. 很明显，把方程的两边乘以各个分母的最小公倍数最为簡便. 方程的这种变形，通常叫做去分母.

解 去分母，得

$$6(2x-1)-4(2x+5)=3(6x-7)-12.$$

去括号，得

$$12x-6-8x-20=18x-21-12.$$

移項，得

$$12x-8x-18x=-21-12+6+20.$$

合并同类項，得

$$-14x=-7.$$

两边都除以-14，得

$$x=\frac{1}{2}.$$

从上面的例子可以看出，解一元一次方程的一般步驟是：

1. 去分母.

2. 去括号.

3. 移項.

4. 合并同类項.

5. 方程的两边都除以未知数的系数.

由于方程的形式不同，所以在解方程的时候，上面的几个步驟并不一定都要用到(例如，上面的例 1 就用不到去分母和去括号)，并且有时也可以先合并同类項再移項(如例 4)，或者先去括号再去分母(如例 5).

例 4　解方程:

$$(x-1)^2-(x+3)(x-3)=(x+1)(x+2)-(x-1)(x+4).$$

解　原方程就是

$$(x^2-2x+1)-(x^2-9)=(x^2+3x+2)-(x^2+3x-4).$$

去括号，得

$$x^2-2x+1-x^2+9=x^2+3x+2-x^2-3x+4.$$

合并同类項，得

$$-2x+10=6.$$

移項和合并同类項，得

$$-2x=-4.$$

两边都除以 -2，得

$$x=2.$$

例 5　解方程:

$$2\left[\frac{4}{3}x-\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{4}x.$$