全国高等医药院校药学类规划教材 配套教材

# 高等数学
# 学习指导

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

主编 刘艳杰

中国医药科技出版社

全国高等医药院校药学类规划教材　配套教材

# 高等数学学习指导

主　编　刘艳杰

编　委　（以姓氏笔画为序）

王　贺（沈阳药科大学）

刘艳杰（沈阳药科大学）

刘桂娟（泰山医学院）

孙爱玲（中国药科大学）

张晓萍（沈阳药科大学）

项荣武（沈阳药科大学）

姜希伟（沈阳药科大学）

黄榕波（广东药学院）

中国医药科技出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学学习指导/刘艳杰主编．—北京：中国医药科技出版社，2009. 8

全国高等医药院校药学类规划教材配套教材

ISBN 978-7-5067-4322-8

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 高等数学—医学院校—教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 123163 号

**美术编辑**　陈君杞

**版式设计**　郭小平

出版　中国医药科技出版社

地址　北京海淀区文慧园北路甲 22 号

邮编　100082

电话　发行：010-62227427　邮购：010-62236938

网址　www. cspyp. cn

规格　787×1092mm　1/16

印张　19

字数　391 千字

版次　2009 年 8 月第 1 版

印次　2009 年 8 月第 1 次印刷

印刷　南宫市印刷有限责任公司

经销　全国各地新华书店

书号　ISBN 978-7-5067-4322-8

**定价　35. 00 元**

# 全国高等医药院校药学类规划教材常务编委会

# 出 版 说 明

全国高等医药院校药学类专业规划教材是目前国内体系最完整、专业覆盖最全面、作者队伍最权威的药学类教材。随着我国药学教育事业的快速发展，药学及相关专业办学规模和水平的不断扩大和提高，课程设置的不断更新，对药学类教材的质量提出了更高的要求。

全国高等医药院校药学类规划教材编写委员会在调查和总结上轮药学类规划教材质量和使用情况的基础上，经过审议和规划，组织中国药科大学、沈阳药科大学、广东药学院、北京大学药学院、复旦大学药学院、四川大学华西药学院、北京中医药大学、西安交通大学药学院、山东大学药学院、山西医科大学药学院、第二军医大学药学院、山东中医药大学、上海中医药大学和江西中医学院等数十所院校的教师共同进行药学类第三轮规划教材的编写修订工作。

药学类第三轮规划教材的编写修订，坚持紧扣药学类专业本科教育培养目标，参考执业药师资格准入标准，强调药学特色鲜明，体现现代医药科技水平，进一步提高教材水平和质量。同时，针对学生自学、复习、考试等需要，紧扣主干教材内容，新编了相应的学习指导与习题集等配套教材。

本套教材由中国医药科技出版社出版，供全国高等医药院校药学类及相关专业使用。其中包括理论课教材 82 种，实验课教材 38 种，配套教材 10 种，其中有 45 种入选普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

全国高等医药院校药学类规划教材

编写委员会

2009 年 8 月 1 日

# 前　言

本书是全国高等医药院校药学类规划教材《高等数学》的配套学习指导书，是教材的细化和延伸。本书编写目的是为了使学生更扎实地掌握高等数学的知识和方法，培养学生分析问题和解决问题的能力，同时，也便于教师更好地实施高等数学课程的教学。

高等数学在各个学科领域中的重要性是有目共睹的，其教学的顺利完成既需要教师的课堂教学和指导，又需要学生独立思考、认真做好课后练习、消化掌握课堂所学知识。学生必须亲自动手，独立完成一定数量的、不同形式的练习题，才能掌握高等数学的基本概念、原理和方法，把握其知识要点和解题技巧，培养正确的思维方法，提高分析问题的逻辑思维能力。

本书共分十三章。第一章到第十一章，每章内容分为：学习基本要求和重点与难点，要点精讲、内容提要和典型例题，教材中习题详解，综合测试题及参考答案四个部分。第十二章、第十三章分别是高等数学Ⅰ模拟试题（共六套试题）及参考答案和高等数学Ⅱ模拟试题（共六套试题）及参考答案。

本书由沈阳药科大学数学教研室刘艳杰教授主编并编写第一章和第六章，参加编写的有广东药学院黄榕波副教授（第四、五章）、泰山医学院刘桂娟教授（第三章）、中国药科大学孙爱玲副教授（第七章）及沈阳药科大学数学教研室张晓萍老师（第八章）、项荣武老师（第九章）、王贺老师（第二、十一章）、姜希伟老师（第十、十一章的编写）。各章要点精讲中的框图设计由姜希伟老师编制，整体设计和全书统稿由刘艳杰教授完成。

本书主要适合于高等医药院校药学专业的教师、研究生、本科生、函授生使用，是学习《高等数学》课程的一本有价值的参考书。

由于编者水平有限，书中错误难免，恳请斧正。

**编　者**

**2009 年 5 月 20 日**

CONTENTS 目 录

CHAPTER 第一章

# 极　限

## 学习基本要求和重点与难点

### 一、学习基本要求

（1）理解函数的概念，掌握函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性等四大性质；理解复合函数、反函数以及初等函数的概念和性质。

（2）理解极限的概念，掌握函数左、右极限概念以及极限存在定理；掌握极限的性质及四则运算法则；掌握极限存在的两个准则并会用它们求极限；掌握利用两个重要极限求极限的方法；理解无穷小与无穷大及其无穷小阶的概念，会用等价无穷小替换求极限。

（3）理解函数连续和间断点的概念，掌握函数连续的判定方法，会计算函数的间断点；了解初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质；会应用最大值、最小值和介值定理证明问题。

### 二、重点与难点

重点是掌握极限的概念、性质和计算方法。

难点是函数在某一点连续性的判定以及间断点的分类。

## 要点精讲、内容提要和典型例题

### 一、要点精讲

本章要点内容见图 1－1 和图 1－2。

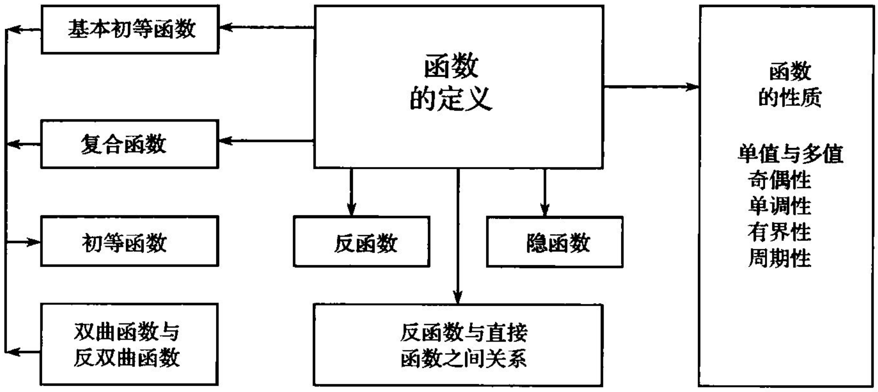


图 1－1

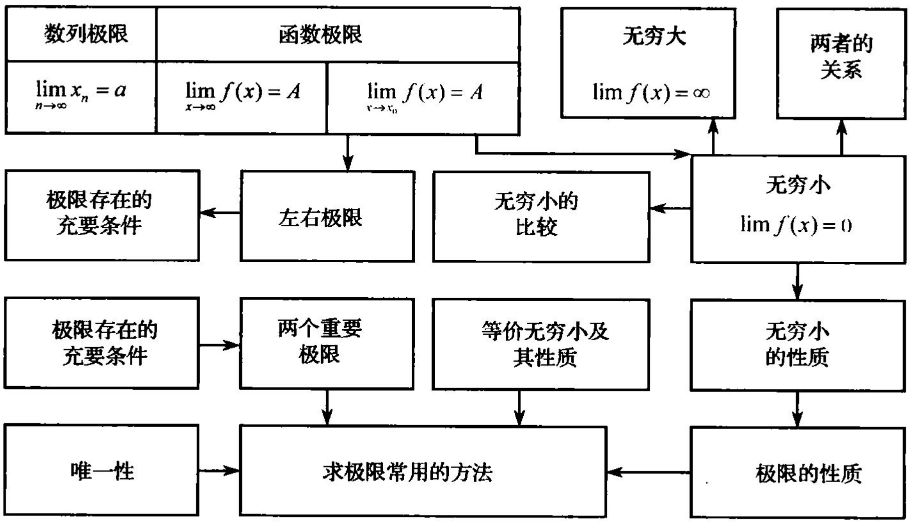


图 1－2

## 二、内容提要

### （一）极限

#### 1. 数列极限的定义

（1）如果当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 无限趋于一个确定的常数 $a$，则称常数 $a$ 是数列 $x_n$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，或称数列 $x_n$ 收敛于 $a$，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

（2）如果对于任意给定的正数 $\varepsilon$（不论它有多么小），总存在正整数 $N$，使得对于 $n>N$ 一切的 $x_n$，不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 都成立，则称常数 $a$ 是数列 $x_n$ 的极限，或称数列 $x_n$ 收敛于 $a$，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$；否则，称数列 $x_n$ 没有极限，或称数列是发散的。

#### 2. 函数极限的定义

（1）当 $x\to x_0$ 时函数的极限

① 如果当 $x$ 无限趋于 $x_0$，即 $x\to x_0\,(x\neq x_0)$ 时，对应的函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定

的常数$A$，那么称常数$A$是函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

② 若对任意给定的正数$\varepsilon$（不论它有多么小），总存在正数$\delta$，使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切$x$，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么，常数$A$称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

（2）当$x\to\infty$时函数的极限

① 如果在$x\to\infty$的过程中，对应的函数值$f(x)$无限趋于确定的常数$A$，那么，$A$称为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

② 若对任意给定的正数$\varepsilon$（不论它有多么小），总存在正数$X$，使其对于适合不等式$|x|>X$的一切$x$，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，那么，常数$A$称为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

（3）左极限与右极限

① 左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$表示$x$从$x_0$的左侧$(x<x_0)$趋向于$x_0$时，函数$f(x)$的极限等于$A$。

② 右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$表示$x$从$x_0$的右侧$(x>x_0)$趋向于$x_0$时，函数$f(x)$的极限等于$A$。

极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$存在的充分必要条件是：

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

（4）无穷小

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，则称$f(x)$是当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小。

（5）无穷大

如果当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，$f(x)$的绝对值$|f(x)|$可以无限增大，则称$f(x)$是当$x\to x_0(x\to\infty)$时无穷大，记为$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$。

（6）无穷小的比较

设$\alpha$和$\beta$是当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小

① 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记为$\beta=0(\alpha)$。

② 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小。

③ 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，称$\beta$是比$\alpha$同阶的无穷小。

特别地，如果$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，称$\beta$是比$\alpha$等价无穷小，记为$\alpha\sim\beta$。

**3. 极限的四则运算法则**

设$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$。

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$。

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} [Cf(x)] = C \cdot A$。

(4) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$，其中，$B \neq 0$。

**4. 无穷小的运算法则**

(1) 有限个无穷小的代数和是无穷小。

(2) 有限个无穷小的乘积是无穷小。

(3) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

(4) 若$f(x)$为无穷小，且$f(x) \neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大；反之，$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小。

**5. 极限存在的准则**

(1) 如果：

① 对于点 $x_0$ 的某一邻域内的一切 $x$，点 $x_0$ 可以除外，则有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$。

② $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，那么，则有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$。

(2) 单调有界数列必有极限。

**6. 两个重要极限**

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$。

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$。

### （二）函数的连续性

**1. 函数连续性的定义**

(1) 函数$f(x)$在点 $x_0$ 连续的定义

① 设函数$f(x)$在点 $x_0$ 及其某个邻域内有定义，记 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，则称函数$f(x)$在点 $x_0$ 是连续的。

② 设函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 及其某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点 $x_0$ 连续。

(2) 左连续与右连续

① 函数$f(x)$在 $x = x_0$ 处左连续是指 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$。

② 函数$f(x)$在 $x = x_0$ 处右连续是指 $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$。

(3) 函数$f(x)$在开区间$(a,b)$内连续的定义

若$f(x)$在开区间$(a,b)$内的任一点都连续，则称$f(x)$在开区间$(a,b)$内连续。

(4) 函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续的定义

若函数$f(x)$在开区间$(a,b)$内连续，且在左端点 $x = a$ 处右连续，在右端点 $x = b$ 处左连续，则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

(5) 函数的间断点

若函数$f(x)$在点$x=x_0$处不连续，则称点$x_0$为函数$f(x)$的间断点。

若函数$f(x)$在点$x_0$处不满足下述三个条件之一，则点$x_0$是函数$f(x)$的间断点。

① $f(x)$在点$x_0$有定义。

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在。

③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

**2. 连续函数的性质**

(1) 一切初等函数在其定义区间内都是连续的。

如果点$x_0$是初等函数$f(x)$的定义区间内的点，那么，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而函数$y=f(u)$在$u=a$处连续，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)$$

或

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

或

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{x\to a} f(u)$$

其中，$u=\varphi(x)$，$a=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$。

(3) 闭区间上连续函数的性质。

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则

① $f(x)$在闭区间$[a,b]$上一定有最大值和最小值；

② 对于$f(a)$与$f(b)$之间的任何一个值$c$，在开区间$(a,b)$内至少存在一点$\xi$，使得$f(\xi)=c$。

## 三、典型例题

例1-1 求函数$f(x)=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$的定义域。

解：若使函数$f(x)$成立，必须满足下列不等式

$$\begin{cases} -1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1 \\ 2x-x^2\geqslant 0 \\ 2x-1>0 \\ 2x-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6\leqslant 2x\leqslant 8 \\ x(x-2)\leqslant 0 \\ 2x>1 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases} -3\leqslant x\leqslant 4 \\ 0\leqslant x\leqslant 2 \\ x>\dfrac{1}{2} \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}<x<1 \text{ 或 } 1<x<2$$

即$f(x)$的定义域为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$。

**本题点评**

求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集，所以必须记住如下一些简单函数的定义域：

① $y=\frac{1}{x}$，$x\neq0$；

② $y=\sqrt[2n]{x}$，$x\geqslant0$；

③ $y=\log_a x$，$x>0$；

④ $y=\tan x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\quad k=0,1,2,3,\cdots,n$；

⑤ $y=\cot x, x\neq k\pi\quad k=0,1,2,3,\cdots,n$；

⑥ $y=\arcsin x$（或 $\arccos x$），$|x|\leqslant1$。

例 1-2　设$f(x)=\begin{cases}4-x^2 & |x|\leqslant2,\\ 0 & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$。

解：$f[f(x)]=\begin{cases}4-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant2\\ 0, & |f(x)|>2\end{cases}$

（1）当 $|f(x)|\leqslant2$ 时，可能有两种情况：

① $|x|\leqslant2$，$|f(x)|=|4-x^2|\leqslant2$，解不等式

$$\begin{cases}|x|\leqslant2\\ 2\leqslant x^2\leqslant6\end{cases}\Rightarrow\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant2$$

$$f[f(x)]=4-(4-x^2)^2$$

② $|x|>2$，$|f(x)|=0\leqslant2\Rightarrow|x|>2$，

$$f[f(x)]=4$$

（2）当 $|f(x)|>2$ 有，可能有两种情况：

① $|x|\leqslant2\quad|4-x^2|>2$，解不等式

$$\begin{cases}|x|\leqslant2\\ x^2>6\\ x^2<2\end{cases}\Rightarrow|x|<\sqrt{2}$$

$$f[f(x)]=0$$

② $|x|>2\quad f(x)=0$ 与 $|f(x)|>2$ 矛盾。

综上所述

$$f[f(x)]=\begin{cases}0 & |x|<\sqrt{2}\\ 4-(4-x^2)^2 & \sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant2\\ 4 & |x|>2\end{cases}$$

**本题点评**

求分段函数的复合函数需要了解分段函数的概念，抓住最外层函数定义域的各个区间

段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出分段复合函数。

例 1-3　已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=5$，求常数 $a$，$b$ 使当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim ax^b$。

解：因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}$ 极限存在，当 $x\to0$ 必有 $\dfrac{f(x)}{x}\to0$，即

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

故当 $x\to0$ 时，

$$\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1\sim\frac{1}{2}\times\frac{f(x)}{x}$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{f(x)}{x}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}$$

即

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x^3}=5$$

当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim10x^3$，因此得　$a=10$，$b=3$。

**本题点评**

极限式中未知数的确定，需要了解极限存在的意义，当 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 商的极限存在时，若 $\lim f(x)$ 或 $\lim g(x)$ 趋于零（或无穷），则另外一个函数的极限一定也要趋于零或无穷，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 才有可能存在。在计算极限过程中本题还应用了无穷小等价代换的方法。注意，只有无穷小量才能等价代换。

例 1-4　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$。

解：当 $x\to0$ 时，$x\sin x\to0$，故有 $\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\dfrac{1}{2}x\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^2$。同样，当 $x\to0$ 时，

$$e^{x^2}-1\sim x^2$$

所以，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

**本题点评**

本题利用无穷小等价代换的方法计算极限，这种方法可简化极限的计算过程，但在应用时要特别注意，等价代换绝不是相等。一般在有乘除运算时可以替换，加减运算时不能使用。

常用的等价代换有：当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\arcsin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x$$
$$\ln(1+x)\sim x,e^{x}-1\sim x,a^{x}-1\sim x\ln a$$
$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2},(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$$

例1－5 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right)$。

解：因为 $1-\frac{1}{n^{2}}=\frac{(n-1)(n+1)}{n^{2}}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$，所以有

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\cdots\times\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$

**本题点评**

当计算 $n\to\infty$ 时的极限，有时需要将通项拆开，使各项在相加或相乘过程中中间项相互消去，再求极限。

例1－6 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$。

解：由重要极限公式得：

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}\cdot x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\ln e^{3}=3$$

**本题点评**

利用两个重要极限公式计算极限是极限计算的重要方法之一，应用时，注意验证极限未定式的类型，一个公式是$\frac{0}{0}$型，另一个是$\left(1+0\right)^{\infty}$型，括号中的1后的变量与幂互为倒数，只有类型符合，才有公式结果。