

经济数量分析基础

关立人 編著

新疆维吾尔自治区农业經濟学会
新疆石河子市农业經濟学会
新疆八一农学院农业經濟系

一九八四年元月

内 容 简 介

本书以马克思主义的经济理论为理论基础，运用定性分析和定量分析相结合的综合分析方法，阐述了农业资源合理利用；农业生产合理布局；经济预测和管理决策等方面的问题，为探讨农业发展战略，制定经营决策和确定短期与长期规划等提供了科学方法。

全书共分七个部分，第一部分，总论——管理科学的发展；第二部分，生产函数；第三部分，线性规划模型；第四部分，网络分析；第五部分，经济预测技术；第六部分，管理决策方法；第七部分，国民经济部门间综合平衡模型。

本书的排印出版在经济和联系上得到新疆石河子农业经济学会理事长、农八师师长陈冰同志，石河子农业经济学会秘书长、石河子建设银行副行长柳洪义同志的大力支持，在校对工作上得到八一农学院农经系教师朱美玲，石河子农学院农经系教师公天亮、李海南、丁沧海等同志的大力帮助，在此统表致谢。

目 录

第一章 总论 —— 管理科学的发展	(1)
§ 1、管理科学的发展过程	(1)
§ 2、从运筹学到系统工程	(2)
第二章 生产函数模型(上)	(8)
§ 1、生产函数的概念	(8)
§ 2、单一资源的合理利用问题	(10)
§ 3、价格及其它因素变动的分析	(28)
第三章 生产函数模型(下)	(30)
§ 1、资源的配合利用	(30)
§ 2、有限资源的分派利用及生产部门的合理配合	(45)
第四章 线性规划模型	(55)
§ 1、线性规划的数学模型	(55)
§ 2、线性规划问题的解	(67)
§ 3、单纯形法	(78)
§ 4、线性规划的对偶问题	(90)
第五章 网络分析技术	(98)
§ 1、工序流程图的组成	(99)
§ 2、工序流程图的画法	(100)
§ 3、绘制工序流程图的原则	(102)
§ 4、工序流程图的时间参数计算	(105)
§ 5、非肯定型工序流程图的概率估计	(113)
§ 6、缩短计划完工期	(117)
§ 7、工序流程图的时间——成本优化	(119)
第六章 经济预测技术	(124)
§ 1、经济预测的概念、范畴及分类	(124)
§ 2、时间序列的平滑预测	(125)
§ 3、长期趋势预测	(130)
§ 4、季节性趋势预测	(143)

§ 5、因果预测	(148)
§ 6、预测效果分析	(151)
第七章 管理决策方法	(153)
§ 1、期望值标准决策	(154)
§ 2、风险比较决策	(157)
§ 3、贝叶斯决策和情报价值	(159)
§ 4、决策树的使用	(163)
§ 5、完全不确定型决策	(167)
第八章 国民经济部门间综合平衡模型	(169)
§ 1、国民经济部门间综合平衡模型的意义	(169)
§ 2、部门间综合平衡的理论根据	(172)
§ 3、部门平衡综合平衡模型的基本结构	(173)
§ 4、平衡表的求解	(175)
§ 5、完全消耗系数	(176)
§ 6、国民经济部门间综合平衡举例	(179)
§ 7、利用部门间综合平衡模型进行国民经济分析	(182)

第一章 总論——管理科学的发展

一、管理科学的发展过程

人类生产活动无不表现为各种数量关系。经济数学就是研究经济管理系统中的数量变化规律。经济规律表达的主要方式之一是数学，许多经济现象都要通过数来表达，来刻画，如经济发展速度和效率，计划、指标、方案比较，部门间平衡关系等等都需要进行定量研究，用系统分析方法，得出最佳方案，从而使国民经济能够按照客观经济规律得到高速度高效率的发展。因此，生产技术现代化需要数学，管理现代化亦需要数学，而后者又恰是我们最薄弱的。

人类的社会共同劳动产生了管理。马克思说：“一切规模较大的直接社会劳动或多或少地需要指挥，以协调个人的活动，并执行生产总体的运动——不同于这一总体的独立器官的运动——所产生的各种一般职能。一个单独的提琴手是自己指挥自己，一个乐队就需要一个乐队指挥。”从马克思的观点来看，经济管理就是对社会的生产、分配、交换、消费等经济活动进行组织、指挥、调节和监督。

有人把经济管理的发展大体划分成四个阶段。

早期的管理理论是产生在18世纪下半期手工作坊向机器生产过渡的时期，代表人物是亚当·斯密，其代表作是在1796年发表的“国富论”。他的劳动价值论和社会分工论对资本主义的经济管理影响很大。他分析了生产专业化分工促进了技术进步，节约了时间，从而获得较高的经济效益，这对促进资本主义生产的发展起到一定的作用。大卫·李嘉图是亚当·斯密的直接继承者，产业革命后期经济管理理论的代表人物。1817年，他发表了《政治经济学和赋税原理》，用劳动价值论来研究资本、工资、利润和地租，认为工人劳动创造的价值是工资、利润、地租的源泉，从而揭示了资本主义经济管理的中心问题和剥削本质。马克思对此曾给予很高的评价。

在资本主义向垄断资本主义过渡时期，产生了以美国经济学家泰罗（1856—1915）为代表的“科学管理”的理论。泰罗的代表作是发表于1911年的“科学管理原理”。泰罗主要从工人操作上研究工时的利用，主张制定劳动法，时间定额和有差别的计件工资、奖励工资。从1903—1910年泰罗学派还极力提倡建立管理职能机构——科室制和车间制。列宁对泰罗有过精辟的分析，曾在《苏维埃政权的当前任务》一文中指出：“资本主义在这方面的最新发明——泰罗制——也同资本主义其他进步的东西一样，有两个方面：一方面是资产阶级剥削的最巧妙的残酷手段，另一方面是一系列的最丰富的科学成就，即按科学来分析人在劳动中的机械动作，省去多余的笨拙的动作，制定最精确的工作方法，实行最完

善的计算和监督等等”。所以尽管泰罗如何宣称他的办法对劳资双方都有利，亦掩盖不了其剥削的本质。

自第二次世界大战到六十年代兴起了所谓“现代管理”，它是从两方面来研究管理的：一方面利用数理统计、运筹学、电子计算机等新的数学理论和计算手段，着重研究经济活动的计划、组织、质量管理；另一方面从社会学、心理学的角度来研究经济管理，即所谓“行为科学”。“行为科学”最早的代表人物是美国哈佛大学的迈约。他认为生产不仅受物理的、生理的因素影响，而且受社会学、心理学的影响。这种研究重视社会环境、人的相互关系对提高工效的影响，主张从人的“行为本质”中激发生产劳动力，从人的心理现象中发现管理规律。

伴随着电子计算机的发展，促进了人们对系统的研究，并在系统概念的基础上，产生了系统工程这一新兴科学。它对经济管理的研究产生了巨大影响。因而使经济管理的研究发展到现代的管理系统研究的新阶段。所谓系统就是由许多相互作用和制约的相关因素在运动中具有一定输入输出过程的统一整体。系统分析就是对系统要素（包括人、物、环境等各有关因素）进行全面分析和比较，从中找出最优方案，而经济管理系统工程就是运用系统理论研究经济管理系统中各要素相互联系和制约的关系，研究管理系统的结构和特征，通过系统分析，寻求计划、方案、管理方法的最优化。

目前，在国内外虽然对经济管理现代化的理解还不尽相同，但总的趋向不外是在研究经济管理的方法、手段、组织和制度等四个方面的现代化问题。然而实现经济管理现代化，都是为了某一特定的目的，使投入的一定资源（人力、物力、财力等）经过转换过程，获得最大的成果。

二、从运筹学到系统工程

《运筹学》这个名字，国外称为“Operational research”，是“使用研究”或“作战研究”的意思。它成为一门科学其历史还是不长，是三十年代后期才发展起来的，其命名人说始于英国。但运筹思想在人类社会活动中早已产生，并可追溯很远，如在我国古代的孙子兵法中就存在着许多运筹思想，田忌和齐王赛马的例子，就是反映了运筹学中对策论思想。北宋的丁谓修官计划之所以成为历史上的著名施工最优方案，也是因为它反映了运筹学中规划论思想。但从朴素的运筹思想到发展成为一门科学，还是从第二次世界大战前夜才逐渐发展起来的。

在二次大战前夕，英国为了加紧防空力量，并做了许多研究工作，同时也发明了雷达。当第一架雷达制出后，进行了军事演习，发现结果不够理想，迫其原因，并非是做为接收系统的雷达本身功能不好，而是整个防空系统中其它子系统，如信息处理、信息传送、指挥等系统效能较差，不能配套成龙。由于这一点未能注意，因而使整个防空系统效能较差。得到第二次演习时，已有四架雷达，但演习结果仍不理想。由此发现一个问题，就是对于一个复杂系统，不但要进行研制生产，还要重视在使用中充分发挥其效用。于是使用效用的研究便成了科研领域的新任务、新课题。当时用英文表示即为“Operational research。”二次世界大战中，西方国家的经济竞争问题严重，美国又将开始于军事系统使用效果研究应用于经济

管理中，并改名为“Operation research”。对这一名称，不论理解为“使用研究”，“运转研究”或是“作战研究”，其基本思想就是从具有许多子系统的大系统的全局出发来考虑系统运转的效果问题。

在我国，运筹学的研究是从1956年开始的。最初曾译成“运用学”，后来华罗庚、钱学森等教授考虑这门科学不仅包含运行、使用等涵义，而且带有筹划之意。为使学科名称如实反映学科的研究对象和范畴，且易于理解，遂引《史记》的《高祖本纪》“公知其一未，知其二，夫运筹策帷帐之中，决胜于千里之外”一句中的“运筹”一词，来定名此学科，故“Operation research”，在我国即定名为“运筹学”，这个名字延用至今。

在五十年代初，出版了第一本以“运筹学”命名的书——《运筹学方法》。该书是美国人毛尔森和金伯尔合写的，主要总结了在二次大战中英美打仗的经验，与现在运筹学的内容出入较大。

目前对运筹学的理解是：研究事物活动规律，是研究在既定条件下如何对系统进行全面规划，统筹兼顾，局部服从整体，以期达到最优化的目标。它的主要分支已有：规划论、博弈论、排队论、搜索论、库存论、可靠性理论、质量控制、运筹学、图论等等。

(1) 规划论：主要研究对现有资源如何进行统一分配、全面安排，合理调度或最优设计等问题。一般可归纳为在满足既定的条件下按照某一衡量指标来寻求最优方案问题。通常将必须满足的既定条件称为“约束条件”，将衡量指标称为“目标函数”。用数学的语言来说就是在满足约束的前提下，寻求目标函数的最大值或最小值。当约束条件表示为线性等式或不等式，而目标函数表示为线性函数时，就称为线性规划，否则称为“非线性规划”，如果规划问题与时间有关，可分成若干阶段时，问题则属于“动态规划”。

(2) 博弈论：又称对策论，是本世纪二十年代兴起的。著名数学家冯·诺伊曼受资产阶级经济竞争的启发，研究了下棋、打扑克等活动的特性，发现下棋、打扑克等等与掷骰子有所不同，掷骰子的成败完全依赖于机会，没有怎么样才能取胜的问题，而下棋、打扑克甚至小孩玩的“石头、剪子、布”等成败是依赖于策略，自己可以选择认为可以取胜的方式。所以，如何运用数学方法来研究目的成败与策略之间的关系，如何在有利害冲突的双方竞争活动中，选择一种好的策略，而采用这种好的策略，相比之下会有什么好的结果？这就是博弈论要解决的问题。

(3) 排队论：这是一种用来研究用于公用服务系统工作过程的数学理论和方法。在这个系统中服务对象何时到达以及其占用系统的时间长短均无法事前预知。这是一种随机聚散现象。它通过每个个别的随机服务现象的统计研究，找出反映这些随机现象平均特性的规律，从而改进服务系统的工作能力。

(4) 搜索论：它是用来研究在寻找某种对象(如石油、矿物、潜水艇等)的过程中，如何合理使用搜索手段(如用于搜索的人力、物力、资金和时间)以便取得最好的搜索效果。

(5) 决策论：它是运筹学最新发展的一个重要分支，用于经营管理工作进行系统状态的信息处理。根据信息确定可能选取的策略并将这些策略对系统状态所产生的后果进行综合研究，以便按照某种衡量标准来选择最优策略。

(6) 库存论：在经营管理工作中，为了使系统有效运转往往需要对原材料、设备、资金等保持必要的储备。库存论就是研究在什么时间以什么数量从什么供应来源来补充这些

储备,并使维持库存和补充采购的总费用最少。

(7)、可靠性理论:它是研究可靠性的方法,是应用数学的一个重要分支。如何将可靠性较低的元件组成可靠性较高的系统,是可靠性理论的重要课题之一。

(8)、质量控制:是运用数理统计方法来管理质量,也称质量管理。是“以防为主,防重于治”的思想在质量管理中的应用。它是在生产过程中控制质量,并采取积极办法,将次品、废品尽量消灭在生产过程之中,不要等产品成批生产出来以后,才进行质量把关检查,以免废品已形成,造成不应有的损失。

(9)、统筹法:又名计划协调技术或称计划评审技术,是计划管理的一种新的方法。它以数理统计为基础,运用网络分析的方法,将构成计划目标的所有任务按其相互联系与时间衔接关系组成统一的网络图,并对网络的各个任务进行分析、预测、分清主次、明确关键,找出主要矛盾,挖掘资源潜力,并能对整个计划系统完成的把握性做出科学的判断。

(10)、图论:最早起于1736年Euler的七桥问题,称欧拉链。近年来,对于图的研究发展很快,那是因为现实生活中的许多问题都可以用图来加以描述和分析。图论中的图和几何中的图,数学分析中的图不同,它是一种抽象概念,是一些小圈圈和中间的连线排成,圈圈代表对象,联线代表各圈之间的关系,用此来描述生活中的许多现象。如城市间的通讯图、交通图、工厂内部物流流向图、管理机构图等。图中有的是封闭的,有的是不封闭的。一个无圈的通图称为树,对决策分析很有用处,即所谓决策树。在国外,决策树、网络图在生产管理中已被广泛应用。

自四十年代以来,随着运筹学在管理领域中的应用和五十年代电子计算机在管理中的使用,不仅使运筹学得到广泛发展,而且为系统分析提供了方法和手段,产生了“系统工程”的概念。

所谓“系统”是由相互作用和相互依赖的若干组成部分结合成为具有特定功能的总机体。

“系统”这一概念,是来源于人类长期社会实践,不论对自然系统如血缘、天文、河流、动物、植物等的系统,或是人工系统,工、农、商、学、兵、管理、运输、工程技术等等系统,都已早有一定的认识,然而对“系统”的科学认识,却是恩格斯首先阐明的。恩格斯在《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学终结》一文中指出:“认为事物是即成的东西的旧形而上学,是从那种把非生物和生物当做即成事物来研究自然科学中产生的。而这种研究已经进展到可以向前迈出决定性的一步,即可以过渡到系统地研究这些事物在自然界本身中所发生的变化的时候,在哲学领域内也就响起了旧形而上学的丧钟。”恩格斯还把这一认识上的飞跃称为“一个伟大的基本思想,即认为世界不是一成不变的事物的集合体,而是过程的集合体。”恩格斯所说的集合体正相当我们讲的系统,恩格斯所强调的过程,也正是现在系统工程中所讲的系统中各组成部分的相互作用和整体的发展变化。

不过,对系统研究和如何寻找一套科学方法和一套数学理论,定量地处理系统内部关系,这种研究仅仅在二十世纪四十年代才开始。有人考证说,系统工程一词最早使用是四十年代末期在美国的贝尔电话公司,贝尔在考虑横跨美国东、西部的微波通讯网时,感到除电话机、交换台等设备、部件必须研究外,更需要研究通讯网络的整体,并把研究这样一个有特性的问题,称之为“系统工程”,1954年Heady,E.O.搞了美国农业布局模型,1957年谷德(H·Goode)和麦荷(R·E·Machol)合著出版了第一本以系统工程命名的书。到了六十

年代,系统工程得到了迅速的发展。而它真正被人们重视是从美国阿波罗登月计划开始的。阿波罗登月计划的全部任务是由地面、空间和登月三部分组成,是一项庞大的工程计划。它不仅涉及到火箭技术、电子技术、冶金和化工等多种技术,为了把人安全送上月球,还需要了解宇宙空间的物理环境以及月球本身的构造形状。它涉及到四十多万人,研制的零件有几百万件,耗资三百亿美元,历时十一年之久。为了完成这个计划,除了考虑每一部分之间的配合协调工作外,还要在制定计划时,估算各种未知因素可能带来的各种影响,这样千头万绪的工作,千变万化的情况,靠一个“总工程师”或“总设计师”是无法解决的。这就要求有一个总体规划部门运用一种科学的组织管理方法,综合考虑统筹安排。这种科学方法就是系统工程,关键在于学科部门间的横向综合。

关于系统工程的定义,到目前为止在国内外仍众说纷纭。例如:美国学者切斯纳说:“系统工程则是按照各个目标进行权衡,全面求得最优解的方法,并使各组成部分能够最大限度地互相适应”(1967年)。

日本三浦武雄在1977年《现代系统工程概论》中说:“系统工程与其它工程不同之点在于它是跨越许多学科的科学,而且是填补这些学科边界空白的一种边缘科学。因为系统工程的目的是研究系统,而系统不仅涉及到工程学的领域还涉及到社会、经济和政治等领域。为了适当解决这些领域的问题,除了需要某些纵向技术以外,还要有一种技术从横的方向把它们组织起来,这种横向技术就是系统工程。亦即,研制系统所需的思想、技术、手法和理论等体系化的总称”。

我国钱学森等1978年在文汇报上发表的《组织管理技术——系统工程》一文中所下的定义为:“把极其复杂的研制对象称为系统,即由相互作用或相互依赖的若干组成部分结合成具有特定功能的有机整体,而且这个系统本身又是它所隶属的一个更大系统的组成部分……系统工程则是组织管理这种系统的规划、研究、设计、制造、试验和使用的科学方法,是一种对所有系统都具有普遍意义的科学方法。”

关于系统工程的定义还有很多,在此不一一列举,但归纳起来可以说:系统工程是从系统的观点出发,运用有关科学方法和以电子计算机为工具对系统进行最优规划、最优管理、最优控制的一门综合性管理组织技术的总称。这种科学管理组织技术的主要工作内容是系统的模型化、最优化和综合评价。

(1)、系统模型化:

模型化是对系统的抽象描述。模型化是去粗取精,去伪存真,寻找事物本质,把复杂问题简单化的好方法,它给人们提供较清晰的图象。在系统工程中所采用的模型有很多,常用的有三种:实物模型、图形模型和数学模型。

实物模型又称形象模型,是模仿实际系统的物理状态和运动状态将尺寸按比例放大或缩小后的表示。如收割机模型、土壤样本、各种类型的农作物小区试验等等。

图形模型是各种图表来表示系统的信息流程、物质流程、时间顺序、逻辑关系,如管理树、网络图等。

数学模型,是最一般最抽象的模型,是用各种数学符号和数值来描述工程、管理、技术、经济等有关因素及其之间的数量关系。数学模型按变量形式可分:

- 1、确定模型和随机性模型
- 2、连续性模型和离散性模型

按变量之间的关系可分:

- 1、代数模型
- 2、微分方程模型
- 3、概率统计模型
- 4、逻辑模型

以上三种不同形式的模型各有利弊,在实际使用时,经常交叉使用,以发挥各自的长处。

(2) 系统最优化

系统最优化就是根据系统模型来求解获得系统目标的最优解答,最优的含义是根据一定的标准来判断。因此有关判断标准的数量、程度不同,得到的最优解答亦不同。由于系统的复杂,某局部最优不等于整个系统最优,若想在庞大的系统中建立数学模型,求其最优解,没有电子计算机做为手段是很难完成的。系统目标的最优化主要是解决有关最优计划、最优设计、最优控制和最优管理等问题。

(3) 系统的综合评价

系统的综合评价是利用模型和各种资料,对比各种可行方案,对各种可行方案权衡利弊得失和费用效果,从系统的整体最优化观点出发加以综合考虑,选择出适当而且可行的最优方案。综合评价是系统工程中最复杂、最困难的工作环节之一。要求评价人员通晓所涉及的有关技术,掌握评价计算方法,并还要有预见性。

系统的综合评价是利用相对价值这一抽象概念来评定的。相对价值概念包含许多价值因素,而这些因素之间又存在着相互联系的关系,它们共同地决定着总的价值。如一个系统的评价因素可能有:性能、进度、成本、可靠性、实用性(安装、维修)、适应性、多用性、组织生产的连续性、外观、能量消耗等等许多价值因素。根据系统的目标,这些因素成为一个有序集合,给予量化,综合加以评定。

关于系统工程的方法论问题,自六十年代以来,许多学者进行了大量研究工作。但企图找到一种能够处理世界上的所有问题的标准方法是很难做到的。但总还可以根据各种系统工程的特性找出一种具有共性的思想方法。目前认为论证比较全面而又带有较大普遍意义的方法被认为是美国学者霍尔(A·D·Hall)在1969年提出的系统工程三维结构。他所提出的三维结构包括时间维、逻辑维 and 知识维组成空间结构。时间维包括以下七个阶段:

- 1、规划阶段——谋求活动的规划和战略;
- 2、拟订方案——提出具体的计划方案;
- 3、研制阶段——实现系统的研制方案,并做出生产计划;
- 4、生产阶段——生产出系统的另部件及整个系统,并提出安装计划;
- 5、安装阶段——将系统安装完毕,并完成系统的运动计划;
- 6、运行阶段——系统按预期用途服务;
- 7、更新阶段——取消旧系统代之以新系统或改进原系统,使之更有效地工作。

三维结构的逻辑维是指示系统工程的每一个阶段所要进行的工作内容,共有七个步骤:

- 1、明确问题——尽量全面地收集资料和数据(历史的,现状的,发展的);

- 2、系统指标设计——指出应达到的目标，制定出达到该目标的标准；
- 3、系统综合——全面收集为达到预期目标的所有方法，对每种方法进行必要说明（优、缺点等）；
- 4、系统分析——对可能入选的方法，通过比较进行精简，并对精简后的方法进一步说明其性能和特点及其与整个系统的相互关系；
- 5、最优化——对分析结果加以评价，并与目标相比较选出必要的可行方案；
- 6、决策——确定最优方案；
- 7、实施计划——不断修改和完善上述六个内容，以保证顺利进入工程的下阶段。

知识维就是为完成上述各阶段、各步骤所需要的知识和专业技术。

由此可见，系统工程横跨了自然科学和社会科学，逐渐形成一门新的理论——系统工程。钱学森、许国志等同志认为，系统工程的共同基础理论，看来应是运筹学和计算科学技术，并认为在我国急需建立如下系统工程专业，即：工程系统工程、科研系统工程、企业系统工程、信息系统工程、军事系统工程、经济系统工程、环境系统工程、教育系统工程、行政系统工程、法制系统工程。

当前，在国外系统工程的研究发展很快，并已广泛应用到工业、农业、国防、经济、科研等各方面，取得了显著成效，引起普遍重视。1964年美国正式成立系统工程学会并每年举行年会，并正式设立系统工程学位。在美国国防部门专门设立了系统分析部，美国各大公司企业均设有工程工程部。据称美国在七十年代初期共有系统分析工程师二十万多名，还成立了两大学术团体——美国运筹学会和科学学会，约有90—100所大学设有各类系统工程专业，每年培养出来这方面的大学生约30000多名，硕士研究生1600多名，博士研究生约400—500名，这方面的专业人员称为“系统工程师”或“分析专家”，从事工农业企业、政府机关中的规划、设计和决策工作。

在英国，1965年，兰开斯特大学第一个成立了系统工程系。以后其它大学也陆续成立了相应的系和专业。在日本，系统工程的研究自六十年代末也大力展开，他们先从美国引进了大量资料，并在七十年代初出版了“系统工程学讲座”丛书，尽力加速培养这方面人才，至75年已有系统工程师十一万人。

苏联从六十年代也开始了这方面工作。苏联国家计委在莫斯科建立了一个与140多个研究所协作的计划系统计算中心。该计算中心根据60年来计划经济的经验，电子计算机在计划管理中的应用和经济数学模型，通过五年的基础工作，已描述出全苏及各加盟共和国各机关的技术经济指标和相互关系，建立了某些模型，并从全苏角度出发，选择了三千三百项需要解决的任务。目前提交部长会议的国民经济总计划的50%准备工作已经计算机化了。

在国防上，1972年10月，在维也纳郊区成立了国际应用系统分析研究所，当时是以美、苏为主，共有十二个成员国，现发展到17个，每年召开约二十次研究工作大会和工作会议。

从经济管理发展的历史看来，可以说数学的引进和应用程度是经济管理科学化水平重要标志之一，所谓“客观经济规律”其实质就是经济数量的运动规律，要做到“按客观经济规律办事”就必须首先认识和掌握经济数量的运动规律。而要认识和掌握经济数量的运动规律，就需要利用数学抽象方法，这就产生了经济计量问题。然而经济计量问题并非通常想象

那样简单，它是异乎寻常的复杂并客观地存在着，等待着人们去探索和认识。因为一切物质都以各种形式在运动，具有一定的量，表现出一定质的特征，并在运动中转化。人类的社会经济活动当然也不例外。马克思正是从这个观点出发，利用价值这一抽象计量研究了资本主义社会商品运动的规律，创造了剩余价值学说，得出资本主义一定要灭亡的结论，从而在理论上阐明生产力发展必然导致生产关系变革，而生产关系的变革又反过来影响着生产力的发展这一客观规律。马克思的这种研究方法，为我们研究客观经济规律做出了最好的典范。正因为一切经济活动都是在一定的生产力和生产关系的条件下实现的，所以构成了经济数量表现形式的复杂性。它以物理的、化学的、生物的、思维的、关系的等等各种形式的量在一定的时间和空间内，按其固有的特殊规律，复合地表现出各种经济特征值。产生各种经济特征值的规律即所谓客观经济规律。既然一切经济政策、制度、计划、方案、组织、管理机构和职能、再生产条件、思维能力等等诸因素，都在客观地、不以人们意志为转移地、直接或间接地作用于经济运动，所以对它们进行定量分析，并通过分析找出规律，也就成为经济研究的必然趋势。为此，除了需要大量的多学科地研究外，经济数学的研究必将成为重要的科学领域。

目前在国内外已经有人试图从物理学、生物学的规律中寻找经济运动的同构现象来进一步探索经济运动规律。如根据普列戈金的非平衡系统理论、哈肯的协同论、艾根的超循环理论等来揭示经济系统的某些运动规律。虽然这方面的研究尚属刚刚开始，但这种把经济现象同物理现象、生物现象进行沟通，建立普遍联系，是近几年来开展经济研究新领域的一个新动向。对这一开发性的创造性研究，我们应给予足够的重视。

第二章 生产函数模型（上）

第一节 生产函数的概念

在生产经营过程中，投入的资源数量不同，产出的成果数量也因而不问，这种客观存在着的生产上变量与变量之间的数量依赖关系，是一种变量之间的函数关系，叫做生产函数关系。生产函数和需求函数，供给函数、消费函数、国民收入函数等都是运用数学上的函数概念和规范对经济理论和经济问题进行数量分析的重要方法。这些函数关系的分析，对于研究商品经济都有一定用处，其中生产函数关系的分析尤其重要。这是因为在任何社会中，归根到底，生产决定着流通、分配和消费。

生产函数包括三大类的函数关系。第一、投入资源同产品产量之间的关系，叫做资源—产品函数关系。第二、资源——资源函数关系。就是说，如果我们要求以最节约的方法，利用某些可以互相代替的资源来生产同样多的产品，这就产生了一种资源同另一种资源之间相

互替代的函数关系。第三，产品——产品函数关系。就是说，如果我们力求充分发挥某种有限资源的作用，把它尽可能用于多种生产，以求得各种产出的经济效益的总和最大，这种有限资源的分派利用于多种产品之间的问题，就是产品和产品之间相互替代的函数关系。

函数关系一般可用：（1）列表法；（2）图象法；（3）数学模型法来表示。

用列表或图象来表示经济变量之间的关系，是很方便且又直观。但当经济变量较多的情况下，用图表法就难以表示了，而用数学模型来表示和计算将更为方便。例如我们进行了肥料X对农作物Y的增产效果试验，试验是按每增加2斤肥料X来进行观察的。其结果如表2·1

表2·1 肥料X的增产效果

单位：斤

肥料X	作物Y	肥料X	作物Y	肥料X	作物Y
2	6.76	14	67.48	26	125.32
4	14.88	16	78.72	28	131.04
6	24.12	18	89.64	30	135.00
8	34.24	20	100.00	32	136.96
10	45.00	22	109.56	34	136.68
12	56.16	24	118.08	36	133.92

表2·1清楚地表示了肥料X对作物Y的增产效果。当肥料X的施用量小于32斤时，增施肥料X能使总产量增加，超过32斤以后反而使总产量降低了，这说明肥料X的施用量超过32斤后就产生了负的效果。然而由于田间试验的限制，试验数据是离散的，未能得出施用肥料X任意量的增产效果，试验越粗放，虽然会减少试验费用，但所得数据就越少，精确程度就越差，试验越精细，数据就越多，精确程度就越高，但试验费用就越高。如果我们将表

2·1的数据更直观地绘出图形，则为图2·1。

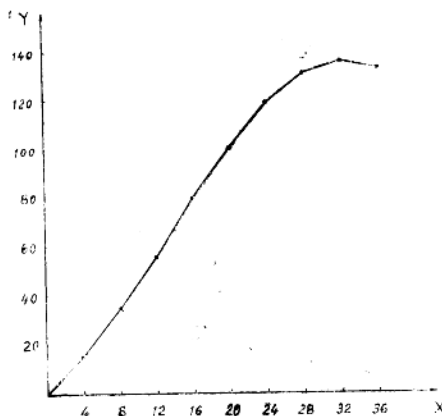


图2·1 肥料X对作物Y的增产效果

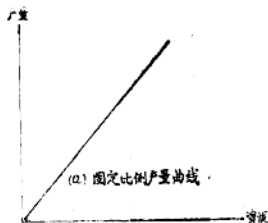
从图2·1可以看出，将各离散的数据用直线联接形成一条折线。欲想知道区间上的某一施肥量 X^* 的增产效果，只能按 X^* 所对应的折线上的那一点 Y^* 的数值来估计，如果施肥量试验的区间较小，折线就越多，施用 X^* 的增产效果估计值 Y^* 就较准确，然而我们又不可能将试验的施肥量的区间无限缩小，在这种情况下，我们可以根据试验数据通过回归分析方法，求出其回归方程式（回归模型）来表示施肥量同产品之间的关系，并可估计所得函数值的把握性有多大。

然而，在考察资源利用的效果时，我们不能仅仅考虑资源投入同生产成果在物质方面的数量关系，我们还必须考察生产的经济因素。既然在社会主义社会中还存在着商品和商品流通，而大部分农产品是作为商品出售的，同时，在农业生产过程中，也有许多投入资源是以商品形态参与生产过程的，所以价值规律在农业生产中必然发生作用，因此在生产过程中，就必须考虑到各种投入资源的价格和产品价格因素，因而就要运用许多经济指标诸如总产值、边际产值、平均产值、总成本、边际成本、平均成本等等来衡量资源投入同成果产出之间的经济效果。虽然各种经济指标之间都有相互的内在联系，但它们的最佳效果对资源的投入量和产品产量水平来说并不一定是同步发生的，例如当某种资源投入量能获最大产值时，并不一定能获最大利润；当某种资源投入量能获最大利润时，也不一定是平均单位资源产值的最高点，或边际产值的最高点。同样，能使平均单位产品成本最低的产量水平并不一定能获得最大利润。既然如此，当我们考察资源利用的经济效果时，就应根据生产目标来确定衡量经济效果的主要指标。

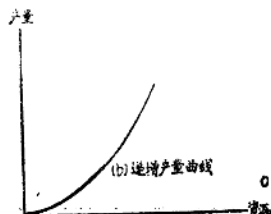
第二节 单一资源的合理利用问题

1、总产量、平均产量和边际产量之间的关系：

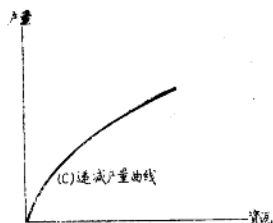
总产量、平均产量和边际产量之间的关系问题是生产函数分析中首先要解决的。在假定其它资源使用量相对不变的情况下来考察某一个资源投入量对产品产量所发生的效用，就会得出一个总产量曲线。资源投入量和总产量之间的关系可有三种形态：第一种是总产量按资源投入的某一固定比例增加，例如在一定范围内某种作物的总产量同栽培面积之间呈某一固定比例关系，如图 2·2 (a)。第二种情况是在产品非常需要某种资源投入的情况下，随资源的投入量的增加其效用也增加，换句话说，每继续增加一个单位的资源投入会获得比以前更多的产量，这种情况表现为递增产量曲线，如图 2·2 (b)。第三种情况是每当继续增加一个单位资源时，其效用是递减的，即随资源投入量的增加产量的增加逐渐减少，此种情况表现为递减的产量曲线，如图 2·2 (c)。在农牧产品的生产中较为普遍的总产量曲线是随资源投入量的增加，先是效用递增，然后转为效用递减，最后当资源投入量超过一定程度时，就将起负的效用，不仅不能使产量增加，反而会使产量降低，如图 2·2 (d)。对饲料和肥料的使用，其效用变化就是最明显的例子。



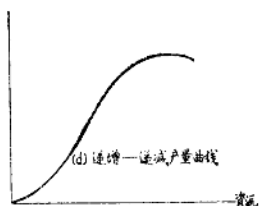
(a) 固定比例产量曲线



(b) 递增产量曲线



(C) 递减产量曲线



(d) 递增—递减产量曲线

图 2·2 资源—产量曲线

由此我们可以引出边际产量的概念，所谓平均边际产量就是当资源的投入量从 X_0 增加到 X_1 时，产量变化从 Y_0 变化到 Y_1 ，则 $Y_1 - Y_0$ 同 $X_1 - X_0$ 之比值即为资源投入量在 X_0 到 X_1 区间内的平均边际产量，若以 ΔY 表示 $Y_1 - Y_0$ ， ΔX 表示 $X_1 - X_0$ ，则：

$$\text{平均边际产量 AM P} = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \dots\dots\dots (2 \cdot 1)$$

公式 2·1 说明资源施用量在 X_0 到 X_1 区间内，每增施一个单位的资源，平均能使产量增加 $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ 个单位。然而我们若将试验的施肥量区间无限缩小，使施肥量成为一个连续的变量，这样，每给定一个 X 施肥量就会有有一个 Y 产量与其对应，因而形成施肥量同产量的对应函数关系，这个函数关系可用

$$Y = f(X) \dots\dots\dots 2 \cdot 2$$

来表示。当施肥量为 X_0 时，对应的产量为 Y_0 ，当施肥量从 X_0 增加到 $X_0 + \Delta X$ 时，对应的产量应为 $f(X_0 + \Delta X)$ 。假如当增加的施肥量 ΔX 趋近于零时， $f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)$ 也趋近于零，然而在施肥量变化的运动过程中， $f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)$ 同 ΔX 的比值仍然保留，故当 ΔX 趋近于零时，产量变化 $f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)$ 同施肥量变化之比的极限值即为施肥量在 $X = X_0$ 点上的边际产量，又称在 $X = X_0$ 点上的边际生产力。用数字表示为：

$$X_0 \text{ 点的边际产量 MP} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)}{\Delta X} \dots\dots\dots (2 \cdot 3)$$

式 2·3 恰恰等于资源—产量函数 $Y = f(X)$ 在 X_0 点上的导数，即

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)}{\Delta X} = f'(X_0)$$

由此可以得出施肥量为任意水平 X 时的边际产量函数为：

$$MP = Y' = \frac{dY}{dX} = f'(X) \dots\dots\dots (2 \cdot 4)$$

公式 2·4 说明当施肥量水平为 X_0 时的边际产量或边际生产力恰等于总产量曲线在 (X_0, Y_0) 点上切线的斜率，也就是表示在该点的增产速度。

由总产量函数关系式 2·2 也可以得出平均产量函数，所谓资源投入的平均产量是投入

每单位资源X能使产量平均增加多少，亦称资源的平均生产能力。它表示资源投入量在从0到X区间内平均每单位资源的增产效用，用公式表示即为：

$$\text{平均产量} = AP = \frac{Y}{X} = \frac{f(X)}{X} \quad (2.5)$$

现在我们以表2.1的数据来进一步分析不同施肥量时的边际产量和平均产量，见表2.2。

表2.2 肥料X的施用量同作物Y总产量、平均边际产量、平均产量的关系

X的施用量(斤)	4	8	12	16	20	24	28	32	36
作物Y总产量(斤)	14.88	34.24	56.16	78.72	100	118.08	131.04	136.96	133.92
ΔY (斤)	19.36	21.92	22.56	21.28	18.08	12.96	5.92	-3.04	
ΔX (斤)	4	4	4	4	4	4	4	4	
平均边际产量 ($\Delta Y/\Delta X$)	4.84	5.48	5.64	5.32	4.52	3.24	1.48	-0.76	
平均产量 Y/X	3.72	4.28	4.68	4.92	5	4.92	4.68	4.28	3.72

从表2.2可看出，肥料X的施用量在32斤以下时，总产量是不断增加的，当施用量达36斤时，总产量反而降低3.04斤。同时我们还可看出，肥料X在各用量水平上的效用是不一样的，当肥料从4斤增到8斤时能使产量增加19.36斤，而从8斤增到12斤时，虽然同样增施4斤肥料，但却能使总产量增加21.92斤，当肥料从12斤增加到16斤时，效用最高，如此等等。由此看来，肥料X的施用量同产量之间的关系并非直线关系，而是呈现出最初递增后递减的关系，第五行平均边际产量数据就更能说明这一点。施肥量在4斤至8斤的范围内平均每增施一斤肥料能使产量增加4.84斤；在8斤至12斤的范围内却能使产量增加5.48斤，肥料效用最高的区间是12至16斤，平均增施一斤肥料能使产量增加5.64斤，过此区间肥料的效用又逐渐下降，当肥料从32斤增施到36斤时，平均每增施一斤肥料反而能减产0.76斤。然而第六行平均产量的数据又表现出另一种状态，当肥料施用量为20斤时，总的平均产量最高，即平均每增施一斤肥料可增产5斤（ $100 \div 20 = 5$ ）施肥量小于或大于20斤时，都能使平均产量降低。我们还可看出，当施肥量小于20斤时，边际产量是高于平均产量的，而施肥量大于20斤时，边际产量却又低于平均产量。

可是由于施肥试验是用量每增加4斤进行的，还不能准确知道增施1斤、2斤或3斤能使产量增加多少，更不能说出任意一个施肥量能使产量增加多少，也就是说究竟施肥量达到哪一点能使总产量最高，还不能准确地知道，只能估计当肥料X的施用量在32斤左右能使产量最高。同样，我们也不能准确地说出施肥量在哪一点上肥料的效用最大，或能使平均产量最高。为解决这个问题，如果我们能够将试验的肥料增施区间无限缩小，使施肥量成为一个连续的变量，每给一个X量就得出一个总产量数值，这样问题就可以解决了，但这样的试验是不可能实现的，因此，我们只能根据要求，通过试验数据用回归分析方法得出产量函数，并根据它来进行各种计算。

假如我们已知某种资源X同某种产品的产量Y之间存在的函数关系 $Y=f(X)$ 为图2·3(a)中的总产量曲线, 则与该产量曲线相对应的边际产量曲线及平均产量曲线如图2·3(b)中的MP曲线及AP曲线所示。

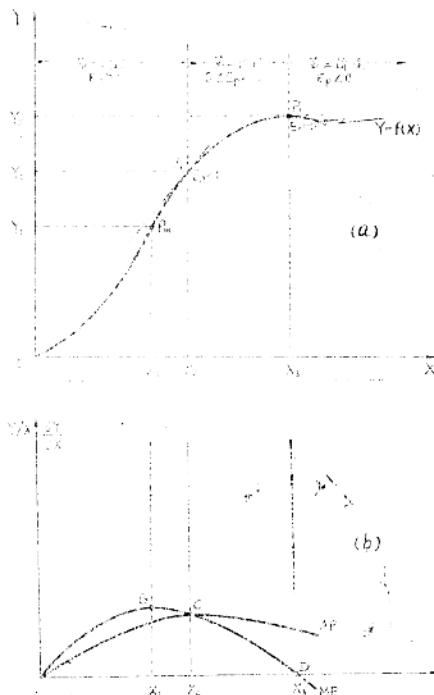


图2.3 总产量、平均产量和边际产量之间的关系

量都小于 Y_t 。

(2) 最高边际产量点: 由于在资源的投入过程中, 随着资源投入量的改变, 其效用也随之改变, 例如当作物非常缺水时, 若“久旱逢甘雨”, 水对增产的效用起初就很大, 每增加一个单位的水就可能会使增产的幅度越来越大, 然而到一定限度时, 再增加水, 就开始效用逐渐降低, 直到最后灌水不但不能使作物增产, 反而会起负作用。随资源投入量的增加, 其效用由较低到最高然后又转入效用下降, 直到最后效用出现负作用时, 在这种情况下, 就必然会出现一个资源效用的最高点, 即资源生产能力的最高点, 这个点的位置应是在当资源的投入量 X 满足:

现在我们用数学方法来解释
图2·3中三条曲线的经济内容
及三者之间的关系。

(1) 最高产量点: 因为在生物产品的再生产过程中对某种资源的需要都是有限的, 所以在一定条件下所投入资源的效用也将是有限的, 也就是说, 当资源的投入量不断增加时, 必定会出现其效用为零的点, 即产量达到最高点。如果继续投入该种资源, 往往也会出现不仅不能使产量增加, 而且会对生物的再生产过程起到负作用, 使产量降低, 即一般常识所知的“肥多烧死, 水多淹死”的现象, 在这种情况下, 用数学的语言来说即为: 当资源的施用量 X 满足:

$$\frac{dY}{dX} = f'(X) = 0 \cdots \cdots (2.6)$$

$$\text{且 } \frac{d^2Y}{dX^2} = f''(X) < 0$$

时, 产量即达最高点。在图2·3中满足上述条件的点为 X_t , 所对应的最高产量点为 P_t , 产量达 Y_t , 也就是说在 P_t 点上的切线是平行X轴的, 且当施肥量稍小于或稍大于 X_t 时, 所对应的产