

高等院校精品课程系列教材

运筹学

(第2版)

熊伟 编著



Operations Research



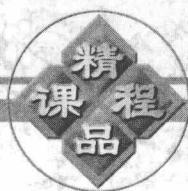
机械工业出版社
China Machine Press

高等院校精品课程系列教材

运筹学

(第2版)

熊伟 编著



Operations Research



机械工业出版社
China Machine Press

本书介绍了线性规划、对偶理论、整数规划、目标规划、运输与指派问题、网络模型、网络计划、动态规划、排队论、存储论、决策论与博弈论等运筹学主要分支的基本理论、基本概念和计算方法。用较多的例题介绍运筹学在管理、经济等领域中的应用。每章都附有大量基本练习题,还详细介绍了WinQSB2.0软件的操作步骤及应用方法,解决了运筹学某些复杂的计算问题,使运筹学方法能实际中更好地得以应用和推广。附录中专门附有WinQSB2.0软件介绍、上机实验指导书、应用案例、判断题、选择题等学习辅助资料。

本书既可作为高校管理和经济类本科生、工商管理硕士(MBA)、公共管理硕士(MPA)、工程硕士(MPM)等运筹学教材,也可作为管理人员和企业决策人员的学习参考书。

版权所有,侵权必究。

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/熊伟编著. -2版. —北京:机械工业出版社, 2009.9
(高等院校精品课程系列教材)

ISBN 978-7-111-27824-5

I. 运… II. 熊… III. 运筹学—高等学校—教材 IV. O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第124132号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑:程琨 版式设计:刘永青

北京诚信伟业印刷有限公司印刷

2009年9月第2版第1次印刷

184mm×260mm · 23.75印张

标准书号:ISBN 978-7-111-27824-5

定价:29.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线:(010) 68326294

投稿热线:(010) 88379007

出版前言

从“华章教育”品牌推出伊始，华章一直秉承“全球采集内容，服务中国教育”的理念，经过近十年的引进、翻译、出版、推广国外优秀教材的历练，培养了一支专业的策划出版及校园营销推广的教育出版队伍。在“十一五”期间将与国内广大院校的老教师们共同合作，以严谨的治学态度及全面服务的专业出版精神，陆续推出大批具有国内一流教学水平的“精品课程系列教材”。

精品课程是具有一流教师队伍、一流教学内容、一流教学方法、一流教材、一流教学管理等特点的示范性课程，是教育部实施的“高等学校教学质量与教学改革工程”的重要组成部分，是教育部深化教学改革，以教育信息化带动教育现代化的一项重要举措。它的有序实施将有助于促进以互联网为核心的现代信息技术在教学中的广泛应用，使广大希望接受高等教育的人群共享国内各高校的优质教学资源，同时进一步提高高中教师、教授多上讲台，全面提高教育教学质量，造就数以千万计的专门人才和一大批拔尖创新人才，提升我国高等教育的综合实力和国际竞争能力。

自2003年精品课程建设项目持续推进以来,国内高校中的优秀教师纷纷在总结本校富有历史传统而又特色突出的课程教学方法与经验的基础上,充分运用现代网络传播技术将优质的教学资源上网共享,使国内其他高校在实施同类课程教学的过程中能够借鉴、使用这些优质的教学资源,在更大范围内提高高等学校的教学和人才培养质量。经过几年的共同努力,已经建立起了较为齐全的各门类及各专业的校、省、国家三级精品课程体系,期间先后有总计1000多门课程通过了专家评审,获得了“国家精品课程”称号,未来还将有更多的课程加入这个行列。

这些各个层次的精品课程建设过程都比较充分地体现了教育部所要求的七个重点，即：具有科学的建设规划；配备高水平的教学队伍；不断进行教学内容和课程体系的改革；使用先进的教学方法和手段；注重建设系列化的优秀教材；高度重视理论与实践两个环节；切实激励各方人员共同参与。也正因为这样的多方面积极参与，使得我国的高等教育在近年来由精英教育转向大众教育的跨越式发展中取得了教学质量上的突破与飞跃。精品课教材作为精品课程的要件之一，比以往教材更加具有实践检验性，教学辅助资源经过不断地更新与补充更加丰富，是精品课教学团队智慧的共同体现。

“师者，所以传道、授业、解惑也。”教材是体现教学内容和教学要求的知识载体，是教师进行教学活动的基本工具，是提高教学质量的重要保证。精品课程教学团队中优秀的老师们集

多年治学经验与教学实践撰写出版相关教材，也是精品课程建设的一个重要方面。华章作为专业的出版团队，长久以来背负“传承专业知识精华，服务中国教育事业”的使命，遵循“分享、专业、创新”的价值观，实践着“国际视野、专业出版、教育为本、科学管理”的出版理念，愿与高等院校的老师共同携手，为中国的高等教育事业愈加国际化而努力！

为更好地服务于精品课程配套教材的出版，华章不仅密切关注高校的优秀课程建设，而且还将利用自身的优势帮助教师完善课程设置、提供教辅资料、准备晋级申报、推广教学经验。具体详情可访问专门网站<http://www.hzbook.com/jpkc.aspx>，并可在线填写出版申请，欢迎您与我们合作。投稿专线：010-88379607；hzjg@hzbook.com。

华章经管出版中心

前言

运筹学是一门以决策支持为目标的学科。运筹学的英文名称是Operations Research (美) 或 Operational Research (英), 缩写为OR, 直译是作业研究、操作研究或运作研究。运筹学是OR的意译, 取自成语“运筹帷幄之中, 决胜千里之外”, 具有运用筹划、出谋献策、以策略取胜等内涵。人们在生产实践中的这种运筹思想自古就有, 但真正成为一门学科, 将一个带有普遍特性的运筹问题抽象成数学模型, 用数学理论求出决策方案的科学方法, 是20世纪40年代才形成的。

运筹学研究的内容^①

运筹学的研究内容丰富, 应用范围广泛, 从军事、政治到管理、经济及工程技术等许多领域都能应用到运筹学的思想和方法。构成运筹学的理论大致分3个部分:

(1) 分析理论。主要研究资源的最优利用、设备最佳运行等问题。常用的数学分析方法有规划论(如线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、目标规划等)、网络模型、最优控制等。随着一些新型学科的发展, 还衍生了一些诸如灰规划、模糊规划、随机规划等专门的分析方法。

(2) 决策理论。主要研究方案或策略的最优选择问题。常用的数学分析方法有博弈论、决策论、多目标决策、存储论。

(3) 随机服务理论即排队论。主要研究随机服务系统排队和拥挤现象问题, 讨论随机服务系统的服务效率、绩效评价和服务设施的最佳设置等问题。

运筹学的分析方法

运筹学是定性分析(如建立数学模型)与定量方法(如求解数学模型)相结合的一门综合应用科学。它广泛应用现有的科学技术和数学方法, 解决实际中提出的专门问题, 为决策者选择最优或较优决策提供定量依据。

要掌握好运筹学方法并成功应用于实践, 不仅要有丰富的自然科学和社会科学的知识, 掌握一定的数理基础方法, 还要用系统的观念去认识问题分析问题, 使研究的对象得到最优或满意的效果。

运筹学方法则贯穿于4个基本步骤, 即提出问题与收集资料、建立模型、求解模型和模型的应用。

^① 参阅文献[3]。

第2版修改内容

本书自2005年出版以来,许多院校采用本书作教材,得到了教师和读者的热情支持与厚爱。怎样编写一本既包含运筹学的基本内容又适合中国特色、教师好教学生易学的教材一直是编者的心愿,这需要不断的改进和完善。机械工业出版社华章分社以各种形式多次征询读者意见,反馈了大量非常有价值的修改建议,不少教师和读者多次通过电子邮件与编者沟通与探讨,使编者受益匪浅,这里表示诚挚的感谢。

第2版修改的内容大致有以下几个方面。

- (1) 例题由浅入深。如第1章开始改为两个变量的建模问题。
- (2) 前后连贯。如第1章的单纯形法和第5章的运输单纯形法始终以一个例题计算,便于各种方法的分析与对比。
- (3) 增减、修改了部分例题和习题。
- (4) 修改了第1版的印刷错误,调整和删除了部分内容。如删除了存储论中的单价膨胀模型。
- (5) 将对策论改为博弈论。
- (6) 增加了一个应用案例。
- (7) 对WinQSB2.0软件的功能做了进一步开发。如用软件求解最小费用最大流问题。
- (8) 增加了运筹学教学建议。

本书的基本特色

第2版保持了第1版的基本内容与风格,有以下主要特色。

- (1) 内容由浅入深,由易到难,注重启发式教学,部分习题编排了具有启发性的思考题。在通俗介绍运筹学的基本内容的同时,适量介绍一些基本理论。
- (2) 加强基本概念和基本方法的训练。有些难点、重点或容易混淆的概念用“注意”特别提示。每章除了大量的基本练习题外,附录D、附录E编写了大量的判断题和选择题,供学生课外练习。
- (3) 注重理论与实际相结合。例题尽可能将经济与管理的实际背景相联系,附录C收录了有一定难度的应用案例,可供学生课堂讨论。
- (4) 详细介绍WinQSB软件的基本操作及其应用。充分利用先进的计算机工具,发挥WinQSB软件功能,解决比较大型数学模型的求解问题。附录B中附有上机实验指导书,供学生上机实验学习参考。
- (5) 主要术语都能查到对应的英文单词。

关于运筹学软件

本书主要介绍WinQSB2.0软件,该软件包含了运筹学的大部分计算,具体应用范围在附录A中介绍,操作方法在每章最后一节有详细的讲解。有关Excel软件的操作与应用请参阅文献[12,13]。目前国内外各种版本的运筹学软件很多,各种软件请参阅文献[4]。

多媒体教学辅助资料

为配合教师进行多媒体教学和批改作业，华章分社为采用本书作为教材的教师提供配套的教师用光盘一张。光盘内容有：WinQSB2.0软件、全书所有内容的PowerPoint文档（可任意修改）、判断题和选择题答案、习题答案、应用案例答案、课堂电子试题及其答案，书中例题、习题及应用案例数据文件等辅助学习资料。具体事宜可以通过marketing@hzbook.com联系。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请读者给予指正，欢迎继续交流讨论提出建议。
编者电子邮箱：xiongw@whut.edu.cn。

熊 伟

武汉理工大学管理学院

2009年6月

教学建议

教学目的

运筹学是管理与经济类专业的一门专业基础课。本课程教学的目的在于使学生根据研究问题的背景学会建立运筹学的数学模型,掌握运筹学的基本理论和基本运算技能,在运用运筹学方法分析和解决问题方面的能力得到培养和训练,能够运用计算机软件求解常用的运筹学数学模型,为进一步学习专业课程提供必要的基础,为培养适应现代化需要,掌握现代科学管理方法的管理人才服务。

前期需要掌握的知识

高等数学、线性代数、概率论与数理统计等课程相关知识。

课时分布建议

教学内容	学习要点	课时安排		案例使用建议
		本科	在职硕士	
第1章 线性规划	(1) 掌握建立数学模型的方法与技巧 (2) 了解线性规划的有关基本概念 (3) 运用图解法、单纯形法求解模型 (4) 掌握单纯形法的五个计算公式	14	6	案例C-1
第2章 线性规划的对偶理论	(1) 了解如何写对偶模型 (2) 掌握有关对偶性质及影子价格的含义 (3) 学习对偶单纯形法 (4) 了解灵敏度分析及参数分析	8	2	案例C-2
第3章 整数规划	(1) 了解整数规划数学模型的特征与类型 (2) 学习求解整数规划模型的分支定界法、割平面法及隐枚举法	4	4	案例C-3
第4章 目标规划	(1) 了解目标规划数学模型的特征 (2) 学习建立目标规划数学模型 (3) 掌握求解目标规划的图解法及单纯形法	4	4	案例C-4
第5章 运输与指派问题	(1) 建立运输与指派问题的数学模型 (2) 掌握运输单纯形法的详细步骤 (3) 了解运输问题的应用 (4) 掌握匈牙利法的条件及计算步骤	8	4	案例C-5、 案例C-7

(续)

教学内容	学习要点	课时安排		案例使用建议
		本科	在职硕士	
第6章 网络模型	(1) 熟悉网络图在管理中的应用 (2) 掌握求最小树、最短路、最大流、最小费用最大流的各种算法 (3) 了解中国邮路与旅行售货员问题的求解	8	4	案例C-6
第7章 网络计划	(1) 熟悉编制计划网络图的步骤和方法 (2) 掌握网络参数的计算 (3) 了解网络计划的几种优化方法	8	4	
第8章 动态规划	(1) 了解动态规划数学模型的构成要素与原理 (2) 掌握资源分配、生产与储存、背包问题等几种应用模型的建立与求解方法 (3) 运用动态规划方法求解简单的线性与非线性规划	8	4	
第9章 排队论	(1) 掌握排队论的基本概念 (2) 掌握单服务台、多服务台几种模型的状态概率及运行指标的计算 (3) 了解几种特殊分布模型的计算 (4) 了解排队系统的优化内容及优化方法	10	4	案例C-8
第10章 存储论	(1) 了解存储论的基本概念 (2) 掌握四种确定性存储模型的推导与计算 (3) 了解经济批量模型的灵敏度分析与批量折扣分析 (4) 掌握单时期离散与连续随机模型的计算	8	4	
第11章 决策论	(1) 熟悉决策分析的概念、原则及分类 (2) 掌握非确定型决策的五种准则下的决策方法 (3) 掌握风险型决策的期望值、决策树、贝叶斯等决策方法 (4) 了解马尔可夫决策的基本内容与决策方法	6	4	
第12章 博弈论	(1) 熟悉博弈论的基本内容及纳什均衡的概念 (2) 运用反应函数法求解博弈 (3) 熟练掌握有限二人零和博弈的求解 (4) 了解其他几种博弈的概念及简单求解	8	4	
课时总计		94~100	40~48	

说明：本书的第1章至第8章基本是确定型问题，第9章至第12章涉及随机问题。在课时安排上，本科生一般是48~64个课时，可根据需要内容进行组合。MBA、MPM、MPA等在职硕士主要讲解各章的模型及其应用，进行课堂讨论与案例分析，掌握运用WinQSB软件求解模型的操作方法，如第1章线性规划，用3个课时介绍线性规划应用的条件、背景、范围和步骤，建立数学模型的方法与技巧，用3个课时演示软件操作与课堂讨论。

目 录

出版前言 前 言 教学建议

第1章 线性规划	1
1.1 数学模型	1
1.1.1 应用模型举例	1
1.1.2 线性规划的一般模型	5
1.2 图解法	5
1.3 线性规划的标准型	8
1.4 线性规划的有关概念	11
1.5 单纯形法	13
1.5.1 普通单纯形法	13
1.5.2 大M和两阶段单纯形法	20
1.5.3 有关单纯形法计算公式	25
1.5.4 退化与循环	29
1.6 WinQSB软件应用	30
习题	36

第2章 线性规划的对偶理论	41
2.1 对偶线性规划模型	41
2.1.1 引例	41
2.1.2 线性规划的规范形式	42
2.1.3 对偶模型	43
2.2 对偶问题的性质	46

2.2.1 对偶性质	46
2.2.2 影子价格	51
2.3 对偶单纯形法	51
2.4 灵敏度分析与参数分析	54
2.4.1 价值系数的灵敏度分析	55
2.4.2 资源限量的灵敏度分析	57
2.4.3 综合分析	59
2.4.4 参数分析	63
2.5 WinQSB软件应用	64
习题	68

第3章 整数规划	70
3.1 整数规划的数学模型	70
3.2 纯整数规划的求解	73
3.2.1 求解纯整数规划的分支定界法	73
3.2.2 求解IP的割平面法	75
3.3 0-1规划的求解	77
3.3.1 隐枚举法求解BIP问题	77
3.3.2 分支-隐枚举法求解BIP问题	79
3.4 WinQSB软件应用	81
习题	82

第4章 目标规划	85
4.1 目标规划的数学模型	85
4.1.1 引例	85
4.1.2 数学模型	87
4.2 目标规划的图解法	91

4.3 单纯形法	93
4.4 WinQSB软件应用	97
4.4.1 目标规划求解	97
4.4.2 多目标规划求解	98
习题	98

第5章 运输与指派问题

5.1 运输问题的数学模型及其特征	101
5.1.1 数学模型	101
5.1.2 模型特征	102
5.2 运输单纯形法	106
5.2.1 初始基本可行解	106
5.2.2 求检验数	111
5.2.3 调整运量	113
5.2.4 最大值问题	117
5.2.5 不平衡运输问题	117
5.2.6 需求量不确定的运输问题	120
5.2.7 中转问题	120
5.3 运输模型的应用	121
5.4 指派问题	123
5.4.1 数学模型	123
5.4.2 解指派问题的匈牙利算法	125
5.4.3 其他变异问题	127
5.5 WinQSB软件应用	128
5.5.1 一般运输模型	128
5.5.2 中转问题	130
5.5.3 综合生产计划问题	131
5.5.4 指派问题	133
习题	134

第6章 网络模型

6.1 最小树问题	138
6.1.1 树的概念	138
6.1.2 最小部分树	138
6.2 最短路问题	140

6.2.1 最短路问题的网络模型	140
6.2.2 有向图的Dijkstra算法	140
6.2.3 无向图的Dijkstra算法	142
6.2.4 最短路的Floyd算法	144
6.2.5 最短路应用举例	146
6.3 最大流问题	148
6.3.1 基本概念	148
6.3.2 Ford-Fulkerson标号算法	149
6.3.3 割集与割量	152
6.3.4 最小费用流	152
6.3.5 最大流应用举例	156
6.4 旅行售货员与中国邮路问题	157
6.4.1 旅行售货员问题	157
6.4.2 中国邮路问题	159
6.5 WinQSB软件应用	160
6.5.1 最小树与最短路	161
6.5.2 最大流与最小费用流	162
6.5.3 旅行售货员问题	163
习题	164

第7章 网络计划

7.1 绘制网络图	166
7.1.1 项目网络图的基本概念	166
7.1.2 绘制网络图	168
7.1.3 工序时间的估计	169
7.2 网络时间参数	170
7.2.1 时间参数公式及其含义	170
7.2.2 计算实例	172
7.2.3 项目完工的概率	174
7.3 网络计划的优化与调整	175
7.3.1 时间-成本控制	175
7.3.2 资源的合理配置	179
7.4 WinQSB软件应用	181
习题	185

第8章 动态规划	188
8.1 动态规划数学模型	188
8.1.1 动态规划的原理	188
8.1.2 基本概念	189
8.2 资源分配问题	193
8.3 生产与存储问题	196
8.4 背包问题	200
8.5 其他动态规划模型	202
8.5.1 求解线性规划模型	202
8.5.2 求解非线性规划模型	203
8.5.3 设备更新问题	204
8.6 WinQSB软件应用	205
8.6.1 最短路问题	205
8.6.2 背包问题	206
8.6.3 生产与存储问题	207
习题	208
第9章 排队论	211
9.1 排队论的基本概念	211
9.1.1 排队系统的描述	211
9.1.2 排队系统的基本组成	212
9.1.3 排队系统的主要数量指标、 记号和符号	213
9.2 排队系统常用分布	215
9.2.1 负指数分布	215
9.2.2 泊松分布	215
9.2.3 k 阶爱尔朗分布	217
9.3 单服务台模型	217
9.3.1 基本模型	217
9.3.2 有限队列模型	220
9.3.3 有限顾客源模型	222
9.4 多服务台模型	224
9.4.1 基本模型	224
9.4.2 有限队列模型	226
9.4.3 有限顾客源模型	227
9.5 其他服务时间分布模型	229
9.5.1 一般分布模型	229
9.5.2 定长分布模型	230
9.5.3 爱尔朗分布模型	230
9.6 排队系统的优化	231
9.6.1 排队系统经济分析	231
9.6.2 最优服务率的确定	232
9.6.3 最优服务设施数的确定	234
9.7 WinQSB软件应用	235
9.7.1 基本操作方法	235
9.7.2 软件操作举例	236
习题	239
第10章 存储论	241
10.1 确定型经济订货批量模型	242
10.1.1 经济批量模型	243
10.1.2 几种特殊经济批量模型	245
10.1.3 再订货点	249
10.1.4 存储策略分析	249
10.2 经济批量模型参数分析	250
10.2.1 灵敏度分析	250
10.2.2 批量折扣分析	251
10.3 单时期随机需求模型	252
10.3.1 离散型随机存储模型	253
10.3.2 连续型随机存储模型	257
*10.4 多时期存储控制系统	259
10.4.1 连续盘存的(s, Q)存储控制系统	259
10.4.2 连续盘存的(s, S)存储控制系统	263
10.4.3 定期盘存的(R, S)存储控制系统	264
10.4.4 定期盘存的(R, s, S)存储控制 系统	264
10.5 WinQSB软件应用	265
10.5.1 确定需求模型	265
10.5.2 单时期离散型随机需求模型	267
10.5.3 单时期连续型随机需求模型	268
10.5.4 多时期动态需求批量问题	268
习题	269

第11章 决策论	271	12.3 反应函数法	304
11.1 决策分析的基本问题	271	12.3.1 基本方法	304
11.1.1 决策分析的基本概念	271	12.3.2 反应函数法的应用	305
11.1.2 决策分析的基本原则	272	12.4 有限二人零和博弈	306
11.1.3 决策分析的基本分类	272	12.4.1 数学定义	306
11.2 确定型和非确定型决策	274	12.4.2 纯策略矩阵博弈	307
11.2.1 确定型决策	274	12.4.3 混合策略矩阵博弈	309
11.2.2 非确定型决策	275	12.4.4 矩阵博弈纳什均衡	310
11.3 风险型决策	277	12.4.5 矩阵博弈求解方法	311
11.3.1 期望值准则	277	12.5 有限二人非零和博弈	316
11.3.2 决策树法	278	12.5.1 数学定义	316
11.3.3 贝叶斯决策	281	12.5.2 有限二人非零和博弈纳什均衡	317
11.4 效用理论	283	12.5.3 有限二人非零和博弈求解方法	317
11.4.1 效用的概念	283	12.5.4 有限二人合作型博弈	319
11.4.2 效用曲线的绘制	283	12.6 其他博弈问题简介	321
11.4.3 效用曲线的类型	284	12.6.1 二人无限零和博弈	321
11.4.4 效用曲线的应用	284	12.6.2 n 人博弈	321
11.5 马尔可夫决策	285	12.6.3 动态博弈	323
11.5.1 马尔可夫决策模型	285	12.7 WinQSB软件应用	324
11.5.2 马尔可夫决策的基本方程组	290	习题	325
11.5.3 马尔可夫决策问题的改进算法	291	附录A WinQSB软件操作指南	327
11.6 WinQSB软件应用	293	A.1 WinQSB软件简介	327
11.6.1 效益表分析	293	A.2 WinQSB操作简介	327
11.6.2 决策树	294	附录B 实验指导书	330
11.6.3 贝叶斯分析	295	附录C 案例与应用	336
11.6.4 马尔可夫过程	296	附录D 判断题	345
习题	297	附录E 选择题	351
第12章 博弈论	299	参考文献	360
12.1 引言	299	出版致谢	361
12.1.1 博弈论概述	299		
12.1.2 博弈三要素	300		
12.1.3 博弈的结构和分类	300		
12.2 纳什均衡	301		
12.2.1 纳什均衡定义	301		
12.2.2 混合策略纳什均衡	303		

第1章

线性规划

1.1 数学模型

1.1.1 应用模型举例

线性规划 (Linear Programming, LP) 通常研究资源的最优利用、设备最佳运行等问题。例如, 当任务或目标确定后, 如何统筹兼顾, 合理安排, 用最少的资源 (如资金、设备、原材料、人工、时间等) 去完成确定的任务或目标; 企业在一定的资源条件限制下, 如何组织安排生产获得最好的经济效益 (如产品量最多、利润最大)。

【例1-1】生产计划问题。某企业在计划期内计划生产甲、乙两种产品。按工艺资料规定, 每件产品甲需要消耗材料A 2公斤, 消耗材料B 1公斤, 每件产品乙需要消耗材料A 1公斤, 消耗材料B 1.5公斤。已知在计划期内可供材料分别为40、30公斤; 每生产一件甲、乙两种产品, 企业可获得利润分别为300、400元, 如表1-1所示。假定市场需求无限制, 企业决策者应如何安排生产计划, 使企业在计划期内总的利润收入最大。

表1-1 产品资源消耗

资源 \ 消耗 \ 产品	产品		现有资源
	甲	乙	
材料A	2	1	40
材料B	1	1.5	30
利润 (元/件)	300	400	

解 这个生产计划问题可用数学语言来描述, 即可以用数学模型表示。假设在计划期内生产产品甲、乙的产量为待定未知数 x_1 、 x_2 。

用 Z 表示利润, 则有 $Z=300x_1+400x_2$, 企业的目标是要使利润达到最大, 用数学表达式描述就是 $\max Z=300x_1+400x_2$ 。材料消耗总量不得超过供应量, 应有 $2x_1+x_2\leq 40$, $x_1+1.5x_2\leq 30$ 。生产的产量不能小于零, 用数学式子表示就是 $x_1\geq 0$ 、 $x_2\geq 0$ 。因此这个问题的数学模型为可归纳为

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 1.5x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

在上面的例题中 x_j 称为决策变量, 不等式组称为约束条件, 函数 Z 称为目标函数, 随着讨论问题的要求不同, Z 可以是求最大值(如例1-1)也可以是求最小值(如例1-2), 因为 Z 是 x_j 的线性函数, Z 的最大值亦是极大值, 最小值亦是极小值, 所以有时也将 $\max Z$ 与 $\min Z$ 说成求 Z 的极大值与极小值。

线性规划的数学模型由决策变量、目标函数及约束条件构成, 称为三个要素。

其特征是:

- (1) 解决问题的目标函数是多个决策变量的线性函数, 求最大值或最小值;
- (2) 解决问题的约束条件是一组多个决策变量的线性不等式或等式。

如果要求部分或全部变量是整数, 则模型称为整数规划模型; 如果目标函数或约束条件是非线性的, 则模型称为非线性规划模型。

由例1-1知, 一个生产计划问题可用线性规划模型来描述。若求出 x_1, x_2 的值即最优解, 使目标函数达到最大值, 就得到一种最优生产计划方案。

【例1-2】某商场决定: 营业员每周连续工作5天后连续休息2天, 轮流休息。根据统计, 商场每天需要的营业员如表1-2所示。

商场人力资源部应如何安排每天的上班人数, 使商场总的营业员最少。

解 设 x_j ($j=1, 2, \dots, 7$)为休息2天后星期一到星期日开始上班的营业员数量, 则这个问题的线性规划模型为

表1-2 所需营业员数统计表

星期	需要人数	星期	需要人数
一	300	五	480
二	300	六	600
三	350	日	550
四	400		

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 300 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 350 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 400 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 480 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 600 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 550 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 7 \end{cases}$$

像这类问题在实际中经常碰到, 例如实验室工作人员和医院的医护人员值班问题, 生产过程中在制品库存问题, 都可建立类似的线性规划模型。

【例1-3】合理用料问题。某汽车需要用甲、乙、丙三种规格的轴各一根, 这些轴的规格分别是1.5m、1m、0.7m, 这些轴需要用同一种圆钢来做, 圆钢长度为4m。现在要制造1000辆汽车, 最少要用多少圆钢来生产这些轴?

解 这是一个条材下料问题。为了计算简便, 这里假定切割的切口宽度为零, 在实际应用中, 应将切口宽度计算进去。求所用圆钢数量分两步计算, 先求出在一根4 m长的圆钢上切割三种规格的毛坯共有多少种切割方案, 再在这些方案中选择最优或次优方案, 即建立线性规划数学模型。

第一步: 设一根圆钢切割成甲、乙、丙三种轴的根数分别为 y_1, y_2, y_3 , 则切割方式可用不等式 $1.5y_1 + y_2 + 0.7y_3 \leq 4$ 表示, 求这个不等式关于 y_1, y_2, y_3 的非负整数解并且余料不超过0.7m。例如 $y_1=1, y_2=1$ 则 $y_3=2$, 余料为0.1。像这样的非负整数解共有10组, 也就是有10种下料方式, 如表1-3所示。

表1-3 下料方案

方案 规格(根)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	需求量
y_1	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	1000
y_2	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0	1000
y_3	0	1	0	2	3	0	1	2	4	5	1000
余料 (m)	0	0.3	0.5	0.1	0.4	0	0.3	0.6	0.2	0.5	

第二步：建立线性规划数学模型。设 x_j ($j=1, 2, \dots, 10$)为第 j 种下料方案所用圆钢的根数。则用料最少的数学模型为

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{j=1}^{10} x_j \\ &\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \geq 1000 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + 4x_6 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 & \geq 1000 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 + x_7 + 2x_8 + 4x_9 + 5x_{10} & \geq 1000 \\ x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, 10 \end{cases} \end{aligned}$$

注意：余料不能超过最短毛坯的长度；最好将毛坯长度按降序排列，即先切割长度最长的毛坯，再切割次长的，最后切割最短的，不能遗漏了方案。在实际中，如果毛坯规格较多，毛坯的长度又很短的方案可能很多，甚至有几千个方案，用人工编排方案几乎是不可能的。解决这一问题可以编制一个计算机程序由计算机编排方案，给余料确定一个临界值 μ ，当某方案的余料大于 μ 时马上舍去这种方案，从而减少占用计算机内存，也简化了后面的数学模型，例如在表1-3中，去掉余料大于0.4的方案，则剩下7种方案，这时可能得到的是次优方案。也可以将毛坯种类分成若干组来编排方案。

【例1-4】配料问题。某钢铁公司生产一种合金，要求的成分规格是：锡不少于28%，锌不多于15%，铅恰好10%，镍要界于35%~55%之间，不允许有其他成分。钢铁公司拟从五种不同级别的矿石中进行冶炼，每种矿物的成分含量和价格如表1-4所示。矿石杂质在冶炼过程中废弃，求每吨合金成本最低的矿物数量。假设矿石在冶炼过程中金属含量没有发生变化。

表1-4 矿石的金属含量

合金 矿石	锡(%)	锌(%)	铅(%)	镍(%)	杂质(%)	费用(元/吨)
1	25	10	10	25	30	340
2	40	0	0	30	30	260
3	0	15	5	20	60	180
4	20	20	0	40	20	230
5	8	5	15	17	55	190

解 设 x_j ($j=1, 2, \dots, 5$)是第 j 种矿石数量，目标函数是总成本最低，得到下列线性规划模型

$$\begin{aligned} \min Z &= 340x_1 + 260x_2 + 180x_3 + 230x_4 + 190x_5 \\ &\begin{cases} 0.25x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_4 + 0.08x_5 \geq 0.28 \\ 0.1x_1 + 0.15x_3 + 0.2x_4 + 0.05x_5 \leq 0.15 \\ 0.1x_1 + 0.05x_3 + 0.15x_5 = 0.1 \\ 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 + 0.17x_5 \leq 0.55 \\ 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 + 0.17x_5 \geq 0.35 \\ 0.7x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.8x_4 + 0.45x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, 5 \end{cases} \end{aligned}$$