

高 职 高 专 学 校 教 材

S H U X U E

上海高校《高等数学》编写组 编

G A O D E N G

高等数学 中册

(第五版)

上海科学技术出版社

● 高职高专学校教材



# 高等数学

中册

(第五版)

Advanced

Mathematics

上海高校《高等数学》编写组 编

上海科学技术出版社

## 内 容 提 要

高等数学是高职高专工科各专业的一门基础课,为适应高职高专的发展和教学改革的需要,在上海市教委的组织和领导下,完成《高等数学》(第五版)的编写。

《高等数学》(中册)主要介绍多元函数微分学、多元函数积分学、级数、MATLAB 软件简介及其在微积分中的应用、拉普拉斯变换等知识。

本书可作为高职高专院校、电视大学、各类成人教育各专业的数学课程的教材,也可作为工程技术人员及数学爱好者的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 中册/上海高校《高等数学》编写组编. —5  
版. —上海:上海科学技术出版社,2007. 6(2009. 7重印)

高职高专学校教材

ISBN 978-7-5323-8891-2

I. 高… II. 上… III. 高等数学—高等学校:技术  
学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第040187号

责任编辑 周玉刚 王韩欢

上海世纪出版股份有限公司 出版、发行  
上海科学技术出版社

(上海钦州南路71号 邮政编码200235)

新华书店上海发行所经销 常熟市华顺印刷有限公司印刷

开本 890×1240 1/32 印张 6.75 字数 162 000

1985年5月第1版 1992年4月第2版

1998年6月第3版 2002年2月第4版

2007年6月第5版 2009年7月第40次印刷

ISBN 978-7-5323-8891-2

定价:11.20元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,  
请向承印厂联系调换

# 上海高校《高等数学》编写组

中册(第五版)

主 审 胡启迪

主 编 朱弘毅

副主编 楼永明 黄 明 孙福兴 杨丽英

# 序



教材是任何一所学校中教师与学生接触时间最长的教授、学习和交流的媒体,它不但在校内教学过程中起到至关重要的作用,往往还伴随着学习者毕生的学习、工作和生活。

上海市高等工业专科学校是随着经济建设的发展而成长起来,并成为上海市高等教育体系中的重要组成部分,形成了一个具有工程专科教育特色的层次。近几年来,上海市高等工业专科学校积极参加了国家教委组织的专业教学改革试点,在办出工业专科特色,提高教育质量上进行了认真的探索和实践。如今,以他们的专业改革试点的成果,积极推进高等工业专科的教材建设,是一件很有意义的工作。特别从建设系列教材的考虑,是一项很有远见的决策。

教材的主要使用者是学生,因此编写教材应注意下列三个方面:第一,一本好教材应该根据学习对象和该类学科的发展,尽可能地把最新的内容合理地安排其中。第二,作为教材,其内容编排的顺序、深浅等方面,应该符合人的认知规律,以利于学习。特别对高等工业专科教材来说还更应该突出联系工业发展的实际,注重技能技巧和应用能力的培养。第三,教材作为教学的媒体,它应该能起到教书育人的作用,促进学习素质的培养和训练。

这次第一批六门课程:数学、物理、化学、英语、计算机和金工系列教材的编写作了初步的尝试,它凝聚了编写人员的辛劳和心血。

目前,全国高校正在实施面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的建设计划.高等工业专科系列教材的出版也是上海高等工业专科学校的一件大事,它不仅仅局限于目前的六门教材,还有待于更深入的改革和发展.我们期望上海高等工业专科的教学内容和课程体系改革取得更大的成绩,将以更新、更好的教材奉献于 21 世纪,为我国的社会主义建设增添光辉.

张伟江

# 前 言

《高等数学》是高职高专工科各专业的—门基础课,为适应高职高专的发展和教学改革的需要,在上海市教委的组织和领导下,组建上海高校《高等数学》编写组,进行《高等数学》(第五版)的编写工作。

本教材在前几版的基础上,从高职高专的培养目标出发,参照高职高专数学课程基本要求,注意贯彻“以应用为目的、以必需够用为度”的原则,结合教学改革的成果,力求《高等数学》(第五版)更符合应用型人才的培养,更适合高职高专的数学课程的教学需要。

本教材在内容的选取上,除保证必要的系统外,注意内容的应用性和实际性,紧扣高职高专学生的培养目标.为了让学生掌握数学知识的实质及所含的数学思想,详细介绍基本概念的实际背景,让学生掌握解决问题的方法;不追求理论证明和推导的严密性;注意加强基本运算方法的训练、计算能力和应用能力的培养,但不追求过分复杂的计算.为了将计算机融入高等数学,我们简单介绍国际上最流行的 MATLAB 数学软件的操作及其在微积分、矩阵运算、线性方程组求解、统计分析等方面的应用.本教材每节后配有习题,每章后配有该章的复习题,书末附有习题答案。

全书分上、中、下三册.上册共六章,内容包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,微分方



程等;中册共五章,内容包括多元函数微积分,级数,MATLAB 软件简介及其在微积分中的应用,拉普拉斯变换等;下册共六章,内容包括矩阵(含行列式),线性方程组,事件与概率,随机变量及其分布,数字特征,统计分析,MATLAB 软件在矩阵运算、求解线性方程组和统计分析中的应用等.

本教材由朱弘毅主编,楼永明、黄明、孙福兴、杨丽英任《高等数学》(中册)副主编,参加本教材编写的有(以姓氏笔画为序):冯巧玲、朱弘毅、朱鸿德、孙劼、孙福兴、杨丽英、杨臻、肖红慧、吴伟计、沈剑华、张峰、易超琴、赵东升、徐娟娟、黄玉洁、黄明、楼永明、诸建平、唐爱霞。

《高等数学》(第五版)由上海市教育考试院原院长胡启迪教授主审,参加审稿的还有(以姓氏笔画为序):王鸿业、乐经良、李镛、周玉刚、桂子鹏、谭永基等,他们认真审阅原稿,并提出许多宝贵的意见和建议.本书在编写和出版过程中得到上海市教委高教处徐国良同志、上海科学技术出版社、上海新侨职业技术学院教务处许文春及审稿组各位专家的支持和帮助,在此表示衷心的感谢.

限于编者的水平和时间的仓促,书中一定存在不妥之处,诚挚地希望广大的教师和学生提出批评、建议与指正.

编者

2007年6月



# 目 录

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 第七章 多元函数微分学 .....           | 1  |
| 第一节 空间直角坐标系与空间曲面、空间曲线 ..... | 1  |
| 一、空间直角坐标系 .....             | 1  |
| 二、空间两点间的距离 .....            | 3  |
| 三、空间曲面与空间曲线 .....           | 5  |
| 习题 7-1 .....                | 9  |
| 第二节 多元函数的基本概念 .....         | 10 |
| 一、多元函数的概念 .....             | 10 |
| 二、二元函数的极限与连续 .....          | 14 |
| 习题 7-2 .....                | 17 |
| 第三节 偏导数 .....               | 18 |
| 一、偏导数的概念 .....              | 18 |
| 二、高阶偏导数 .....               | 23 |
| 习题 7-3 .....                | 25 |
| 第四节 全微分及其应用 .....           | 26 |
| 一、全微分的概念及计算 .....           | 26 |
| 二、全微分在近似计算中的应用 .....        | 30 |
| 习题 7-4 .....                | 31 |
| 第五节 复合函数与隐函数的求导法则 .....     | 32 |
| 一、多元复合函数的求导法则 .....         | 32 |
| 二、隐函数的求导法则 .....            | 37 |
| 习题 7-5 .....                | 39 |

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 第六节 二元函数的极值 .....     | 40 |
| 一、二元函数的极值 .....       | 41 |
| 二、条件极值 .....          | 45 |
| 习题 7-6 .....          | 48 |
| 复习题七 .....            | 49 |
| <br>                  |    |
| 第八章 多元函数积分学 .....     | 52 |
| 第一节 二重积分的概念与性质 .....  | 52 |
| 习题 8-1 .....          | 55 |
| 第二节 二重积分的计算 .....     | 56 |
| 一、在直角坐标系中计算二重积分 ..... | 56 |
| 二、在极坐标系中计算二重积分 .....  | 62 |
| 习题 8-2 .....          | 65 |
| 复习题八 .....            | 67 |
| <br>                  |    |
| 第九章 级数 .....          | 69 |
| 第一节 数项级数 .....        | 69 |
| 一、数项级数的基本概念 .....     | 69 |
| 二、级数的基本性质 .....       | 75 |
| 习题 9-1 .....          | 77 |
| 第二节 数项级数的审敛法 .....    | 78 |
| 一、正项级数及其审敛法 .....     | 78 |
| 二、任意项级数 .....         | 81 |
| 习题 9-2 .....          | 85 |
| 第三节 幂级数 .....         | 86 |
| 一、幂级数及其收敛域 .....      | 87 |
| 二、幂级数的运算 .....        | 92 |
| 习题 9-3 .....          | 94 |

|  |            |
|--|------------|
| 第四节 函数展开成幂级数 .....                     | 95         |
| 一、泰勒级数 .....                           | 95         |
| 二、函数展开成幂级数 .....                       | 97         |
| 习题 9-4 .....                           | 102        |
| 复习题九 .....                             | 103        |
| <br>                                   |            |
| <b>第十章 MATLAB 软件简介及其在微积分中的应用 .....</b> | <b>105</b> |
| 第一节 MATLAB 软件基础知识 .....                | 105        |
| 一、MATLAB 软件的安装和启动 .....                | 105        |
| 二、MATLAB 软件命令窗口的使用 .....               | 106        |
| 三、MATLAB 软件的运算符 .....                  | 108        |
| 四、MATLAB 软件的符号计算 .....                 | 109        |
| 习题 10-1 .....                          | 116        |
| 第二节 MATLAB 软件在微积分中的应用 .....            | 116        |
| 一、用 MATLAB 软件求极限 .....                 | 116        |
| 二、用 MATLAB 软件求导数和解导数应用问题 .....         | 118        |
| 三、用 MATLAB 软件进行积分运算 .....              | 123        |
| 习题 10-2 .....                          | 125        |
| 第三节 MATLAB 软件在多元函数微积分中的应用 .....        | 127        |
| 一、用 MATLAB 软件求多元函数的偏导数 .....           | 127        |
| 二、用 MATLAB 软件求多元函数的极值 .....            | 129        |
| 三、用 MATLAB 软件求二重积分 .....               | 132        |
| 习题 10-3 .....                          | 133        |
| 第四节 MATLAB 软件在微分方程与级数中的应用 .....        | 134        |
| 一、MATLAB 软件在微分方程中的应用 .....             | 134        |
| 二、MATLAB 软件在级数中的应用 .....               | 136        |
| 习题 10-4 .....                          | 139        |
| 复习题十 .....                             | 140        |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| <b>第十一章 拉普拉斯变换</b> .....      | 142 |
| <b>第一节 拉普拉斯变换的概念</b> .....    | 142 |
| 一、拉普拉斯变换的概念 .....             | 142 |
| 二、一些常用函数的拉氏变换 .....           | 143 |
| 习题 11-1 .....                 | 144 |
| <b>第二节 拉普拉斯变换的基本性质</b> .....  | 145 |
| 一、线性性质与相似性质 .....             | 145 |
| 二、延迟性质与平移性质 .....             | 145 |
| 三、微分性质与积分性质 .....             | 147 |
| 习题 11-2 .....                 | 150 |
| <b>第三节 拉普拉斯逆变换</b> .....      | 150 |
| 习题 11-3 .....                 | 153 |
| <b>第四节 卷积与拉普拉斯变换的应用</b> ..... | 153 |
| 一、卷积 .....                    | 153 |
| 二、用拉普拉斯变换解线性微分方程 .....        | 156 |
| 习题 11-4 .....                 | 158 |
| 复习题十一 .....                   | 158 |
| <br>                          |     |
| <b>附录</b> .....               | 160 |
| 附录一 习题答案 .....                | 160 |
| 附录二 常用公式 .....                | 191 |
| 附录三 英汉词汇对照表 .....             | 196 |

# 第七章 多元函数微分学

本章将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数微分学及其应用.

## 第一节 空间直角坐标系与空间 曲面、空间曲线

### 一、空间直角坐标系

在平面解析几何中,借助平面直角坐标系,使平面上的点  $P$  与有序实数对  $(x, y)$  建立一一对应关系,由此将平面曲线与方程建立了一一对应关系.为了建立空间图形与方程的联系,也需要通过建立空间直角坐标系来实现.

在空间任意取一定点  $O$ ,过点  $O$  作三条互相垂直的数轴,它们都以点  $O$  为原点,且一般具有相同的单位长度.这三条数轴分别称为  $x$  轴(横轴), $y$  轴(纵轴)与  $z$  轴(竖轴),统称为坐标轴.通常把  $x$  轴和  $y$  轴配置在水平面上,而  $z$  轴则为铅垂线;它们的正方向要符合右手规则,如图 7.1 所示.这样的三条坐标轴就构成了一

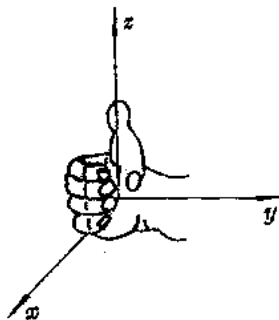


图 7.1

一个空间直角坐标系 (rectangular space coordinates system), 其中定点  $O$  称为坐标原点.

在空间直角坐标系中, 任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面. 例如, 由  $x$  轴和  $y$  轴所确定的坐标面称为  $xOy$  坐标面. 类似的还有  $yOz$  坐标面和  $zOx$  坐标面. 三个坐标面把空间分为八个部分, 每一部分称为一个卦限 (坐标面上的点不属于卦限), 其顺序规定如图 7.2 所示.

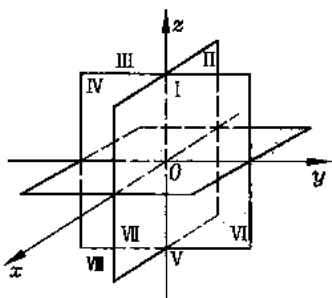


图 7.2

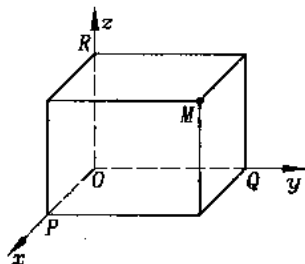


图 7.3

建立了空间直角坐标系, 就可把空间的点与一组有序实数建立联系. 设  $M$  为空间直角坐标系中的任意一点, 过点  $M$  作三个平面分别垂直于  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴, 它们与坐标轴的交点分别为  $P$ 、 $Q$  和  $R$ . 设这三点在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上的坐标分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$ , 于是空间一点  $M$  就唯一确定了一组有序数  $x$ 、 $y$  和  $z$ , 如图 7.3 所示. 反之, 对任意一组有序实数  $x$ 、 $y$ 、 $z$ , 可依次在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上分别取坐标为  $x$ 、 $y$  和  $z$  的点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ , 然后过  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  分别作垂直于  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴的三个平面, 这三个平面相交于唯一的一点  $M$ , 于是一组有序实数  $x$ 、 $y$ 、 $z$  唯一确定空间一点  $M$ . 这样, 空间的点  $M$  与一组有序实数  $x$ 、 $y$ 、 $z$  之间就建立了一一对应关系. 我们把  $x$ 、 $y$ 、 $z$  称为点  $M$  的坐标, 通常记为  $M(x, y, z)$ , 简记为  $(x, y, z)$ .  $x$ 、 $y$  和  $z$  依次称为点  $M$  的横坐标、纵坐标和竖坐标.

显然,原点的坐标为(0, 0, 0)在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上的点的坐标分别是  $(x, 0, 0)$ ,  $(0, y, 0)$  和  $(0, 0, z)$ ; 在  $xOy$  坐标面,  $yOz$  坐标面和  $xOz$  坐标面上点的坐标分别是  $(x, y, 0)$ ,  $(0, y, z)$  和  $(x, 0, z)$ .

## 二、空间两点间的距离

借助空间直角坐标系, 可把两点间距离的几何问题化为代数问题来处理.

设  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  为空间的两点, 过  $M_1$ 、 $M_2$  各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以  $M_1M_2$  为对角线的长方体, 如图 7.4 所示.

由于  $\triangle M_1NM_2$  为直角三角形,  $\angle M_1NM_2$  为直角, 按勾股定理, 得  $M_1$ 、 $M_2$  间的距离  $d$  为

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2,$$

而  $\triangle M_1PN$  也是直角三角形, 有  $|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2$ , 从而

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

$$\text{又 } |M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

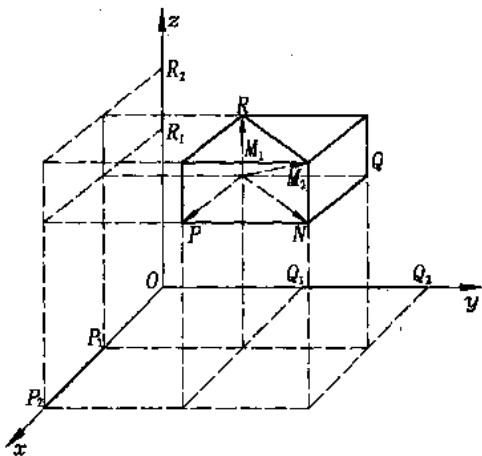


图 7.4



$$\therefore d^2 = |M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

于是,空间中两点  $M_1, M_2$  间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

即 
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (7-1)$$

式(7-1)即为空间两点间的距离公式(space distance formula between two point).

特别地,点  $M(x, y, z)$  到坐标原点  $O(0, 0, 0)$  的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (7-1')$$

**例1** 在  $z$  轴上求与两点  $M(-1, 2, 3)$  和  $N(2, 6, -2)$  等距的点  $P$ .

**解** 因为所求的点  $P$  在  $z$  轴上. 设点  $P$  的坐标为  $(0, 0, z)$ . 根据题意,得

$$|PM| = |PN|.$$

由两点间距离公式,得

$$\sqrt{(0+1)^2 + (0-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-6)^2 + (z+2)^2}.$$

解方程,得

$$z = -3.$$

所以,所求的点为  $P(0, 0, -3)$ .

**例2** 试证以三点  $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$ 、 $C(2, 4, 3)$  为顶点的三角形是等腰直角三角形.

**证明** 按公式(7-1),有

$$|AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|BC| = \sqrt{(2-10)^2 + [4-(-1)]^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98}.$$

故  $|AB| = |AC|$ ,  $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ ,

所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

### 三、空间曲面与空间曲线

像平面解析几何中把曲线作为动点的轨迹一样,我们把空间曲面也作为动点 $P(x, y, z)$ 满足一定条件所产生的轨迹.

定义1 如果空间曲面 $S$ 上任一点的坐标都满足

$$F(x, y, z) = 0, \quad (7-2)$$

而不在曲面 $S$ 上的点的坐标均不满足这个方程,则称方程(7-2)为曲面 $S$ 的方程(equation of curved surface),而曲面 $S$ 称为该方程的图形(图7.5).

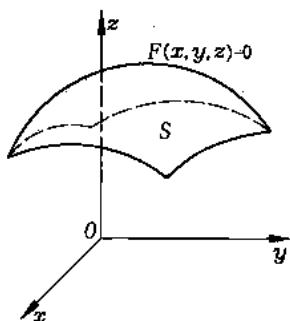


图 7.5

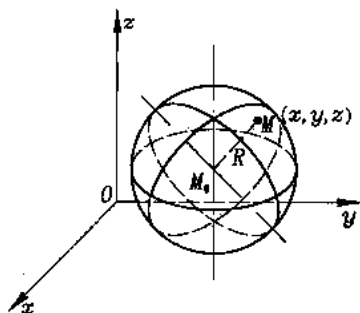


图 7.6

例3 建立球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 $R$ 的球面的方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 为球面上任意一点,如图7.6所示,有

$$|M_0M| = R.$$