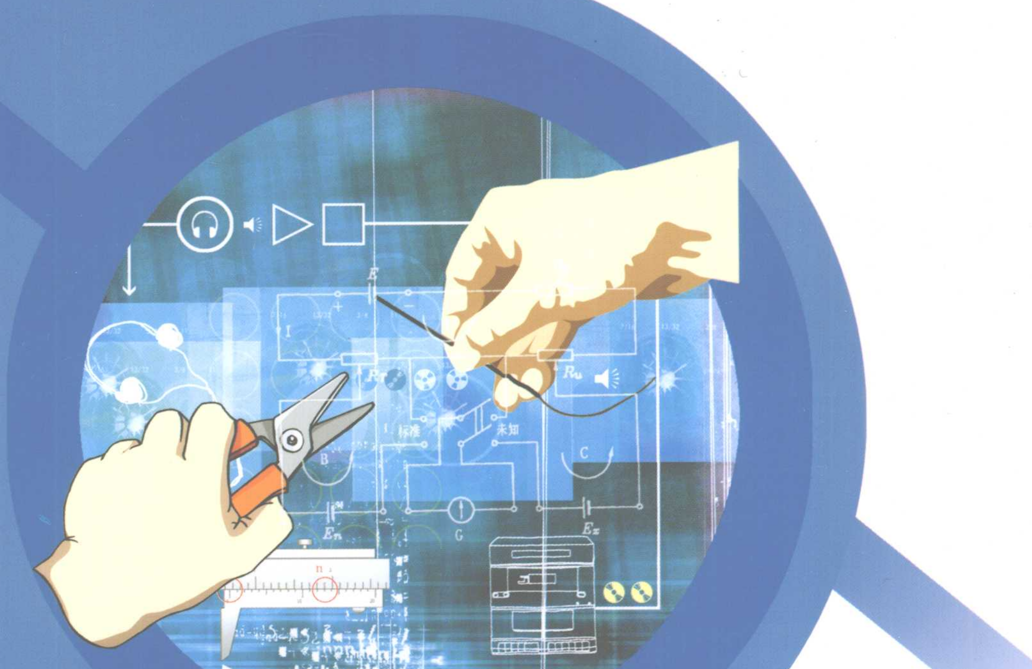
大学物理实验

朱卫华
徐光衍 主编



河海大学出版社

大学物理实验

朱卫华　徐光衍　主编

河 海 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验 / 朱卫华,徐光衍主编. —南京:河海大学出版社,2008.1

ISBN 978-7-5630-2455-1

Ⅰ.大… Ⅱ.①朱…②徐… Ⅲ.物理学—实验—高等学校—教材 Ⅳ.04-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 009019 号

书　　名 / **大学物理实验**

书　　号 / ISBN 978-7-5630-2455-1/O·141

责任编辑 / 谢业保

封面设计 / 张世立

出　　版 / 河海大学出版社

网　　址 / http://www.hhup.com

发　　行 / 江苏省新华书店

地　　址 / 南京市西康路 1 号(邮编:210098)

电　　话 / (025)83737852(总编室)　(025)83722833(发行部)

印　　刷 / 南京玉河印刷厂

开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16

印　　张 / 12.5

字　　数 / 310 千字

版　　次 / 2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷

定　　价 / 21.00 元

绪　论

一、物理实验课程的地位和任务

科学实验是科学理论的源泉，是工程技术的基础，是科学技术发展的原动力。作为一个立志投身科学研究和工程技术工作的大学生，不但要有深厚宽广的理论知识，而且要有较强的从事科学实验的能力。物理实验是对大学生进行科学实验基本训练的一门独立的必修基础课程，是学生进入大学后接受系统的实验方法和实验技能训练的开端，将为后继课程的学习乃至今后的科学技术工作打下良好的实验基础。由于物理实验课程内涵丰富，它所覆盖的知识面和包含的信息量以及能够让学生完成的基本训练内容，是其他课程的实验环节难以比拟的。因此，这门课程在培养跨世纪科技人才所必须具有的坚实的物理基础、出色的科学实验能力和勇于开拓的创新精神这些基本素质方面，具有不可替代的重要作用和独特的重要地位。

本课程的基本任务是：

1. 通过对实验现象的观察、分析和对物理量的测量，学习和掌握物理实验的基本知识、基本方法和基本技能，加深对物理学原理的理解。

2. 培养与提高学生的科学实验能力，包括：能够通过自学实验教材和参考资料，正确理解实验内容，概括出实验原理和方法的要点；能够借助教材和仪器说明书正确调整和使用仪器；能够运用物理理论对实验现象进行初步的分析和判断；能够正确记录和处理实验数据，绘制曲线，说明实验结果，写出合格的实验报告；能够独立完成简单的具有设计性内容的实验。

3. 培养与提高学生的科学实验素养。要求学生具有理论联系实际和实事求是的科学态度，严肃认真的工作作风，主动研究的探索精神和遵守纪律、团结协作、爱护公共财物的优良品德。

二、实验课的教学特点和基本程序

物理实验课不同于理论课，不是老师讲学生听。物理实验是同学们在教师的指导下自己动手，独立地完成实验操作的一种实践活动。然而，由于仪器设备数量有限，实验课一般都采用分阶段循环形式进行，与理论课教学内容不可能同步。所以，要求学生在课前必须事先做好准备工作，如阅读教材，写好预习报告等，在实验课上则强调学生的独立操作。因此，实验课对学生自学能力和独立工作能力都有较高的要求。

每个实验的学习都要经历三个阶段：

1. 实验课前的预习工作

由于实验课的时间有限，而熟悉仪器和测量数据的任务一般都比较重，不允许在实验课内才开始研究实验的原理，更不能盲目地随意操作仪器。为了在规定时间内，高质量地完成

实验课的任务，学生必须做好课前预习工作。

实验课前要仔细阅读实验教材，明确实验目的，搞懂实验原理和方法，知道选用哪些仪器以及实验操作的大体步骤，做到心中有数。此外，要写好预习报告，准备好记录数据的表格。预习报告是实验报告的组成部分。

2. 进行实验

实验时要先熟悉仪器，了解仪器的工作原理和使用方法，在教师指导下正确操作。对于要使用电源的实验，一定要检查电路，在确认连接无误后，方可接通电源进行实验。要注意观察和分析现象，积极主动地解决遇到的困难和问题，学习排除故障的本领。

认真做好实验记录是科学实验的一项基本功。要做到正确读数，正确清楚地记录原始数据。要及时分析判断实验结果是否正常合理。测量数据应填写在预习时画好的数据表格中，让指导教师检查后签字确认。

实验做完后，要做好仪器设备的整理工作。

3. 完成实验报告

实验报告是实验工作的全面总结，是实验结果的书面反映，要做到字迹工整、语言简练、数据完整、图表规范、分析结论明确。内容应包括：

(1) 实验目的；

(2) 实验原理(简单原理、主要公式、电路图、光路图或实验装置示意图等)；

(3) 主要步骤(分步概括叙述)；

(4) 仪器；

(5) 数据表格和数据处理(包括计算、作图、误差分析、实验结论等)；

(6) 问题讨论。

其中(1)、(2)、(3)、(4)项和数据表格须在实验前预习时做好，实验时检查。没有做好的，不许做实验。有的实验没有给出数据记录表格，同学们预习时要自己设计出表格，(5)、(6)项要在做过实验后完成。

物理实验是一门独立课程，要进行考核，并独立记分。每次实验根据预习、实验操作和实验报告三个方面评定成绩。

本书是在河海大学物理实验中心原来实验讲义的基础上，修订、更新和新增有关实验项目后汇编而成的。它是多年来河海大学物理实验课程建设的总结，它既集中了目前实验室工作的老师的集体成果，更是继承和包含了曾在物理实验室工作过的前辈教师辛勤劳动的成果。对各章节的实验做过贡献的教师名单难以一一列出。这里，仅列出进行本次实验修改、更新和新增实验项目编写工作的教师名单。朱卫华和徐光衍负责统稿。顾定安：实验5、20；刘明熠：实验10、29；宋建平：实验9；杨际青：实验27、33；徐光衍：实验3、4、23；张开骁：实验27、28、34；徐燕：实验15；谢海燕：实验17；李成翠：实验32、34；郑鹤松：实验18、19、24；胡治平：实验11、30；王国栋：实验26。

在此，我们谨对所有对本书做过贡献的同志表示衷心的感谢！同时，我们诚恳欢迎广大读者对本书不足之处予以指正。

三、物理实验室学生守则

1. 实验前应做好充分预习，未经预习，不许做实验。

2. 进入实验室，必须严肃认真，保持安静，不可高声谈笑；注意保持整洁，不涂写桌面，

不乱抛纸屑。

3. 注意实验安全，不可玩弄电源，禁止吸烟，对初次使用的仪器应完全弄懂它的性能和操作步骤后，才能动手，不能不懂装懂，以免损坏仪器，影响实验进行和造成人身事故。

4. 做实验时未经任课教师和实验工作人员的允许，不准换用他组仪器。仪器发生故障，应立即报告教师，若有损坏，要进行登记，依照学校规定处理，不许隐瞒。

5. 实验操作结束后，应将数据和成果仔细检查一遍，看有无遗漏，并初步分析，判断结果是否正确，无误后交教师审查签字，方可拆除仪器装置。实验完毕应将仪器放置整齐，不得乱拖乱拿，以免影响下一班实验课的进行，并检查电源、水源是否安全，经任课教师同意后方可离开。

6. 实验应在规定时间内进行，不可无故缺席或迟到，因故缺做实验或实验要补做者，应先与任课教师联系，领取补做实验通知单，方能补做，无教师指导，不可自行做实验。

目　录

第一章　测量误差和实验数据处理

§1—1　测量与测量误差

1. 测量

我们在进行物理实验时，不仅要对实验现象进行定性的观察，还要对物理量进行定量的研究，这就要求进行测量。所谓测量就是以确定被测对象量值为目的的全部操作。通常要借助适当的仪器，选用一定的计量单位，把待测量是该计量单位的多少倍确定下来。

测量可分为两类：一类是用计量仪器和待测量直接进行比较得到量值，称为直接测量。例如用米尺测量长度，用温度计测量温度等，都属于直接测量。另一类则要由几个直接测量结果通过一定的函数关系计算才能得出结果，称为间接测量。例如，测量铜块的密度，先测量铜块的长 a、宽 b、高 c，再称出其质量 m，由公式 $\rho=m/(abc)$ 计算得密度 ρ，这样的密度测量就是间接测量。

2. 测量值、真值和误差

每一个物理量都是客观存在的，在一定条件下具有不以人的意志为转移的一定的量值，这个客观量值称为该物理量的真值。进行测量，是想要获得待测量的真值。在实际测量中，由于实验条件、实验方法和使用仪器等方面的限制，以及实验人员技术水平方面的原因，使得测量结果即测量值与客观存在的真值之间总有一定的差异。测量值 x 与真值 X 的差，称为测量误差 δ，简称误差，即：

$$\delta = x - X \tag{1}$$

被测量的真值是理想概念，一般说来真值是不知道的，在实际测量中，常用被测量经过多次测量的算术平均值来代替其真值。测量值 x 与其算术平均值 $\overline{X}$ 之差称为偏差。

3. 误差的分类

误差，根据产生的原因以及性质的不同，可以分为系统误差、随机误差和过失误差三类。

(1) 系统误差

系统误差是由于在测量中存在某些不合理因素而引起的。这些因素总是使测量结果都大于真值或者都小于真值，或者在测量条件改变时，误差也按一定规律在变化。若寻找到产生系统误差的原因和规律，采取相应的修正措施，便可减小系统误差。

系统误差的来源可能有以下几个方面：

① 由于仪器本身的缺陷或没有按规定条件使用仪器而造成误差，如刻度不准、零点不对、天平两臂不等、应该水平放置的仪器没有水平放置等。

② 由于实验理论和实验方法的不完善或者理论要求与实际条件不符而造成的误差。例如在空气中称质量而没有考虑空气浮力的影响，测量热量时没有考虑热量的散失，测量电压时未考虑电压表内阻对电路的影响等。

③ 由于外界环境的影响而产生的误差。例如光照、湿度、气温、电磁场等。

④ 由于实验操作者错误的习惯或缺乏经验而引入的误差。例如，有些人习惯侧坐斜视读数等。

系统误差的出现一般都有比较明显的原因，因此，可以采取相应的措施使之降低到可以忽略的程度。当然如何识别和消除系统误差，与实验者的经验和知识有密切的关系，因此，对于初学实验者来说，应该从一开始就逐步积累这方面的感性知识，结合实验具体情况，对系统误差进行分析和讨论。

(2) 随机误差(偶然误差)

在尽力消除或减少一切明显的系统误差之后，在同一条件下对同一物理量进行多次测量，所得结果在最后一两位仍有或大、或小的差别。我们把这种时大时小、时正时负，随机变化的误差称为随机误差。

随机误差主要来源于人们视觉、听觉、触觉等感觉能力的限制，以及实验环境偶然因素的干扰。从表面看，似乎杂乱无章，但若测量次数足够多，随机误差就显示出明显的统计规律。

在大多数物理实验中，随机误差呈正态分布(高斯分布)，如图 1－0－1 所示，由电脑根据公式定量描绘。横坐标 δ 是随机误差，纵坐标 $f(\delta)$ 是该误差出现的概率密度。由图可知，随机误差有如下统计规律：

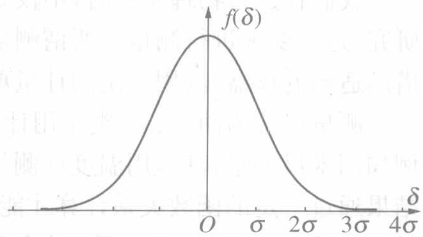


图 1－0－1　随机误差分布

① 单峰性，绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。

② 对称性，绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

③ 有界性，在一定测量条件下，误差的绝对值不超过一定的限度。

④ 抵偿性，随机误差 δ 的算术平均值随着测量次数的增加而越来越小，趋向于零，即：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}\delta_i=0 \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}x_i=X$$

由此可见，多次测量的算术平均值与真值最为接近，可用来代替真值。

正态分布(高斯分布)中 $f(\delta)$ 的计算公式为：

$$f(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{2}$$

$f(\delta)$ 的数学意义是概率密度函数，随机误差出现在 δ 到 $\delta+\mathrm{d}\delta$ 之间的概率为 $f(\delta)\mathrm{d}\delta$，$\sigma$ 是标准误差，与实验条件有关，$\sigma=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{n=1}^{n}\delta_i^2}$。$\delta$ 小，σ 就小，$f(\delta)$ 曲线就“尖”，即实验就精确。随机误差出现在 $(-\sigma,+\sigma)$ 和 $(-3\sigma,+3\sigma)$ 之间的概率分别为：

$$P(\sigma)=\int_{-\sigma}^{\sigma}f(\delta)\mathrm{d}\delta=68.3\% \tag{3}$$

$$P(3\sigma)=\int_{-3\sigma}^{3\sigma}f(\delta)\mathrm{d}\delta=99.7\% \tag{4}$$

(3)式(4)式分别表示，大多数(68.3%)的随机误差出现在 $(-\sigma,+\sigma)$ 之间，绝大多数(99.7%)的随机误差出现在 $(-3\sigma,+3\sigma)$ 之间。大于 3σ 的误差，可以说极不正常，可认定其不是随机误差，而是过失误差，应以剔除。

(3) 过失误差(粗大误差)

在测量中有可能会出现错误，如读数错误、记录错误、操作错误、估算错误等，其结果引起的误差称为过失误差。这是由于测量者在观察、测量、记录和整理数据过程中缺乏经验、粗心大意或疲劳等原因造成的。这种误差是人为的，应该避免。在测量中如果出现异常数据，往往是过失而引起的，要注意剔除。

4. 正确度、精密度与准确度(精确度)

正确度、精密度、准确度是评估测量结果好坏的三个术语，分别用来反映系统误差、随机误差和综合误差的大小。

测量结果的正确度是指测量值与真值的接近程度。正确度高，说明测量值的平均值接近真值的程度好，即系统误差小。

测量结果的精密度是指重复测量的结果相互接近的程度。精密度高，说明重复性好，各次测量误差的分布密集，即随机误差小。

测量结果的准确度是用来综合测量结果的重复性和接近真值的程度。准确度高，说明精密度和正确度都高，即测量的系统误差、随机误差都比较小。

以图 1-0-2 所示的打靶结果为例，说明三者的意义和区别：

(a) 图弹着点比较集中，但都偏离靶心，表示精密度较高而正确度不高。

(b) 图虽然弹着点比较分散，但平均值较接近中心，表示正确度较高而精密度不高。

(c) 图表示精密度和正确度均较好，即准确度较高。

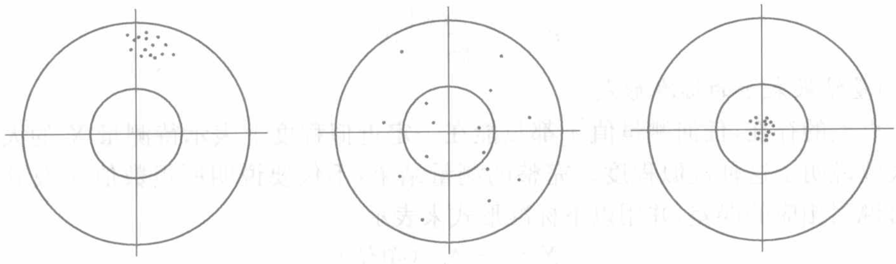


图 1-0-2

由于在实验中，要求尽可能地消除或减少系统误差，误差计算主要是估算随机误差，也就是涉及测量的精密度。测量的精密度除了与测量者的技术有关外还与所用的仪器好坏有直接关系。仪器的等级或最小刻度决定了测量的精密度，所以，往往把仪器的最小刻度称为仪器的精密度或简称精度。

用同一个仪器在相同条件下对某一物理量进行多次重复测量时，没有理由认为某一次测量比其他测量更为精确。因此，可以说这些测量具有相同的精度，称为等精度测量。反之，用不同仪器或者在不同条件下，对某一物理量进行测量则是不等精度的测量。在实验中，多次重复测量时，应尽量保持等精度测量。

5. 绝对误差和相对误差

测量误差可以是正，也可以是负，值得注重的是它的大小，即绝对值。误差的绝对值称为绝对误差，用 Δx 表示：

$$\Delta x = |x - X| \tag{5}$$

通常被测物理量的真值不可能确切获知，只能通过多次测量得到其算术平均值。讨论误差实际上是指偏差。偏差的绝对值习惯上称为绝对误差，用 Δx 表示，即：

$$\Delta x=|x-\bar{x}| \tag{6}$$

$\pm\Delta x$ 表示测量结果 x 与真值 X 的相差范围。真值可能比测量值大，也可能比测量值小，其范围为 $x-\Delta x\leqslant X\leqslant x+\Delta x$，可简写成：

$$X=x\pm\Delta x \tag{7}$$

仅仅根据绝对误差的大小还难以评价一个测量结果的优劣程度，还要看测量值本身的大小。为此引入相对误差的概念。相对误差 $E=\dfrac{\Delta x}{X}\approx\dfrac{\Delta x}{x}$，表示绝对误差在整个物理量中所占的比重，一般用百分数来表示，即：

$$E=\frac{\Delta x}{x}\times 100\% \tag{8}$$

例如，测量一个长度得 1000 m，绝对误差为 1 m；测量另一个长度得 100 cm，绝对误差为 1 cm。前者的绝对误差为后者的 100 倍，但前者的相对误差只有 0.1%，而后者的相对误差为 1%，显然前者的测量比后者更为精确。

对于多次测量，式中分母上的 x 可用测量平均值 $\bar{x}$ 代替。

如果待测量有公认值或理论值，也可用公认值来计算误差，即：

绝对误差：

$$\Delta x=|x-x_{公}| \tag{9}$$

相对误差：

$$E=\frac{|x-x_{公}|}{x_{公}}100\% \tag{10}$$

6. 测量结果表示的标准形式

由于误差的存在，任何测量值 x 都只能在一定近似程度上表示待测量 X 的大小，而误差范围大致说明了这种近似程度。完整的测量结果，不仅要说明所得数值 x 及其单位，还必须同时说明相应的误差，并用以下标准形式来表示：

$$X=x\pm\Delta x\ (单位) \tag{11}$$

$$E=\frac{\Delta x}{x}\times 100\% \tag{12}$$

不注明误差的测量结果，在科学上是没有价值的。

§1—2 误差估算与不确定度

估算误差的方法很多，在不同场合，可以采用不同方法进行估算。在下面的讨论中假定系统误差和过失误差已消除或修正，只是对随机误差进行估算。

1. 直接测量结果的误差估算

(1) 单次测量的误差估算

由于条件限制不能重复测量，或者要求不高不需精确测量时，可以只进行单次测量。其误差应根据仪器的精度、测量的条件等具体因素来决定。一般对刻度比较容易分辨的读数装置，通常可以用仪器最小分刻度的一半或仪器的性能指标(仪器等级、感量、精度等)作为仪器误差(最大可能绝对误差)。例如使用最小刻度为 1 mm 的米尺测量长度，仪器误差可取 0.5 mm；用感量为 0.02 克的天平称物体质量，其仪器误差可取 0.02 克。单次测量时就

用仪器误差代表测量误差，记作 $\Delta_{仪}$，若测量值为 x，结果可表示为：

$$X=x\pm\Delta_{仪},\quad E=\frac{\Delta_{仪}}{x}\times100\% \tag{13}$$

如果被测物理量有公认值，可用公认值作为真值计算误差。

(2) 多次测量的误差估算

为了减小随机误差的影响，应当尽可能采用多次测量，将各次测量结果的算术平均值作为测量结果。如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是对物理量 X 所进行的 n 次测量的结果，则最后结果应为：

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{14}$$

多次测量绝对误差的表示，通用而且规范的方法是用标准误差(偏差)来表达，简便一些也可以用平均误差(偏差)来表示。

对于每一次测量而言，绝对误差为：

$$\Delta x_1=|x_1-\overline{x}|,\Delta x_2=|x_2-\overline{x}|,\cdots,\Delta x_n=|x_n-\overline{x}|$$

其平均误差为：

$$\overline{\Delta x}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots+\Delta x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \tag{15}$$

根据误差理论，在一组测量数据中，任一次测量的误差出现在$(+\overline{\Delta x},-\overline{\Delta x})$之间的概率为 57.5%。测量结果可表达为：

$$X=(\overline{x}\pm\overline{\Delta x})(单位),\quad E=\frac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}}\times100\%$$

对于 n 次测量中某一次测量值的标准误差为：

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2} \tag{16}$$

它的物理意义是：在一组测量数据中，如果随机误差服从正态分布，任意一个测量值的误差落在$(-\sigma_x,+\sigma_x)$之间的概率为 68.3%。它反映了一组测量值的精密程度。

对于一物理量测量 n_1 次，可求得平均值，若再测量 n_2 次，所得平均值一般不会相同，就是说，平均值也存在误差。误差理论可以导出，n 次测量结果平均值$\overline{x}$的标准误差为：

$$\sigma_{\overline{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n\times(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2} \tag{17}$$

它表示，在$\overline{x}-\sigma_{\overline{x}}$到$\overline{x}+\sigma_{\overline{x}}$内，包含真值的概率为 68.3%，反映了平均值$\overline{x}$接近真值的程度。

测量结果的标准形式则为：

$$X=(\overline{x}\pm\sigma_{\overline{x}})(单位),\quad E=\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\times100\%$$

采用标准误差时，测量次数 n 不宜过少，一般取 6～10 次。目前国内外的科学论文普遍采用标准误差。函数式袖珍计算器都有标准误差的计算功能，可直接进行标准误差的计算。不过，在利用计算器进行标准误差计算时，应先查一查计算器的使用说明书，了解哪一个键用于计算 σ_x，并注意：$\sigma_{\overline{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$。

误差理论说明：在一组测量中，任一测量值误差落在$(-3\sigma_x,+3\sigma_x)$范围内的概率为 99.7%，即绝对误差大于 $3\sigma_x$ 的概率仅 0.3%。所以把 $3\sigma_x$ 称为极限误差。一般认为，不会

出现大于 $3\sigma_x$ 的误差。万一出现，很可能是过失造成的，应分析原因，并把这些数据剔除。

多次测量的实验数据处理，可按如下步骤进行：先求算术平均值$\overline{x}$；接着计算标准误差 σ_x 或平均误差$\overline{\Delta x}$，如果发现数据中有误差大于 $3\sigma_x$ 的应剔除，然后重新计算$\overline{x}$和 σ_x，最后计算平均值的标准误差 $\sigma_{\overline{x}}$和相对误差 E。

例：测量某一长度 11 次，测量值分别为 10.81、10.84、10.85、10.79、10.83、10.79、10.77、10.86、10.76、10.77、10.84 cm。求测量结束的标准误差和相对误差，并写出结果的标准形式。

解：平均值$\overline{x}=(10.81+10.84+\cdots+10.84)/11=10.81\ (\text{cm})$

各次测量值的绝对误差分别为 $\Delta x_i=|x_i-\overline{x}|$，等于 0.00、0.03、0.04、0.02、0.02、0.02、0.04、0.05、0.05、0.04、0.03 cm。

标准误差

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}=0.037(\text{cm})$$

$3\sigma_x=0.11$ cm。经检查各次测量的绝对误差均小于 $3\sigma_x$，故各测量值均有效。

平均值的标准误差

$$\sigma_{\overline{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=\frac{0.037}{\sqrt{11}}=0.011\approx0.02(\text{cm})$$

相对误差

$$E=\frac{0.02}{10.81}=0.00185\approx0.2\%$$

测量结果为

$$x=10.81\pm0.02\ \text{cm},\quad E=0.2\%$$

注意：由于误差只是一个估算值，因此，绝对误差只取一位非零数。为充分估计误差，取数时用进位法，例如，0.011 进位写成 0.02，而相对误差保留 1～2 位。测量结果 x 的最后一位数应与 $\sigma_{\overline{x}}$末位对齐，例如，10.81 中最后一位的“1”与 0.02 中的“2”对齐。

2. 间接测量结果的误差估算

有许多物理量不能直接测量，而是要将若干直接测量量通过函数运算间接得到。显然，直接测量的误差，将传递给间接测量量。由各直接测量误差估算间接测量误差的数学公式称为误差传递公式。通常有两种方法来估算间接测量的误差。

(1) 平均误差(偏差)的传递公式

设间接测量量 N 与各自独立的直接测量量 x、y、…、u 有函数关系：

$$N=f(x,y,\cdots,u) \tag{18}$$

设直接测量值的绝对误差分别为 $\Delta x,\Delta y,\cdots,\Delta u$，而 ΔN 是由此引起的间接测量值 N 的平均误差。ΔN 的计算公式可由对 N 的全微分推导得：

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\cdots+\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u$$

由于 $\Delta x,\Delta y,\cdots,\Delta u$ 相对于 x、y、…、u 是一个很小的量，上式中的“d”可以用“Δ”代替，并将右边各项取绝对值相加，即得到平均误差的传递公式：

$$\Delta N=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial u}\Delta u\right| \tag{19}$$

同样，若是先对 $\ln N$ 求全微分，然后将微分符号“d”改成误差符号“Δ”，并将各项取绝

对值，便得到相对误差的计算公式，即：

$$\mathrm{d}\ln N=\frac{\mathrm{d}N}{N}=\frac{\partial\ln f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\ln f}{\partial y}\mathrm{d}y+\cdots+\frac{\partial\ln f}{\partial u}\mathrm{d}u$$

$$E=\frac{\Delta N}{N}=\left|\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right|+\left|\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|+\cdots+\left|\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial u}\Delta u\right| \tag{20}$$

可见，间接量的绝对误差的计算是对函数求全微分，间接量的相对误差的计算是对函数的自然对数求全微分。

（2）标准误差（偏差）的传递公式

设各直接测量值的绝对误差分别为标准误差 $\sigma_x,\sigma_y,\cdots,\sigma_u$，而 σ_N 是间接测量值 N 的标准误差，可以证明，标准误差的传递公式为：

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\sigma_u\right)^2} \tag{21}$$

相对误差的传递公式为：

$$E=\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial\ln f}{\partial x}\sigma_x\right)^2+\left(\frac{\partial\ln f}{\partial y}\sigma_y\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial\ln f}{\partial u}\sigma_u\right)^2} \tag{22}$$

若将(21)、(22)式中的 $\sigma_x,\sigma_y,\cdots,\sigma_u$ 用 $\sigma_{\overline{x}},\sigma_{\overline{y}},\cdots,\sigma_{\overline{u}}$ 代替，则得到平均值 $\overline{N}$ 的标准误差 $\sigma_{\overline{N}}$ 的传递公式和相对误差的传递公式。

下表给出了一些常用函数的误差传递公式。

数学运算关系式	平均误差 ΔN 的传递公式	标准误差 σ_N 的传递公式
$N=x+y$	$\lvert\Delta x\rvert+\lvert\Delta y\rvert$	$\sqrt{(\sigma_x)^2+(\sigma_y)^2}$
$N=x-y$	$\lvert\Delta x\rvert+\lvert\Delta y\rvert$	$\sqrt{(\sigma_x)^2+(\sigma_y)^2}$
$N=ax+by$	$\lvert a\Delta x\rvert+\lvert b\Delta y\rvert$	$\sqrt{(a\sigma_x)^2+(b\sigma_y)^2}$
$N=ax-by$	$\lvert a\Delta x\rvert+\lvert b\Delta y\rvert$	$\sqrt{(a\sigma_x)^2+(b\sigma_y)^2}$
$N=kxy$	$N\left(\left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert+\left\lvert\frac{\Delta y}{y}\right\rvert\right)=N\cdot E$	$N\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}=N\cdot E$
$N=k\frac{x}{y}$	$N\left(\left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert+\left\lvert\frac{\Delta y}{y}\right\rvert\right)=N\cdot E$	$N\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}=N\cdot E$
$N=kx^ay^b$	$N\left(\left\lvert a\frac{\Delta x}{x}\right\rvert+\left\lvert b\frac{\Delta y}{y}\right\rvert\right)=N\cdot E$	$N\sqrt{\left(a\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(b\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}=N\cdot E$
$N=k\frac{x^a}{y^b}$	$N\left(\left\lvert a\frac{\Delta x}{x}\right\rvert+\left\lvert b\frac{\Delta y}{y}\right\rvert\right)=N\cdot E$	$N\sqrt{\left(a\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(b\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}=N\cdot E$
$N=k\sqrt{x}$	$N\cdot\frac{1}{2}\left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert=N\cdot E$	$N\cdot\frac{1}{2}\left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert=N\cdot E$
$N=\sin x$	$\lvert\cos x\,\Delta x\rvert$	$\lvert\cos x\,\sigma_x\rvert$
$N=\cos x$	$\lvert\sin x\,\Delta x\rvert$	$\lvert\sin x\,\sigma_x\rvert$
$N=\tan x$	$\lvert\sec^2 x\,\Delta x\rvert$	$\lvert\sec^2 x\,\sigma_x\rvert$
$N=\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\sigma_x}{x}$
$N=ka^{bx}$	$\lvert N\cdot b\ln a\Delta x\rvert=N\cdot E$	$\lvert N\cdot b\ln a\rvert\sigma_x$

式中，k、a、b 是常数，x、y 是被测独立量。从表中公式可看出，函数是和、差关系时，可先求绝对误差 σ_x（或 ΔN），然后再求相对误差，较为方便；当函数是乘、除关系时，则先求相对误差 E，然后再求绝对误差 $\sigma_N = N \cdot E$（或 $\Delta N = N \cdot E$）较为方便。

例：用游标卡尺对一圆柱体的外径和高度进行多次测量后得到：外径 $\overline{D}=2.984$ cm，$\sigma_{\overline{D}}=0.003$ cm，高 $\overline{h}=4.023$ cm，$\sigma_{\overline{h}}=0.002$ cm。求圆柱的体积及其标准误差。

解：体积的平均值为：

$$\overline{V}=\frac{\pi}{4}\overline{D}^2\cdot\overline{h}=\frac{3.1416}{4}\times(2.984)^2\times4.023=28.13\ (\mathrm{cm}^3)$$

由于函数关系为乘积型，求标准误差时，可先求相对误差 E，再求标准误差 $\sigma_{\overline{V}}$：

$$E=\sqrt{\left(2\times\frac{\sigma_{\overline{D}}}{\overline{D}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\overline{h}}}{\overline{h}}\right)^2}=\sqrt{\left(2\times\frac{0.003}{2.984}\right)^2+\left(\frac{0.002}{4.023}\right)^2}=0.21\%$$

$$\sigma_{\overline{V}}=\overline{V}\cdot E=28.13\times0.21\%=0.059\approx0.06\ (\mathrm{cm}^3)$$

圆柱体体积的标准形式为：

$$V=28.13\pm0.06\ (\mathrm{cm}^3),\quad E=0.21\%$$

当然，也可以直接按传递公式(21)求标准误差：

$$\begin{aligned}\sigma_{\overline{V}}&=\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\times2\times\overline{D}\cdot\overline{h}\cdot\sigma_{\overline{D}}\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}\overline{D}^2\sigma_{\overline{h}}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{3.1416}{2}\times2.984\times4.023\times0.003\right)^2+\left(\frac{3.1416}{2}\times2.984^2\times0.002\right)^2}\\&=0.058\approx0.06\ (\mathrm{cm}^3)\end{aligned}$$

$$E=\frac{\sigma_{\overline{V}}}{\overline{V}}\times100\%=\frac{0.0589}{28.13}\times100\%=0.21\%。$$

结果是一致的。

3. 不确定度

为了规范测量结果的表示，1980 年国际计量局提出了《实验不确定度的规定建议书 INC－1(1980)》。1993 年国际计量技术咨询工作组公布了《测量不确定度表示指南》。我国的计量技术规范《测量误差及数据处理(试行)》(1992 年 10 月 1 日施行)规定了测量结果用不确定度表示真值的范围。

不确定度是说明测量结果可靠程度的一个参数，表示由于测量误差的存在而对被测量值不能确定的程度，反映了可能存在的误差分布范围，是对被测量值的真值所处范围的评定。

在可修正的系统误差修正以后，其余的误差按其评定方法的不同，分为 A、B 两类。可以用统计方法计算的为 A 类分量；其余不能用统计方法而是用其他方法估算的为 B 类分量。总的不确定度 Δ 是 A、B 两分量的合成，通常用平方和的方法合成：

$$\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2}$$

A 类分量常用标准误差表示，$\Delta_A\approx\sigma_{\overline{X}}$。$B$ 类分量一般只考虑仪器误差 $\Delta_{仪}$，常用 $\Delta_{仪}$ 除以一个误差分布因子 $\sqrt{3}$（均匀分布），总的不确定度：

$$\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\left(\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}\right)^2}\qquad(置信概率\ P=0.68)\qquad(23)$$

测量结果的标准形式为：　　　$X=\bar{x}\pm\Delta$

例：用 50 分度的游标尺测量圆柱体外径 10 次(单位 mm)：19.78，19.80，19.78，19.70，19.74，19.78，19.80，19.72，19.76，19.68。试用不确定度表示测量结果。

解：平均值$\overline{D}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D_i=19.75\ (\mathrm{mm})$

不确定度 A 类分量：$\Delta_A=\sigma_{\overline{D}}=\sqrt{\frac{1}{n\times(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D})^2}=0.014\ (\mathrm{mm})$

不确定度 B 类分量：50 分度游标尺示值误差：$\Delta_{仪}=\pm0.02\ \mathrm{mm}$

总的不确定度　$\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2}=\sqrt{\Delta_A^2+\left(\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{0.014^2+0.012^2}\approx0.02\ \mathrm{mm}$

测量结果：$D=\overline{D}\pm\Delta=(19.75\pm0.02)\ \mathrm{mm}, E=\frac{\Delta}{\overline{D}}\times100\%=\frac{0.02}{19.75}\times100\%=0.1\%$

在间接测量中，同样存在不确定度的传递，其公式与标准误差的传递公式相似。当各直接测得量相互独立时，只要将误差传递公式中的 σ 换成 Δ 即可。

§1—3　有效数字及其运算

1. 有效数字及其性质

根据前述，任何测量不论是直接的或间接的，所得的结果中不可避免地都具有一定的误差，因此，当用数字表示这些实验结果时，必须把误差的概念与它联系起来。例如：用最小刻度为 1 mm 的尺进行长度测量(图 1-0-3)，结果为 3.72 cm，其中“3”、“7”二个数字是准确的，而最后的一个“2”由估计得来，是欠准的，它有一定误差，但是，它还是在一定程度上反映了客观实际，因此它也是有效的。我们把测量结果中可靠的几位数字加上最后一位欠准的数字，统称为有效数字，即有效数字由准确数字和一位欠准的数字构成。有效数字的位数，除准确数字的位数外，还包括一位欠准数字。如 3.72 就是一个具有三位有效数字的数。

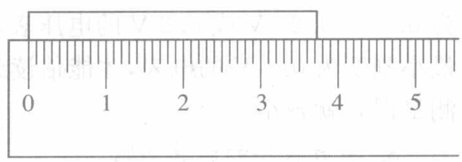


图 1-0-3　毫米尺示意图

有效数字既表示了测量结果的量值，又反映了误差的大小。事实上，有效数字的最后一位(欠准数)必定和误差所在位一致，与绝对误差相对应。测量值有效数字的位数又反映了相对误差的大小。有效数字越多，相对误差越小。2～3 位有效数字的量，相对误差只能在百分之几，4 位有效数字的量相对误差只有千分之几。

有效数字位数的多少，不仅与被测对象本身的大小有关，而且与测量仪器的精度有关。例如一物体长度用钢卷尺测得 3.72 cm，为三位有效数字；用游标卡尺测得 3.724 cm，为四位有效数字；用千分尺测得 3.7236 cm，为五位有效数字。可见，仪器精度越高，对于同一被测对象，所得结果的有效数字位数越多。

有效数字位数的多少，还与测量方法有关。例如用秒表(可读到 0.01 s)测单摆的周期，测一个周期得 $T=1.92$ s。如果连续测 100 个周期，得到 $100T=192.38$ s，则$\overline{T}=1.9238$ s。