普通高等教育“十一五”国家级规划教材

理论力学（Ⅱ）

第7版

哈尔滨工业大学理论力学教研室 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

理论力学（Ⅱ）

第7版

哈尔滨工业大学理论力学教研室　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

理论力学.Ⅱ/哈尔滨工业大学理论力学教研室编.—7版.—北京:高等教育出版社,2009.7

ISBN 978-7-04-026651-1

Ⅰ.理… Ⅱ.哈… Ⅲ.理论力学-高等学校-教材 Ⅳ.O31

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第084804号

策划编辑	黄 毅	**责任编辑**	孙成奇	**封面设计**	王 雎
版式设计	陆瑞红	**责任校对**	刘 莉	**责任印制**	韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京中科印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版 次	1961年8月第1版
开 本	787×960 1/16		2009年7月第7版
印 张	11	**印 次**	2009年7月第1次印刷
字 数	200 000	**定 价**	15.60元

物料号 26651-00

内容简介

本书第1版至第6版受到广大教师和学生的欢迎,第6版为普通高等教育“十五”国家级规划教材。本版仍保持前6版理论严谨、逻辑清晰、由浅入深、宜于教学的风格体系。适当增加了少量新内容,对习题进行了增删,习题覆盖的题型更广。本书第7版是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,是“高等教育百门精品课程教材建设计划”的研究成果。

本书第7版内容是按照教育部力学基础课程教学指导分委员会最新制订的“理论力学课程教学基本要求(A类)”修订的,共分Ⅰ、Ⅱ两册。《理论力学》(Ⅰ)内容包括静力学(含静力学公理、物体的受力分析、平面力系、空间力系、摩擦等),运动学(含点的运动学、刚体的简单运动、点的合成运动、刚体的平面运动等)和动力学(含质点动力学的基本方程、动量定理、动量矩定理、动能定理、达朗贝尔原理、虚位移原理等)。一般中等学时的专业只用第Ⅰ册即可。《理论力学》(Ⅱ)为专题部分,内容包括分析力学基础、非惯性系中的质点动力学、碰撞、机械振动基础、刚体定点运动、自由刚体运动、刚体运动的合成·陀螺仪近似理论、变质量动力学等。各专业可根据需要来选取。全书配有大量思考题及习题。

本书可作为高等学校工科机械、土建、水利、航空、航天等专业理论力学课程的教材,亦可作为高职高专、成人高校相应专业的自学和函授教材,也可供有关工程技术人员参考。

本书第Ⅰ册后附有充值卡,用户可登录“中国高校力学课程网”(网址:http://mechanics.cncourse.com)注册使用网络资源,网络资源中既有供教师使用的资源,也有供学生学习使用的资源。与本书配套的有《理论力学电子教案》(光盘)、《理论力学习题详解》(光盘)、《理论力学网上作业与查询系统》(光盘)和《理论力学学习辅导》、《理论力学解题指导及习题集》(第3版)。

郑重声明

主要符号表

$\boldsymbol{a}$	加速度
$\boldsymbol{a}_n$	法向加速度
$\boldsymbol{a}_t$	切向加速度
$\boldsymbol{a}_a$	绝对加速度
$\boldsymbol{a}_r$	相对加速度
$\boldsymbol{a}_e$	牵连加速度
$\boldsymbol{a}_C$	科氏加速度
A	面积，自由振动振幅
e	恢复因数
f	动摩擦因数
f_s	静摩擦因数
$\boldsymbol{F}$	力
$\boldsymbol{F}'_R$	主矢
$\boldsymbol{F}_s$	静滑动摩擦力
$\boldsymbol{F}_N$	法向约束力
$\boldsymbol{F}_{Ie}$	牵连惯性力
$\boldsymbol{F}_{IC}$	科氏惯性力
$\boldsymbol{F}_I$	惯性力
$\boldsymbol{g}$	重力加速度
h	高度
$\boldsymbol{i}$	x 轴的基矢量
$\boldsymbol{I}$	冲量
$\boldsymbol{j}$	y 轴的基矢量
J_z	刚体对 z 轴的转动惯量
J_{xy}	刚体对 x，y 轴的惯性积
J_C	刚体对质心的转动惯量
k	弹簧刚度系数
$\boldsymbol{k}$	z 轴的基矢量
l	长度
L	拉格朗日函数
$\boldsymbol{L}_O$	刚体对点 O 的动量矩
$\boldsymbol{L}_C$	刚体对质心的动量矩
m	质量
M_z	对 z 轴的矩
$\boldsymbol{M}$	力偶矩，主矩
$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$	力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩
$\boldsymbol{M}_I$	惯性力的主矩
n	质点数目
O	参考坐标系的原点
$\boldsymbol{p}$	动量
P	重量，功率
q	载荷集度，广义坐标
Q	广义力
r	半径，矢径的模
$\boldsymbol{r}$	矢径
$\boldsymbol{r}_O$	点 O 的矢径
$\boldsymbol{r}_C$	质心的矢径
R	半径
s	弧坐标，频率比
t	时间
T	动能，周期
$\boldsymbol{v}$	速度
$\boldsymbol{v}_a$	绝对速度
$\boldsymbol{v}_r$	相对速度
$\boldsymbol{v}_e$	牵连速度
$\boldsymbol{v}_C$	质心速度
V	势能，体积

W	力的功
x,y,z	直角坐标
α	角加速度
β	角度坐标
δ	滚阻系数,阻尼系数
δ	变分符号
ζ	阻尼比
η	减缩因数
λ	本征值
Λ	对数减缩
ρ	密度,曲率半径
φ	角度坐标
φ_f	摩擦角
ψ	角度坐标
ω_0	固有角频率
$\boldsymbol{\omega}$	角速度矢量
$\boldsymbol{\omega}_a$	绝对角速度矢量
$\boldsymbol{\omega}_r$	相对角速度矢量
$\boldsymbol{\omega}_e$	牵连角速度矢量

目　录

第一章　分析力学基础

物体运动与相互作用之间的关系是牛顿力学研究的主要内容。在本书的基本内容部分中,我们通过牛顿第二定律把这种关系用矢量的形式表示出来,并在此基础上建立了质点系动力学的普遍定理(动量定理、动量矩定理和动能定理),这种处理动力学问题的方法和体系称之为"矢量力学"。矢量力学方法具有数学形式简单和物理概念清晰等特点,在研究质点和简单刚体系统动力学问题方面取得了辉煌的成就,但在求解具有复杂约束系统和变形体的动力学问题方面则遇到了很大困难。这是因为在矢量力学方法中需要事先对系统中各质点的受力情况进行分析,而对于复杂约束系统,由于约束力的性质和分布在求解前是未知的,使得求解过程变得极为复杂,也无法建立一般力学系统的动力学方程。

针对矢量力学所遇到的困难,采用分析数学的方法来求解力学问题的理论在 18 世纪得到了迅速的发展,形成了"分析力学"的理论体系。分析力学采用能量与功来描述物体运动与相互作用之间的关系,通过达朗贝尔原理和虚位移原理建立了普遍形式下的动力学方程,为现代动力学理论的发展奠定了基础,也对近代数学和物理学的发展起了巨大的推动作用。

§1-1　自由度和广义坐标

确定一个自由质点在空间中的位置需要 3 个独立参数,我们说自由质点在空间中有 3 个**自由度**,当质点的运动受到约束限制时,自由度的数目还要减少。工程中的约束多数是稳定的完整约束。在完整约束的条件下,确定质点系位置的独立参数的数目等于系统的自由度数。例如质点 M 被限定只能在曲面

$$f(x,y,x)=0 \tag{1-1}$$

上运动(图 1-1),由此解出

$$z=z(x,y) \tag{1-2}$$

这样该质点在空间中的位置就由 x,y 这两个独立参数所确定,它的自由度数为 2。一般来讲,一个由 n 个质点组成的质点系,若受到 s 个完整约束作用,则其在空间中的 $3n$ 个坐标不是彼此独立的。由这些约束方程可以将其中的 s 个坐标表示成其余 $3n-s$ 个坐标的函数,这样该质点系在空间中的位置就可以用 $N=3n-s$ 个独立参数完全确定下来。描述质点系在空间中位置的独立参数,称为**广义坐标**。对于完整系统,广义坐标的数目等于系统的自由度数。如质点

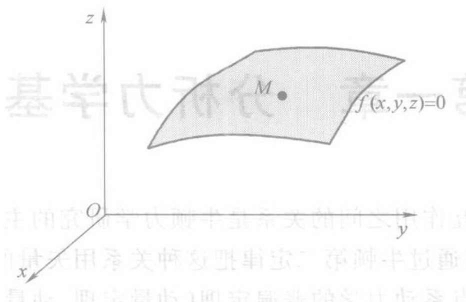


图 1-1

M 被限定只能在式(1-1)所确定的曲面上运动,则由式(1-2),它在空间中的位置可由 x,y 这两个独立参数来确定,x,y 就是质点 M 的一组广义坐标。此外,广义坐标的选择并不是唯一的,我们也可以选用其他一组独立参数,如 $\xi = x+y$,$\eta = x-y$ 来描述质点 M 在空间中的位置,此时有

$$x=\frac{\xi+\eta}{2},\quad y=\frac{\xi-\eta}{2},\quad z=z\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right)$$

考虑由 n 个质点组成的系统受 s 个完整双侧约束

$$f_k(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n,t)=0\qquad(k=1,2,\cdots,s)\tag{1-3}$$

设 $q_1,q_2,\cdots,q_N(N=3n-s)$ 为系统的一组广义坐标,我们可以将各质点的坐标表示为

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_N,t)\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1-4}$$

由虚位移的定义,可以通过对式(1-4)进行等时变分运算来确定第 i 个质点的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$。采用类似于多元函数求微分的方法,可以得到

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1-5}$$

其中 $\delta q_k(k=1,2,\cdots,N)$ 为广义坐标 q_k 的变分,称为**广义虚位移**。

§1-2　以广义坐标表示的质点系平衡条件

设作用在第 i 个质点上的主动力的合力 $\boldsymbol{F}_i$ 在三个坐标轴上的投影分别为 (F_{ix},F_{iy},F_{iz}),将式(1-5)代入虚功方程,得到

$$\begin{aligned}\delta W_F&=\sum_{i=1}^{n}\delta W_{Fi}=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k+F_{iy}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k+F_{iz}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k\right)\\&=\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\right]\delta q_k=0\end{aligned}\tag{1-6}$$

如令

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) \qquad (k = 1,2,\cdots,N) \quad (1-7)$$

则式(1－6)可以写成

$$\delta W_F = \sum_{k=1}^{N} Q_k \delta q_k = 0 \qquad (1-8)$$

上式中 $Q_k\delta q_k$ 具有功的量纲，所以称 Q_k 为与广义坐标 q_k 相对应的**广义力**。广义力的量纲由它所对应的广义坐标而定。当 q_k 是线位移时，Q_k 的量纲是力的量纲；当 q_k 是角位移时，Q_k 是力矩的量纲。

由于广义坐标的独立性，δq_k 可以任意取值，因此若式(1－8)成立，必须有

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_N = 0 \qquad (1-9)$$

上式说明，质点系的平衡条件是系统所有的广义力都等于零。这就是用广义坐标表示的质点系的平衡条件。

求广义力的方法有两种：一种方法是直接从定义式(1－7)出发进行计算；另一种是利用广义虚位移的任意性，令某一个 δq_k 不等于零，而其他 $N-1$ 个广义虚位移都等于零，代入

$$\delta W_F = Q_k \delta q_k$$

从而

$$Q_k = \frac{\delta W_F}{\delta q_k} \qquad (1-10)$$

在解决实际问题时，往往采用第二种方法比较方便。

例 1－1　杆 OA 和 AB 以铰链相连，O 端悬挂于圆柱铰链上，如图 1－2 所示。杆长 $OA = a$，$AB = b$，杆重和铰链的摩擦都忽略不计。今在点 A 和 B 分别作用向下的铅垂力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$，又在点 B 作用一水平力 $\boldsymbol{F}$。试求平衡时 φ_1，φ_2 与 F_A，F_B，F 之间的关系。

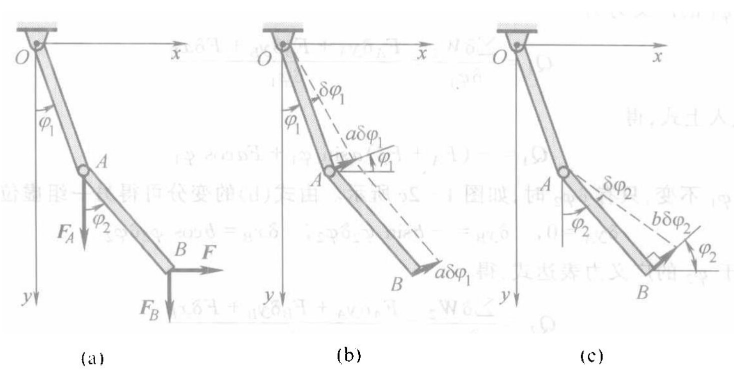


图 1－2

解：杆 OA 和 AB 的位置可由点 A 和 B 的 4 个坐标 x_A，y_A 和 x_B，y_B 完全确定，由于杆

OA 和 AB 的长度一定，可列出两个约束方程：

$$x_A^2 + y_A^2 = a^2, \quad (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = b^2$$

因此系统有两个自由度。现选择 φ_1 和 φ_2 为系统的两个广义坐标，计算其对应的广义力 Q_1 和 Q_2。

用第一种方法计算：

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= F_A \frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1} + F_B \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_1} + F \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1} \\ Q_2 &= F_A \frac{\partial y_A}{\partial \varphi_2} + F_B \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2} + F \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

由于

$$y_A = a\cos \varphi_1, \quad y_B = a\cos \varphi_1 + b\cos \varphi_2, \quad x_B = a\sin \varphi_1 + b\sin \varphi_2 \tag{b}$$

故

$$\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1} = -a\sin \varphi_1, \quad \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_1} = -a\sin \varphi_1, \quad \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1} = a\cos \varphi_1$$

$$\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_2} = 0, \quad \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2} = -b\sin \varphi_2, \quad \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} = b\cos \varphi_2$$

代入式(a)，系统平衡时应有

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= -(F_A + F_B)a\sin \varphi_1 + Fa\cos \varphi_1 = 0 \\ Q_2 &= -F_B b\sin \varphi_2 + Fb\cos \varphi_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

解出

$$\tan \varphi_1 = \frac{F}{F_A + F_B}, \quad \tan \varphi_2 = \frac{F}{F_B} \tag{d}$$

用第二种方法计算：

保持 φ_2 不变，只有 $\delta\varphi_1$ 时，如图 1－2b 所示。由式(b)的变分可得一组虚位移

$$\delta y_A = \delta y_B = -a\sin \varphi_1 \delta\varphi_1, \quad \delta x_B = a\cos \varphi_1 \delta\varphi_1 \tag{e}$$

则对应于 φ_1 的广义力为

$$Q_1 = \frac{\sum \delta W_1}{\delta \varphi_1} = \frac{F_A \delta y_A + F_B \delta y_B + F\delta x_B}{\delta \varphi_1}$$

将式(e)代入上式，得

$$Q_1 = -(F_A + F_B)a\sin \varphi_1 + Fa\cos \varphi_1$$

保持 φ_1 不变，只有 $\delta\varphi_2$ 时，如图 1－2c 所示。由式(b)的变分可得另一组虚位移

$$\delta y_A = 0, \quad \delta y_B = -b\sin \varphi_2 \delta\varphi_2, \quad \delta x_B = b\cos \varphi_2 \delta\varphi_2$$

代入对应于 φ_2 的广义力表达式，得

$$Q_2 = \frac{\sum \delta W_2}{\delta \varphi_2} = \frac{F_A \delta y_A + F_B \delta y_B + F\delta x_B}{\delta \varphi_2}$$

$$= -F_B b\sin \varphi_2 + Fb\cos \varphi_2$$

两种方法所得的广义力相同。在用第二种方法给出虚位移时，也可以直接由几何关系计算。如保持 φ_2 不变，只有 $\delta\varphi_1$ 时，杆 AB 为平移，A，B 两点的虚位移相等。点 A 的虚位移大小为 $a\delta\varphi_1$，方向与 OA 垂直(图 1－2b)，沿 x，y 轴的投影为

$$\delta x_A=\delta x_B=a\delta\varphi_1\cos\varphi_1,\quad \delta y_A=\delta y_B=-a\delta\varphi_1\sin\varphi_1$$

又当 φ_1 不变、只有 $\delta\varphi_2$ 时，点 A 不动，杆 AB 绕点 A 转动 $\delta\varphi_2$，点 B 的虚位移大小为 $b\delta\varphi_2$，方向与杆 AB 垂直(图 1-2c)，沿 x，y 轴的投影为

$$\delta x_B=b\delta\varphi_2\cos\varphi_2,\quad \delta y_B=-b\delta\varphi_2\sin\varphi_2$$

与变分计算结果相同。

例 1-2 如图1-3所示，重物 A 和 B 分别连接在细绳两端，重物 A 放置在粗糙的水平面上，重物 B 绕过定滑轮 E 铅直悬挂。在动滑轮 H 的轴心上挂一重物 C，设重物 A 重量为 $2P$，重物 B 重量为 P、不计动滑轮 H 的重量。试求平衡时重物 C 的重量 P_C 以及重物 A 与水平面间的静滑动摩擦因数。

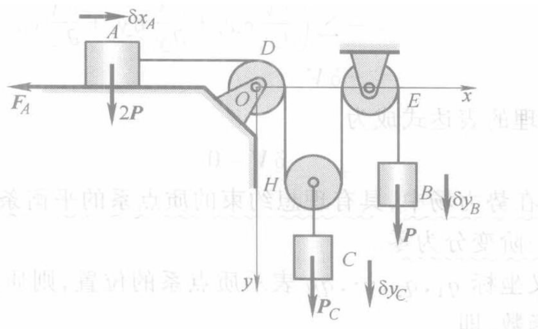


图 1-3

解：首先分析此系统的自由度数，因为 A，B，C 三个重物中，必须给定两个重物的位置，其另一个位置才能确定，因此系统具有两个自由度。

选取重物 A 向右的水平坐标 x_A 和重物 B 向下的铅直坐标 y_B 为广义坐标，则对应的虚位移为 δx_A 和 δy_B。此时除重力外，重物 A 与台面间的摩擦力 $\boldsymbol{F}_A$ 也应视为主动力。

首先令 δx_A 向右，$\delta y_B=0$，此时重物 C 的虚位移 $\delta y_C=\delta x_A/2$，方向向下。主动力所作虚功的和为

$$\sum\delta W_A=-F_A\delta x_A+P_C\delta y_C=\left(-F_A+\frac{1}{2}P_C\right)\delta x_A$$

对应广义坐标 x_A 的广义力为

$$Q_{xA}=\frac{\sum\delta W_A}{\delta x_A}=\frac{1}{2}P_C-F_A \tag{a}$$

再令 δy_B 向下，$\delta x_A=0$，同理可解得

$$Q_{yB}=\frac{\sum\delta W_B}{\delta y_B}=-\frac{1}{2}P_C+P \tag{b}$$

因为系统平衡时应有 $Q_{xA}=Q_{yB}=0$，解得

$$P_C=2P,\quad F_A=\frac{1}{2}P_C=P$$

因此平衡时，要求物块与台面间静摩擦因数

$$f_s\geqslant\frac{F_A}{2P}=0.5$$

下面研究质点系在势力场中的情况。如果作用在质点系上的主动力都是有势力，则势能应为各质点坐标的函数，记为

$$V = V(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n) \tag{1-11}$$

此时虚功方程(1-6)中各力的投影都可以写成用势能 V 表达的形式，即

$$F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

于是有

$$\begin{aligned}\delta W_F &= \sum (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) \\ &= -\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right) \\ &= -\delta V\end{aligned}$$

这样，虚位移原理的表达式成为

$$\delta V = 0 \tag{1-12}$$

上式说明：在势力场中，具有理想约束的质点系的平衡条件为质点系的势能在平衡位置处一阶变分为零。

如果用广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_N$ 表示质点系的位置，则质点系的势能可以写成广义坐标的函数，即

$$V = V(q_1, q_2, \cdots, q_N)$$

根据广义力的表达式(1-7)，在势力场中可将广义力 Q_k 写成用势能表达的形式

$$\begin{aligned}Q_k &= \sum\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) \\ &= -\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) \\ &= -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, N)\end{aligned} \tag{1-13}$$

这样，由广义坐标表示的平衡条件可写成如下形式

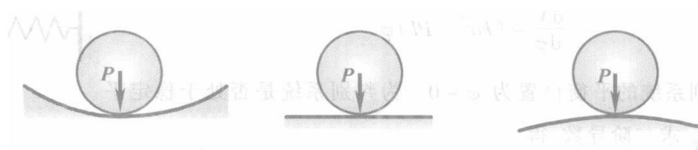
$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, N) \tag{1-14}$$

即：在势力场中，具有理想约束的质点系的平衡条件是势能对于每个广义坐标的偏导数分别等于零。

式(1-12)和(1-14)对于求解弹性系统的平衡问题具有重要意义。

引用势能，还可以分析保守系统的平衡稳定性问题。满足平衡条件的保守系统可能处于不同的平衡状态，例如图 1-4 所示的 3 个小球，就具有 3 种不同的平衡状态：图 1-4a 所示小球，在一个凹曲面的最低点处平衡，当给小球一个很小的扰动后，小球在重力作用下，仍然会回到原来的平衡位置，这种平衡状态

称为**稳定平衡**；图 1-4b 所示小球在一水平平面上平衡，小球在周围平面上的任一点都可以平衡，这种平衡状态称为**随遇平衡**；图 1-4c 所示小球在一个凸曲面的顶点上平衡，当给小球一个很小的扰动后，小球在重力的作用下会滚下去，不再回到原来的平衡位置，这种平衡状态称为**不稳定平衡**。



(a)　　(b)　　(c)

图 1-4

上述 3 种平衡状态都满足势能在平衡位置处 $\delta V=0$ 的平衡条件，即 $\dfrac{\partial V}{\partial q_k}=0$。但由图 1-4 可见：在稳定平衡位置处，当系统受到扰动后，在新的可能位置处，系统的势能都高于平衡位置处的势能，因此，在稳定平衡的平衡位置处，系统势能具有极小值。系统可以从高势能位置回到低势能位置。相反，在不稳定平衡位置上，系统势能具有极大值。没有外力作用时，系统不能从低势能位置回到高势能位置。对于随遇平衡，系统在某位置附近其势能是不变的，所以其附近任何可能位置都是平衡位置。

对于一个自由度系统，系统具有一个广义坐标 q，因此系统势能可以表示为 q 的一元函数，即 $V=V(q)$。当系统平衡时，根据式(1-14)，在平衡位置处有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}=0$$

如果系统处于稳定平衡状态，则在平衡位置处，系统势能具有极小值，即系统势能对广义坐标的二阶导数大于零

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}>0$$

上式是一个自由度系统平衡的稳定性判据。对于多自由度系统平衡的稳定性判据可参考其他书籍。

例 1-3　图1-5所示一倒置的摆，摆锤重为 $\boldsymbol{P}$，摆杆长度为 l，在摆杆上的点 A 连有一刚度系数为 k 的水平弹簧，摆在铅直位置时弹簧未变形。设 $OA=a$，摆杆重量不计，试确定摆杆的平衡位置及稳定平衡时所应满足的条件。

解：该系统是一个自由度系统，选择摆角 φ 为广义坐标，摆的铅直位置为摆锤重力势能和弹簧弹性势能的零点。则对任一摆角 φ，系统的总势能等于摆锤的重力势能和弹簧的弹性势能之和，当 $|\varphi|\ll 1$ 时，有

$$V=-Pl(1-\cos\varphi)+\frac{1}{2}ka^2\varphi^2=-2Pl\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}ka^2\varphi^2$$

由 $\sin\dfrac{\varphi}{2}\approx\dfrac{\varphi}{2}$，上述势能表达式可以写成

$$V=\frac{1}{2}(ka^2-Pl)\varphi^2$$

将势能 V 对 φ 求一阶导数，有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}=(ka^2-Pl)\varphi$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}=0$，得到系统的平衡位置为 $\varphi=0$。为判别系统是否处于稳定平衡，将势能对 φ 求二阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}=ka^2-Pl$$

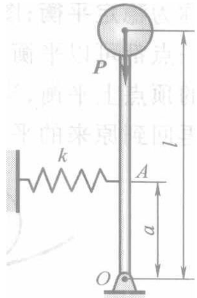


图 1－5

对于稳定平衡，要求 $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}>0$，即

$$ka^2-Pl>0$$

或

$$a>\sqrt{\frac{Pl}{k}}$$

§1－3　动力学普遍方程

考虑由 n 个质点组成的系统，设第 i 个质点的质量为 m_i，矢径为 $\boldsymbol{r}_i$，加速度为 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$，其上作用有主动力 $\boldsymbol{F}_i$，约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$。令 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i}=-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为第 i 个质点的惯性力，则由达朗贝尔原理，作用在整个质点系上的主动力、约束力和惯性力系应组成平衡力系。若系统只受理想约束作用，则由虚位移原理

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (1-15)$$

写成解析表达式

$$\sum_{i=1}^{n}[(F_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(F_{iy}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(F_{iz}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i]=0$$

$$(1-15)'$$

上式表明：在理想约束的条件下，质点系在任一瞬时所受的主动力系和虚加的惯性力系在虚位移上所作的功的和等于零。式(1－15)称为**动力学普遍方程**。

动力学普遍方程将达朗贝尔原理与虚位移原理相结合，可以求解质点系的动力学问题，特别适合于求解非自由质点系的动力学问题。下面举例说明。

例 1－4　在图1－6所示滑轮系统中，动滑轮上悬挂着质量为 m_1 的重物，绳子绕过定滑轮后悬挂着质量为 m_2 的重物。设滑轮和绳子的重量以及轮轴摩擦都忽略不计，求质量为 m_2 的物体下降的加速度。