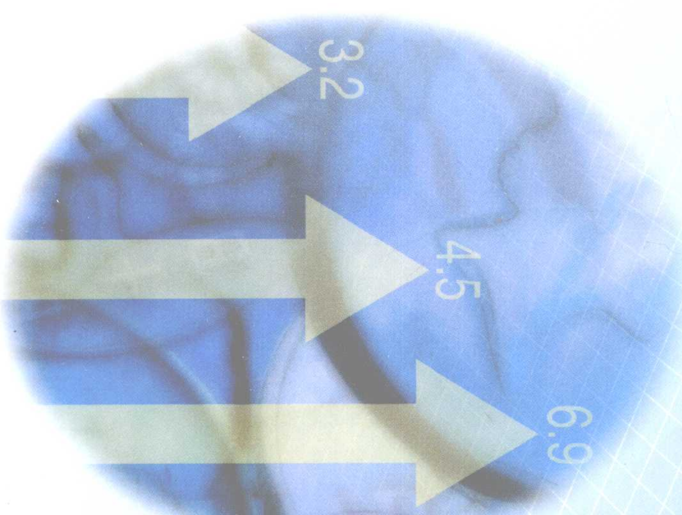
21世纪应用型本科院校规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　徐鹤卿
张国印



南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

线性代数

主　编　徐鹤卿　张国印
副主编　方　芬　伍　鸣
　　　　汪　建　魏广华

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/徐鹤卿,张国印主编. —南京:南京大学出版社,2009.1

21世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-305-05707-6

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①徐…②张… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第210836号

出 版 者 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路22号　　　邮　编 210093
网　　址 http://press.nju.edu.cn
出 版 人 左　健

丛 书 名 21世纪应用型本科院校规划教材
书　　名 线性代数
主　　编 徐鹤卿　张国印
责任编辑 吴　汀　　　编辑热线 025-83686531

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京紫藤制版印务中心
开　　本 787×1092 1/16 印张 11.75 字数 289 千
版　　次 2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷
印　　数 1～5000
ISBN 978-7-305-05707-6
定　　价 22.00 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 nupress1@public1.ptt.js.cn

前言

“线性代数”是工学、经济学、管理学、农学等门类学科大学生的一门重要的数学基础课，是学习一些后续课程的基本工具.与微积分相比，线性代数更多地是从离散的角度研究客观世界的空间形式和数量关系，具有较强的逻辑性、抽象性.由于学时数的限制，以往的一些教材往往削弱了线性代数原本所具有的丰富且深刻的实际背景，一些重要概念及性质没有给出相应的原型，这不仅影响了学生对这些概念及性质理解的深度和广度，也给应用带来了较大困难.随着我国现代化进程的飞速发展，我国的社会主义建设事业需要大量的高级应用型人才，高等教育理念发生了深刻的变化.适应社会需求，多方位、多层次培养有较广的理论基础、有较强应用能力的人才已成为许多高等院校的共识，这种理念的重大转变自然带来了教学内容和教学模式的变化，相应教材的改革不可避免.为了适应这一变化，我们通过多年来对“线性代数”课程的教学实践及经验总结，针对应用型人才的培养目标和学生的学习特点，在分析了原有教材存在的不足之处的基础上，结合国内外同类优秀教材将科学性、实用性融于一体的成功经验，力图既保持线性代数自身具有的系统性和完整性，又紧密结合应用背景，撰写了本教材.

本教材的主要内容是：行列式，矩阵及其运算，向量组的线性相关性与矩阵的秩，线性方程组，特征值与特征向量，矩阵的对角化，二次型，线性空间与线性变换.为了突出应用性，本教材有如下几个方面的特点：

1. 坚持线性代数的严谨性与逻辑性，以教育部对应用型本科“线性代数”教学的基本要求为依据编写本教材.

2. 代数的抽象性众所周知，代数的应用性又十分广泛，我们坚持理论与实践相结合的原则来编写本教材.在各章中力图从应用中引进概念，在应用实例中理解概念，将抽象的代数理论具体化是本书的重要特点.

3. 本书在例题与习题的选择上，既有丰富、典型的例题，又选取了一些实际应用中的鲜活、有趣的例子，如在特征值与特征向量等内容教学中，让学生在兴趣中学会概念在实际中的转化、理论在实际中的应用等.

4. 我们强调内容的实际背景与几何直观阐述，力求理论推导简单明了，不

苛求证明的完整性，特别对冗长或难度较大的部分基础理论推证，一般不证或打“*”号处理.

5. 本书重视现代化教育手段在教学中的作用，增加“线性代数实验”一节作为附录，讲述了 MATLAB 在线性代数方面的基本功能与编程方法，列举了丰富的例题，帮助学生学会用 MATLAB 解决线性代数问题.

6. 为了加强应用和适应众多专业，我们在编写教材时对一些内容打了“*”号，这些打“*”号的内容，可以针对授课学生专业的需要以及给定的教学时数进行取舍.

本书的基本教学时数不得低于40学时，讲解加“*”号内容需要另外安排课时. 本书可作为普通高等学校工科类应用型本科、民办本科各专业的线性代数教材，在去掉“*”号标记内容后，也可作为专科学生的线性代数教材.

本书共7章，其中第1章由汪建编写，第2章由伍鸣编写，第3章由张国印编写，第4章与第6章由方芬编写，第5章与第7章由徐鹤卿编写，附录由魏广华编写. 全书由徐鹤卿和张国印负责统稿，裴青洲和宋丁全教授对本教材的建设给予了热情支持和帮助，并给予了不少具体的有益的建议，南京大学出版社对此书出版给予了极大的支持，编者在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，错漏之处在所难免，诚恳专家及使用本书的老师与学生批评指正.

编者

2008 年 10 月于南京

目　录

第 1 章　行列式

行列式这一数学概念源于对线性方程组的公式解的研究，它是线性代数中的一个重要工具，在其他数学分支及一些实际问题中也常常用到. 本章主要介绍行列式的定义、性质、计算方法以及求解 n 元 n 式线性方程组的公式——克莱姆(Cramer)法则.

1.1　n 阶行列式

本节主要介绍 n 阶行列式的定义.

1.1.1　二阶和三阶行列式

行列式是一种特定的算式. 现通过二元、三元线性方程组解的表示来探究二阶、三阶行列式的定义. 对于一个二元二式的线性方程组，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0),$$

利用消元法，即在上述方程组第一式两边同乘 a_{22}，第二式两边同乘 a_{12} 后，将所得的两式作差，可得解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\text{同理可得 } x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

上式中 x_1, x_2 的表示式在一定条件下有其普遍性，但是上述公式不方便记忆. 为了克服这一缺点，可以引进**二阶行列式**的概念. 用符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 代表式子 $ad - bc$，即 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$，称符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 为二阶行列式. 将上述二元二式的线性方程组的解用行列式语言描述如下：称上述方程组各变量前系数构成的行列式为系数行列式，则当系数行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，其解可写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

显然以这种形式给出的解呈现出明显的规律. 它可以作为一般二元二式线性方程组的公式解.

例 1　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases}.$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&4\\3&5\end{vmatrix}=2\times5-4\times3=-2\neq0,$$

又
$$D_1=\begin{vmatrix}7&4\\1&5\end{vmatrix}=31,D_2=\begin{vmatrix}2&7\\3&1\end{vmatrix}=-19.$$

则方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{31}{2},x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{19}{2}$.

对于三元三式的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

也有类似结果. 即记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称 D 为三阶行列式. 也称这个由方程组系数组成的行列式为三元三式线性方程组的**系数行列式**.

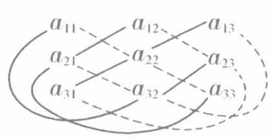
当 $D\neq0$ 时,用类似于二元情形的消元法求解这个方程组可得公式解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

三阶行列式实际上是一个算式,它可以由下面的**对角线法则**得到



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

在上面的行列式中,每一条实线经过的三个元素的乘积带负号,每一条虚线经过的三个元素的乘积带正号,所得的六项的代数和就是三阶行列式的值. 需要指出的是对角线法则只适用于二阶及三阶行列式.

例 2 求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=1\\x_1+2x_2+x_3=3\\3x_1+x_2+2x_3=4\end{cases}.$$

解 由对角线法则容易得到方程组的系数行列式,

$$D=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&2&1\\3&1&2\end{vmatrix}=2\times2\times2+3\times1\times3+4\times1\times1-4\times2\times3-2\times1\times1-3\times1\times2=-11,$$

同理可得

$$D_1=\begin{vmatrix}1&3&4\\3&2&1\\4&1&2\end{vmatrix}=-23,D_2=\begin{vmatrix}2&1&4\\1&3&1\\3&4&2\end{vmatrix}=-15,D_3=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&3\\3&1&4\end{vmatrix}=20,$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{23}{11},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{15}{11},x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{20}{11}.$$

一个自然的问题是,对 n 元 n 式的线性方程组是否有类似的结果?为了回答此问题,我们有必要将三阶行列式推广到一般情形.

研究二阶、三阶行列式的算法可以发现:

(1) 二阶行列式是 $2!$ 个式子的代数和,三阶行列式是 $3!$ 个式子的代数和.

(2) 和式中的每一项均是来自不同行不同列的元素的乘积.

(3) 和式中的每一项前的正负号与组成该项的元素所在的行数和列数有关.

这三条规律全面地反映了二阶、三阶行列式算法的特征,我们可以从这三个方面对行列式的定义加以推广.为此,需要介绍排列和逆序数的概念.

1.1.2 排列与逆序

定义 1.1.1 由 n 个自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 **n 级排列**.

显然 n 级排列共有 $n!$ 个.

定义 1.1.2 在一个 n 级排列中,如果一个较大数排在一个较小数之前,就称这两个数构成一个逆序.一个排列中的逆序的总数,称为这个排列的**逆序数**,用 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 或 τ 来表示.

若 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 为偶数,则称排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 为**偶排列**;若 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 为奇数,则称排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 为**奇排列**.易知,三阶行列式各项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 下标中的 $j_1j_2j_3$ 为偶排列的有(123),(231),(312),相应项前面所取的符号均为正号;为奇排列的有(321),(213),(132),相应项前面所取的符号均为负号.

例 3 确定下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1) 1 2 3 4 5,(2) 5 4 3 2 1,(3) 2 5 4 3 1.

解 (1) 排列的逆序数 $\tau=0$,它为偶排列.

(2) 排列的逆序数 $\tau=4+3+2+1=10$,它为偶排列.

(3) 排列的逆序数 $\tau=1+3+2+1=7$,它为奇排列.

1.1.3 n 阶行列式的定义

定义 1.1.4 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行 n 列的 **n 阶行列式**

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\tag{1.1}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,各项的符号由 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性决定. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时,对应项取正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时,对应项取负号,即 n 阶行列式(1.1)可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.2}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. 有时也将(1.1)简记为$|a_{ij}|$或 $\det(a_{ij})_{n\times n}$,(1.2)式也称为 **n 阶行列式的展开式**.

值得注意的是:行列式是一数值. 通常所谓计算行列式就是指将(1.1)式写成数值的形式. 由行列式展开式不难得到:如果一个行列式的某一行元素全为零,则行列式值一定为零.

例 4 计算下面的 n 阶行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 为叙述方便不妨先假设 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$全不为零. 由行列式的展开式(1.2)可见,要计算行列式只要算出所有的 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$(1.3),再定出它前面的符号即可. 易见行列式中元素为零的较多,我们只需要定出展开式(1.2)中不为零的那些项. 由于 a_{1j_1} 是取自第一行,要使(1.3)不为零,只能取 a_{11}. 再看(1.3)中的 a_{2j_2},要使(1.3)不为零,则 a_{2j_2} 只有两种选择,即取 a_{21} 或者 a_{22},但是由行列式定义 a_{2j_2} 不能与 a_{11} 在同一列,故只能取 a_{2j_2} 为 a_{22}. 这样继续观察下去,可以发现要使(1.3)不为零,则在第 k 行只有选择第 k 列元素 $a_{kk}(k=1,2,\cdots,n)$. 即在此行列式展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不为零,由 $\tau(1\,2\cdots n)=0$ 知道此项前面应该取正号. 故行列式的值为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 如果 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$中至少有一个为零,则由上面的解题过程可见行列式值为零,结果同样可以写成 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上例中的行列式称为**下三角行列式**. 行列式中从左上角元素到右下角元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的直线称为**主对角线**. 计算结果表明下三角形行列式值等于主对角线上元素之积. 例 4 的一个特殊情形是行列式中除了对角线上以外的元素均为零,这样的行列式称为对角形行列式. 同样有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

可以看出,直接应用定义去计算较高阶的行列式是比较麻烦的,这就需要寻找别的方法来计算行列式.为此,要求我们对行列式定义有进一步认识.

定义 1.1.3　排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,交换任意不同两数 i_s 与 i_t 的位置,称为一次**对换**.进行一次对换会改变排列的奇偶性.在 $n(n>1)$ 级的 $n!$ 个排列中,奇偶排列各占一半,为$\frac{n!}{2}$个.

定理 1.1.1　任意一个排列经过一次对换后奇偶性改变.

证　(1) 首先讨论对换相邻两个数的特殊情形,设排列为 $i_1\cdots i_si_t\cdots i_n$,经过对换 i_s 与 i_t,变为排列 $i_1\cdots i_ti_s\cdots i_n$,易见,相对原排列而言,逆序数仅增加或者减少 1,即奇偶性改变了.

(2) 一般情形,设排列为 $i_1\cdots i_si_{s+1}\cdots i_{t-1}i_t\cdots i_n$,对换 i_s 与 i_t,则原排列变为 $i_1\cdots i_ti_{s+1}\cdots i_{t-1}i_s\cdots i_n$.而新排列可以通过如下步骤得到:在原排列 $i_1\cdots i_si_{s+1}\cdots i_{t-1}i_t\cdots i_n$ 中将 i_s 依次与 $i_{s+1},\cdots,i_{t-1},i_t$ 作 $t-s$ 次相邻对换得到排列 $i_1\cdots i_{s+1}\cdots i_{t-1}i_ti_s\cdots i_n$,再将 $i_1\cdots i_{s+1}\cdots i_{t-1}i_ti_s\cdots i_n$ 中的 i_t 依次与 $i_{t-1}\cdots i_{s+1}$ 作 $t-s-1$ 次相邻对换.所以由原排列变为新排列共经过 $2(t-s)-1$ 次相邻对换.由(1)中的结论知道对换 i_s 与 i_t 改变排列的奇偶性.

综上所述,结论成立.证毕.

定理 1.1.2　$n(n>1)$个数共有 $n!$ 个 n 级排列,其中奇偶排列各占一半.

证　n 级排列的总数为 $n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1=n!$ 个,设其中奇排列的数目为 s 个,偶排列的数目为 t 个.若对所有不同的 s 个奇排列进行一次相同对换,则得到 s 个互不相同的偶排列,故 $s\leqslant t$,同理,有 $s\geqslant t$,故 $s=t$.证毕.

定理 1.1.3　记 D 为(1.1)式中的 n 阶行列式,则 D 的值也可以写成

$$\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n,j_1j_2\cdots j_n$均为 n 级排列,$\sum\limits_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}$ 表示对所有这样的 n 级排列求和.

证　由于 $i_1i_2\cdots i_n,j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列,因此 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中的 n 个元素是取自 D 的不同行不同列.

如果交换 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$,则其行标排列由 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 换为 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,由前定理知其逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$奇偶性改变;同理 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$在这次交换中奇偶性也改变,因此 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$之和的奇偶性不变,即一次对换不改变 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)+\tau(i_1i_2\cdots i_n)$的奇偶性.故经过有限次交换$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)+\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$中元素的位置,使其行标 $i_1i_2\cdots i_n$ 变为 $1\ 2\cdots n$,此时列标变为 $k_1k_2\cdots k_n$,则

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)+\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\text{变为}$$

$$(-1)^{\tau(1\,2\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n},$$

上式即为 D 定义中的一般项. 证毕.

由定理的证明可知，D 的展开式也可以写成：$\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$.

1.2　n 阶行列式的性质

本节将利用行列式的定义来讨论行列式的一些常用性质，以简化行列式的计算，并为以后章节的应用打下基础.

定义 1.2.1　将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'. 即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2.1　行列式转置后，其值不变，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证　由行列式定义，来自 D^{T} 中第 $1,2,\cdots,n$ 行且第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 列元素积形式的一般项为：$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$，它恰好是 D 中第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 行且第 $1,2,\cdots,n$ 列元素的乘积的那一项，由定理 1.1.3，其符号也是 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}$，因此 D 与 D^{T} 展开式中 $n!$ 个项都相同，故 $D=D^{\mathrm{T}}$. 证毕.

由以上性质可知，行列式中对行成立的性质一般对列也相应成立. 以后讨论行列式行和列都具有的性质时，只对行（或只对列）给出说明.

用以上性质以及 1.1.2 节的例 4 可以得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

上面左端的行列式也称为**上三角行列式**.

由于该行列式的值就是其对角线上元素之积，所以在今后的行列式计算中，常希望能将行列式等值转化成上（下）三角行列式.

性质 1.2.2　交换行列式的两行（列），行列式值反号.

证　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换 D 的第 s 行与第 t 行($s<t$),得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}a_{s+1,j_{s+1}}\cdots a_{t-1,j_{t-1}}a_{tj_t}\cdots a_{nj_n},$$

$$D_1=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{tj_t}a_{s+1,j_{s+1}}\cdots a_{t-1,j_{t-1}}a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}.$$

比较两式可见 D 与 D_1 和式中的每一项只相差一负号,故 $D_1=-D$. 证毕.

推论　如果行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式为零.

由于将行列式 D 中具有相同元素的两行互换其结果仍然是 D,但由性质 1.3.2 可知其结果应为 $-D$,因此 $D=-D$,所以 $D=0$.

性质 1.2.3　用数 k 乘行列式的一行(列),等于数 k 乘此行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

证　(1.4)式左边 $=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$=k\left[\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\right]$

$=$(1.4)式右边.

证毕.

由性质 1.2.3 不难得到以下三个推论.

推论 1　如果行列式某行(列)的所有元素有公因子,则公因子可以提到行列式外面.

推论 2　如果行列式某行(列)的所有元素全为零,则行列式等于零.

推论 3　如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则行列式等于零.

性质 1.2.4　如果将行列式 D 中的某一行(列)的每一个元素都写成两个数的和,则此

行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素，其他位置的元素与 D 相同. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

证 (1.5)式左边 $= \sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}\left[(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\right]$

$= \sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} + \sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$

$=$(1.5)式右边.

证毕.

应该注意，将一个行列式拆成两个行列式之和时，只能将某一行(列)的元素拆开，而其余位置上的元素不变.

性质 1.2.5 将行列式某一行(列)的所有元素的 k 倍加到另一行(列)对应位置的元素上，行列式值不变.

证 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

将 D 的第 s 行元素的 k 倍加到第 t 行($s\neq t$)的对应元素上，得到

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1}+a_{t1} & ka_{s2}+a_{t2} & \cdots & ka_{sn}+a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 1.2.4 以及性质 1.2.3 的推论 3 可得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0+D=D.$$

证毕.

例 1　计算行列式：$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

解　先使用行列式性质对行列式化简后再计算. 由性质 1.2.5，可将行列式 D 的第一行的元素的(-1)倍分别加到第二行、第三行、第四行上去，则有

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=16.$$

最后一个等式用到了性质 1.2.1 后面关于上三角行列式的结果.

1.3　行列式的计算

在行列式计算中，除了零元素很多时可以利用定义计算外，通常是先利用行列式性质对行列式进行化简后再计算. 符号说明：本节中出现的 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$ 表示将行列式的第 j 行(列)元素的 k 倍加到第 i 行(列)对应元素上去.

例 1　计算行列式：$D=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

解　为计算方便，利用行列式性质将其等值转化为上三角行列式，再计算.

$$D=2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+(-2)r_1]{\substack{r_2+(-1)r_1\\ r_3+r_1}}2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+(-2)r_2]{r_3+(-1)r_2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4+2r_3}2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{vmatrix}=52.$$