普通高等教育“十一五”规划教材

21世纪经管类创新教材

微积分分级训练教程

谢承义 熊章绪 主编

科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材
21 世纪经管类创新教材

微积分分级训练教程

谢承义　熊章绪　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书每章由知识结构(图)、教学要求、释疑解惑、典型例题、分级训练与测试五部分组成，可与熊章绪、陶前功主编的《微积分教程》(上、下册)配套，作为辅导、习题课教材. 全书共12章，内容包括函数、极限与连续、一元微积分的概念、一元函数微分法、一元函数积分法、一元微积分的应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、微分方程、差分方程、应用数学模型等.

本书可作为高等学校经管类本科生习题课教材使用，也可作为相关人员自学时的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分分级训练教程/谢承义，熊章绪主编. —北京：科学出版社，2009

普通高等教育"十一五"规划教材. 21世纪经管类创新教材

ISBN 978-7-03-025645-4

Ⅰ.微… Ⅱ.①谢…②熊… Ⅲ.微积分—高等学校—教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第171006号

责任编辑：王雨舸 曾 莉 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年9月第 一 版 开本：B5(720×1 000)

2009年9月第一次印刷 印张：20 3/4

印数：1—4 000 字数：420 000

定价：33.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言
FOREWORD

微积分是高等学校经管类学生的必修课,“对它的重要性无论作怎样的估计都不过分”.但在当前我国高等教育大众化的条件下,微积分教学普遍存在着三个问题：一是相当一部分学生感到微积分太抽象,学习起来难度大、困难多;二是微积分与经济学和管理学在衔接上存在问题,如经济学要用到定积分知识,但要到较晚才能讲到,往往影响教学质量;三是学完这门课后,往往只记住一些规则和算法,不会灵活地进行综合应用.

如何解决这些问题?我们对产生上述问题的原因进行了认真分析,并提出解决问题的三项措施：一是进行分级教学;二是开设必要的习题课,加强辅导;三是编写一套既符合学生实际,又达到教育部有关课程的基本要求,且具有特色的创新教材.

在几年分级教学的实践中,我们在基本保持原内容体系的基础上做了一些改革的尝试,所编的讲义几经修订,形成了现在出版的这套教材.它包括《微积分教程》(上、下册),《微积分分级训练教程》.

本书为《微积分分级训练教程》,可与熊章绪、陶前功主编的《微积分教程》(上、下册)配套,作为辅导、习题课教材.全书分12章,内容包括函数、极限与连续、一元微积分的概念、一元函数微分法、一元函数积分法、一元微积分的应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、微分方程、差分方程、应用数学模型等.每章由知识结构(图)、教学要求、释疑解惑、典型例题、分

级训练与测试五部分组成.该教程具有如下特点：

(1) 每章学习目标明确，便于学生分清主次，突出重点.

(2) 每章的知识结构，将基本知识表格化梳理，便于学生一览全局，掌握内容体系.

(3) 讲练内容全面，与教材同步，分级进行，且突出重点，I 级是一般知识点，II 级是对 I 级内容的深化、扩展与提高.

(4) 每章的释疑解惑，能解决学生学习中的一些难点及似是而非的问题，能帮助读者更好地理解基本概念、公式、定理.

(5) 每章的典型例题注重阐述解题思路，尽量提供一题多解，启迪思维.书中典型例题带“*”为 II 级所用。

(6) 本书以实用为原则，“讲、练、测”融为一体，结构优化，能使读者实现由知识向能力的转化.

本书由谢承义、熊章绪任主编，赵琼任副主编、易风华、邢婧、魏小燕、黄传喜、曾艳妮、陶前功、陈兰参编.

由于编者水平有限，书中不当之处在所难免，敬请同仁、读者不吝指正.

编　者

2009 年 6 月

目录 CONTENTS

第 1 章　函　　数

知识结构(图)

- 函数
  - 预备知识
    - 集合及其运算
    - 实数与数轴
    - 区间
    - 绝对值与邻域
  - 函数的概念
    - 常量与变量
    - 函数概念的引入
    - 函数的定义
  - 函数的性质
    - 函数的奇偶性
    - 函数的单调性
    - 函数的周期性
    - 函数的有界性
  - 反函数
    - 反函数概念的引入
    - 反函数的定义
    - 反函数存在的条件
  - 复合函数
    - 复合函数概念的引入
    - 复合函数的定义
  - 基本初等函数与初等函数
    - 基本初等函数
      - 常数函数
      - 幂函数
      - 指数函数与对数函数
      - 三角函数与反三角函数
    - 初等函数
  - 常用经济函数
    - 成本函数、收入函数、利润函数
    - 需求函数、供给函数

教学要求

1. 理解区间与邻域的概念.

2. 理解函数的概念，掌握函数的两个基本要素，了解几种特殊类型的函数，掌握函数定义域的求法.

3. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性，并会讨论及简单地运用函数的这些性质.

4. 了解反函数的概念及反函数存在的条件，并会求简单函数的反函数.

5. 理解复合函数的概念，掌握函数的复合和分解.

6. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

7. 理解初等函数的概念.

8. 能列出简单经济应用问题的函数关系式.

释疑解惑

1. 邻域$U(x_0, \delta)$与去心邻域$\mathring{U}(x_0, \delta)$有何区别？

答 邻域$U(x_0, \delta)$表示开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$，而去心邻域$\mathring{U}(x_0, \delta)$表示在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中去掉$x_0$得到的两个开区间的并集：

$$(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$$

即点x_0的左、右δ邻域的并集. 由此可见，它们仅有包含点x_0与不包含点x_0的不同，这就是它们的区别(图 1.1).

图 1.1

2. 什么是函数的两要素？

答 对于函数$y=f(x)$ $(x \in D)$，定义域D和对应法则f是确定函数关系的两要素，函数的值域可由D和f确定. 判别两个函数是否相同，要看两要素是否相同.

3. 如何确定函数的定义域？

答 已知数学解析式的函数的定义域是指使函数解析式有意义的自变量的取值范围，当函数的数学解析式是下面几种形式时，确定函数定义域的原则是：

(1) 分式要求分母不等于零；

(2) 偶次根式要求被开方式非负；

(3) 对数式要求真数大于零，底数大于0而不等于1；

(4) 反三角函数式，如$y=\arcsin u$, $y=\arccos u$，要求$|u| \leqslant 1$，即$-1 \leqslant$

$u \leqslant 1$；

(5) 由有限个函数经四则运算所构成的函数，其定义域是这有限个函数定义域的交集；

(6) 对于实际问题，应根据问题的实际意义确定函数的定义域.

4. 如何理解分段函数？

答 分段函数是自变量在不同取值范围内对应不同的解析式表示的函数. 在整个定义域内它只是一个函数，而不是几个函数. 对于分段函数，应掌握两点：

(1) 分段函数的定义域是各子式定义域的并集；

(2) 作分段函数图像时，应分段作图像，取各段定义域内的部分.

因初等函数是用一个数学解析式表示，而分段函数是用几个数学解析式表示，所以分段函数一般不是初等函数. 但某些分段函数如果可以用一个数学式表示，仍然是初等函数. 例如，

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant 2,\\ 4, & x>2\end{cases}=x+2-\sqrt{(x-2)^2}$$

是初等函数.

5. 取整函数 $y=[x]$ 有何特性？

答 $y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 例如，

$$[\pi]=3 \qquad [-\pi]=[-3.14]=-4 \qquad [e]=2 \qquad [-e]=-3$$

取整函数有下面三条重要性质：

(1) $[x]\leqslant x<[x]+1,\ x\in \mathbf{R}$；

(2) $x-1<[x]\leqslant x,\ [x]\in \mathbf{Z}$；

(3) $n>[x]\Leftrightarrow n>x,\ n\in \mathbf{N}^{+}$.

$y=[x]$ 的图形呈阶梯形.

6. 判定函数奇偶性应注意的首要问题是什么？

答 判定函数 $f(x)$ 的奇偶性，首先考察 $f(x)$ 的定义域是否关于原点对称. 例如，函数 $f(x)=x^2,\ x\in[-1, 2]$ 就不是偶函数，如果定义域为 $(-1, 1)$，则 $f(x)$ 是偶函数. 一般情况下，分析函数的奇偶性时，常认为 $f(x)$ 定义在关于原点对称的区间 $(-a, a)$ 上. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x<0\end{cases}$$

定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上，因为

$$f(-x)=\begin{cases}-x+1, & -x>0,\\ 0, & -x=0,\\ -x-1, & -x<0\end{cases}=\begin{cases}-(x-1), & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -(x+1), & x>0\end{cases}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

7. 反函数怎样求得？

答 由于函数的表达式与自变量、因变量用什么字母表示无关，因此函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常表示为 $y=f^{-1}(x)$.

求 $y=f(x)$ 反函数的步骤是：先从 $y=f(x)$ 中求出 $x=f^{-1}(y)$，再互换 x, y 得反函数 $y=f^{-1}(x)$. 应注意 $y=f^{-1}(x)$ 与 $x=f(y)$ 是同一条曲线；而 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

8. 复合函数的分解应注意什么？分段函数如何复合？

答 将复合函数分解为若干个较简单的函数，应注意分解后的每一个函数都是基本初等函数或它们的和、差、积、商. 例如，将复合函数 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 分解为 $y=\mathrm{arc}\,u$, $u=\sin v$, $v=\sqrt{t}$, $t=1-x^2$ 是错的，因为 $y=\mathrm{arc}\,u$ 不是基本初等函数，而应分解为 $y=\arcsin u$, $u=\sqrt{v}$, $v=1-x^2$.

求分段函数的复合函数是个难点. 设 $f(x)$, $\varphi(x)$ 是分段函数，求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 时应分两步进行：① 将 $f(x)$ 中的 x 及各段定义域中的 x 都换成 $\varphi(x)$，可得 $f[\varphi(x)]$ 的函数表达式；② 解所得到的关于 $\varphi(x)$ 的不等式，便可求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

例如，

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ -x^2, & x>0\end{cases} \qquad \varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$$

则

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & \varphi(x)\leqslant 0\\ -\varphi^2(x), & \varphi(x)>0\end{cases}$$

因为当 $\varphi(x)\leqslant 0$ 时，$x\leqslant 0$；当 $\varphi(x)>0$ 时，$x>0$ 且 $\varphi(x)=x$，所以

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -\varphi^2(x), & x>0\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0\end{cases}$$

典 型 例 题

例 1 判定下列各对函数是否相同，并说明理由.

(1) $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$, $g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$;

(2) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$;

(3) $f(x)=\arccos x$, $g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$;

(4) $f(x)=3-|3x-1|$, $g(x)=\begin{cases}4-3x, & x\geqslant\dfrac{1}{3},\\ 2+3x, & x<\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

解 (1) 由对数性质，有

$$\ln(x^2-3x+2)=\ln(x-1)(x-2)$$

$f(x)$的定义域由$\begin{cases}x-1<0,\\x-2<0\end{cases}$或$\begin{cases}x-1>0,\\x-2>0\end{cases}$得$(-\infty,\ 1)\cup(2,\ +\infty)$. 而$g(x)$的定义域只是$(2,\ +\infty)$,故$f(x)$与$g(x)$不相同.

(2) 两个函数的对应法则f相同,定义域都是$(-1,\ 1)$,故$f(x)$与$g(x)$相同.

(3) 由于$\cos(\arccos x)=x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)=\sin(\arcsin x)=x$,定义域都是$[-1,\ 1]$,故$f(x)$与$g(x)$相同.

(4) 根据绝对值的定义,当$3x-1\geqslant 0$,即$x\geqslant\frac{1}{3}$时,$|3x-1|=3x-1$;当$3x-1<0$,即$x<\frac{1}{3}$时,$|3x-1|=1-3x$. 于是$f(x)=\begin{cases}4-3x, & x\geqslant\frac{1}{3},\\2+3x, & x<\frac{1}{3},\end{cases}$定义域都是$(-\infty,\ +\infty)$,故$f(x)$与$g(x)$相同.

例 2 求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$;　　(2) $y=\sqrt{\arcsin x+\frac{\pi}{4}}$;

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\ln(16-x^2)$;　　(4) $y=\arccos\frac{2x-1}{7}+\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$.

解 (1) 由$\begin{cases}x-1>0,\\x-1\neq 1,\\16-x^2>0\end{cases}$知$\begin{cases}x>1,\\x\neq 2,\\|x|<4,\end{cases}$故$1<x<2$或$2<x<4$,即所求定义域为$(1,\ 2)\cup(2,\ 4)$.

(2) 由$\begin{cases}\arcsin x+\frac{\pi}{4}\geqslant 0,\\|x|\leqslant 1\end{cases}$知$\begin{cases}x\geqslant-\frac{\sqrt{2}}{2},\\-1\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$故$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1$,即所求定义域为$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right]$.

(3) 由$\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\16-x^2>0\end{cases}$知$\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),\\-4<x<4,\end{cases}$故$-4<x\leqslant-\pi$或$0\leqslant x\leqslant\pi$,即所求定义域为$(-4,\ -\pi]\cup[0,\ \pi]$.

(4) 由$\begin{cases}\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\\2x-x^2\geqslant 0,\\2x-1>0,\\2x-1\neq 1\end{cases}$知$\begin{cases}-6\leqslant 2x\leqslant 8,\\x(x-2)\leqslant 0,\\2x>1,\\x\neq 1,\end{cases}$即$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\0\leqslant x\leqslant 2,\\x>\frac{1}{2},\\x\neq 1,\end{cases}$ 所以有$\frac{1}{2}<x<1$

或 $1<x\leqslant 2$,即所求定义域为$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)\cup(1,\ 2]$.

通过以上例子可以记住下列简单函数的定义域:

$y=\frac{1}{x},\ D_f:\ x\neq 0$ $\qquad y=\sqrt[2n]{x},\ D_f:\ x\geqslant 0$ $\qquad y=\log_a x,\ D_f:\ x>0$

$y=\tan x,\ D_f:\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}$ $\qquad y=\cot x,\ D_f:\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$

$y=\arcsin x,\ D_f:\ |x|\leqslant 1$ $\qquad y=\arccos x,\ D_f:\ |x|\leqslant 1$

求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

例 3 求解下列各题:

(1) 求 $y=e^{\frac{1}{x}}+\arcsin\ln\sqrt{1-x}$ 的定义域;

(2) 设 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$,求 $y=f(x^2)+f(e^x)$ 的定义域.

解 (1) 由 $e^{\frac{1}{x}}$ 知 $x\neq 0$;由 $\arcsin\ln\sqrt{1-x}$ 知

$$-1\leqslant\ln\sqrt{1-x}\leqslant 1\Rightarrow e^{-1}\leqslant\sqrt{1-x}\leqslant e\Rightarrow 1-e^2\leqslant x\leqslant 1-e^{-2}$$

故所求的定义域是$[1-e^2,\ 0)\cup(0,\ 1-e^{-2}]$.

(2) 易求得函数 $f(x)$的定义域是$(-1,\ 1)$,由此有$\begin{cases}-1<x^2<1,\\-1<e^x<1,\end{cases}$因 $x^2\geqslant 0$, $e^x>0$,故$\begin{cases}0\leqslant x^2<1,\\0<e^x<1,\end{cases}$即$\begin{cases}-1<x<1,\\-\infty<x<0,\end{cases}$所求定义域为$(-1,\ 0)$.

例 4 设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x^2, & x\leqslant 0,\\ e^x, & x>0,\end{cases}$求:

(1) 函数的定义域;

(2) $f(0),\ f(-1),\ f(2),\ f(a),\ f[f(-1)]$.

解 (1) 函数的定义域是 $(-\infty,\ 0]\cup(0,\ +\infty]$,即$(-\infty,\ +\infty)$.

(2) 因 $0\in(-\infty,\ 0]$, $-1\in(-\infty,\ 0]$,由 $f(x)=2+x^2$,得

$$f(0)=2+0=2\qquad f(-1)=2+(-1)^2=3$$

因 $2\in(0,\ +\infty)$,由 $f(x)=e^x$,得 $f(2)=e^2$. 当 $a\leqslant 0$ 时,由 $f(x)=2+x^2$,得 $f(a)=2+a^2$;当 $a>0$ 时,由 $f(x)=e^x$,得 $f(a)=e^a$. 因 $f(-1)=3>0$,所以

$$f[f(-1)]=f(3)=e^3$$

例 5* 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$求 $F(x)=f(x)-f(x-1)-f(x-2)$.

解 因为

$$f(x-1)=\begin{cases}0, & x<1\\ (x-1)^2, & x\geqslant 1\end{cases}\qquad f(x-2)=\begin{cases}0, & x<2\\ (x-2)^2, & x\geqslant 2\end{cases}$$

而 $F(x)$的表达式由各区间的函数的表达式来确定,故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2-0=x^2, & 0\leqslant x<1\\ x^2-(x-1)^2-0=2x-1, & 1\leqslant x<2\\ x^2-(x-1)^2-(x-2)^2=-x^2+6x-5, & x\geqslant 2\end{cases}$$

例 6 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f(x)$.

解 由于 $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$，从而 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=2-2\sin^2\frac{x}{2}$，所以

$$f(x)=2-2x^2$$

例 7* 设 $f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)-2f(x)=x$，求 $f(x)$.

解 设 $\frac{1+x}{2x-1}=t$，可解得 $x=\frac{t+1}{2t-1}$，将其代入原等式，则有

$$f(t)-2f\left(\frac{t+1}{2t-1}\right)=\frac{t+1}{2t-1}$$

于是有

$$\begin{cases}f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)-2f(x)=x\\ 2f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)-f(x)=-\frac{x+1}{2x-1}\end{cases}$$

将 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)$ 视为未知数，解此线性方程组，可求得

$$f(x)=\frac{4x^2-x+1}{3(1-2x)}$$

例 8* 判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(2) $f(x)=F(x)\left(\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}\right)$，$F(x)$ 是奇函数.

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\left[\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 设 $G(x)=\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}$，因为

$$G(-x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}=\frac{1+e^x-1}{1+e^x}-\frac{1}{2}=-G(x)$$

又 $F(x)$是奇函数,故 $f(x)$是偶函数.

例 9* 设 $f(x)=2^{\cos x}$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$,判断 $f(x)$, $g(x)$ 在区间$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$内的单调性.

解 在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$内 2^x 是增函数,而 $\cos x$ 是减函数,故 $2^{\cos x}$ 是减函数;在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$内$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是减函数,而 $\sin x$ 是增函数,故$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$ 是减函数.

例 10* 设 $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$是$(-\infty, +\infty)$内的单调增函数,证明:若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$,则 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$.

证 设 x_0 为$(-\infty, +\infty)$内的任一点,由题设,有 $\varphi(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\psi(x_0)$,由 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$ 及函数的单调增加性,得

$$f[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)] \qquad \varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[\varphi(x_0)]$$

从而
$$\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]$$

同理可证
$$f[f(x_0)]\leqslant\psi[\psi(x_0)]$$

由 x_0 的任意性,可知在$(-\infty, +\infty)$内,有

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$$

例 11 已知 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,求 $f^{-1}(x)$.

解 设 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$,由此式解出 x,得

$$ye^{2x}+y=e^{2x}-1 \quad 或 \quad e^{2x}=\frac{1+y}{1-y},\ x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$

于是
$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

例 12* 设 $f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^3, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 3^x, & 4<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

解 求分段函数的反函数,只要求出各区间段的反函数及定义域即可.

$$y=x,\ -\infty<x<1\Rightarrow x=y,\ -\infty<y<1$$

$$y=x^3,\ 1\leqslant x\leqslant 4\Rightarrow x=\sqrt[3]{y},\ 1\leqslant y\leqslant 64$$

$$y=3^x,\ 4<x<+\infty\Rightarrow x=\log_3 y,\ 81<y<+\infty$$

将以上所得各式中的字母 x 与 y 对换,则得到 $f(x)$的反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ \sqrt[3]{x}, & 1\leqslant x\leqslant 64\\ \log_3 x, & 81<x<+\infty\end{cases}$$

例 13 设 $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$,求 $f^{-1}(3)$.

解 由 $x=f^{-1}[f(x)]$ 知,当 $f(x)=3$ 时所对应的 x 即为所求.

将 3 代入已知式 $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ 的左端,所求 x 的值即为 $f^{-1}(3)$. 于是,$3=\dfrac{2x}{x+1}$,得 $x=-3$,即 $f^{-1}(3)=-3$.

例 14 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,求:

(1) $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$; (2) $f\{f[f(x)]\}$.

解 (1) $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=f(1+x)=\dfrac{1}{1+(1+x)}=\dfrac{1}{2+x}\quad(x\neq-1,\ x\neq-2)$

(2) $f[f(x)]=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{1+x}{2+x}\quad(x\neq-1,\ x\neq-2)$,则

$$f\{f[f(x)]\}=f\left(\frac{1+x}{2+x}\right)=\frac{1}{1+\dfrac{1+x}{2+x}}=\frac{2+x}{3+2x}\quad\left(x\neq-1,\ x\neq-\frac{3}{2}\right)$$

例 15* 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

解 因为 $$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}$$

当 $x<0$ 时,$f(x)=x^2>0$;当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=-x\leqslant 0$,代入上式,得

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

分级训练与测试

I 级训练题

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{2x}{16-x^2}+\sqrt{\ln x}$; (2) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$;

(3) $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}+\arccos\sqrt{x-4}$; (4) $y=\log_5(x^2-1)$;

(5) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$; (6) $y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$.