



21世纪高等教育本科规划教材
数 学 系 列

丛书主编 郑玉美

高等数学 (下)

GAODENG SHUXUE (XIA)

(第二版)

主 编 尤正书 马 军
赵国石

SHUXUE XILIE



教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列

丛书主编 郑玉美

高等数学(下)

(第二版)

主	编	尤正书	马	军
		赵国石		
副	主	编	宋	翌
			李	霞
			吴	跃
			叶	菁

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本教材以“三用”即够用、管用、会用为原则,以“三凸现”即凸现数学与文化、凸现数学的现代化、凸现数学的应用为特点编写而成。全书共五章,它们分别是常微分方程和差分方程简介、无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学。

本教材适用于普通高等院校本科高等数学课程教学,也可作为科技工作者的参考书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下)/尤正书 马军 赵国石主编. —2 版.

—武汉:华中师范大学出版社,2009. 6(2009. 9 重印)

(21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列)

ISBN 978-7-5622-3944-4

I. 高… II. ①尤… ②马… ③赵… III. 高等数学-高等学校-教材

IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 069471 号

高等数学(下)

(第二版)

主编:尤正书 马 军 赵国石◎

责任编辑:曾太贵

责任校对:罗 艺

封面设计:梦 娜

编辑室:第二编辑室

电话:027—67867362

出版发行:华中师范大学出版社

社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号

电话:027—67863426 67867076 67863040(发行部) 027—67861321(邮购)

传真:027—67863291

网址:<http://www.ccnapress.com>

电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

经销:新华书店总经销

印刷:湖北孝感日报印刷厂

督印:章光琼

字数:387 千字

开本:787mm×1092mm 1/16

印张:17

版次:2009 年 6 月第 2 版

印次:2009 年 9 月第 2 次印刷

印数:5001—8100

定价:28.00 元

欢迎上网查询、购书

敬告读者:欢迎举报盗版,请打举报电话 027—67861321。

21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列

丛书编写委员会

主 任 郑玉美

副主任 (以姓氏笔画为序)

尤正书(湖北大学知行学院)

冉兆平(中南民族大学工商学院)

毕重荣(中国地质大学江城学院)

宋礼民(武汉科技大学中南分校)

刘昌喜(武汉职业技术学院)

陈方年(江汉大学文理学院)

张清平(武汉生物工程学院)

黄承绪(武汉科技大学城市学院)

21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列

丛书主编 郑玉美

《高等数学》(下)编写委员会

- 主 编 尤正书(湖北大学知行学院)
马 军(江汉大学文理学院)
赵国石(中国地质大学江城学院)
- 副主编 宋 翌(武汉生物工程学院)
李 霞(武汉科技大学城市学院)
吴 跃(武汉科技大学中南分校)
叶 菁(中国地质大学江城学院)
- 编 者(以姓氏笔画为序)
马 军(江汉大学文理学院)
叶 菁(中国地质大学江城学院)
尤正书(湖北大学知行学院)
许 虹(江汉大学)
宋 翌(武汉生物工程学院)
李 霞(武汉科技大学城市学院)
李长伟(武汉生物工程学院)
李圆媛(武汉工程大学)
张汉萍(武汉职业技术学院)
张清平(武汉生物工程学院)
吴 跃(武汉科技大学中南分校)
胡 楚(湖北大学知行学院)
赵 慧(中国地质大学江城学院)
彭虎峰(中南民族大学工商学院)

前言

教材建设是一项长期的、艰巨的工作。一部好的教材必须经过师生反复施教、施学,不断探索,精益求精,集思广益,长期积累,不断完善,才能达到我们所追求的目标。

本系列教材自2006年出版以来,对它的使用进行了科学的实验和持续的跟踪调查,为修订做了充分的准备,力争将其打造成一套为社会所公认的精品。主要做了如下工作:

一是在部分学校开展了对比教学实验,即选择一到两种目前大家认为编写较好的教材,由同一位老师或不同的老师在不同的班级进行对比教学实验,并组织师生进行研讨,以发现我们的教材及对比教材的优缺点,为修订提供依据。

二是规定编者及使用者在实施教学的过程中,要注意发现并收集教材中的不足及错误,为修订做准备。

三是定期召开教材使用情况汇报研讨会,总结使用情况,收集使用信息。

有了以上准备,并在多方收集本系列教材使用情况的基础上,召开了由系列教材主编及部分使用教师参加的研讨会,认真听取了来自各方面的意见及建议,制订了本次修订的原则及修订内容,主要有以下几个方面:

1. 在保持并增强原有的“三用”原则及“三凸现”特色的基础上,特别注重在学生的数学素质和文化素养的培养上下功夫。

高等数学不仅是一种工具,而且是一种思维模式,它包含着处理连续变量的基本理论和众多的科学思维方法,既是学习其他自然科学的重要基础,也是培养理性思维的理想载体;高等数学不仅是一种知识,而且是一种素养和文化。培养学生运用高等数学的观念去进行定量思维,切实解决工作中遇到的实际问题,是学习高等数学的目的之一。为达到上述目的,在第二版中,加强了数学与文化、数学与社会、数学与历史的联系和理解,从中不仅可使学生加深对数学概念与理论的理解,而且可从它们产生的历史背景、产生的过程及对社会发展的影响中吸取丰富的数学文化,提高文化素养。

2. 对第一版中存在的部分不够严谨的定义、定理进行了科学的、严密的、精雕细刻式的订正与改写。

随着高等学校办学层次的多样化,为适应不同层次的教学需要,针对不同层次出版了较多的教材。现行的很多高等数学教材中对较为艰深的定理进行了通俗化的改写,使之便于教学,便于学生理解,这无疑是一个进步。但部分教材中这种改写不够严谨,存在严重的缺陷:一是加强了条件,使其实用面变窄;二是放宽了条件,导致定理在某些情况下失效、不真。为避免上述问题,我们对照经典著作,对教材中的每一个定义、定理进行了逐字逐句的斟酌修改,消除了上述问题,使教材处在一个科学、严密的体系之中。

3. 面对考研内容的变化,增加完备了考研必备的内容,以满足部分学生考研的需要。

4. 进一步强化了数学语言的应用,更正了书中一些知识性和科学性错误。

5. 为了使本系列教材具有更强的针对性和更广泛的代表性,本次修订调整并增加了部分主编和作者,他们为本书的修订提出了许多宝贵的建议,并对修订付出了辛勤的、创造性的劳动。

通过本次修订,本系列教材将有一个质的飞跃。但教材建设是一项长期的工作,不可能一蹴而就,还需要我们进一步努力探索。我们相信,通过我们的不懈努力,本套教材必定会成为社会所公认的精品教材。

编委会

2009年4月21日

前言

Ban

1

步入新世纪,中国的高等教育出现了崭新的格局。一大批独立院校相继成立,加入到传统的高等本科教育大军之阵线,它们常以“三本”的面目出现,正在成为高等教育的一支重要力量。这批新军(独立院校三本的学子们)在传统的教师们率领下手抱着传统的教材以传统的方式苦战了好几个春秋,无论是独立院校的执教者还是勤奋的学子们都盼望能有适合于这批规模巨大的新型的独立院校的教材,这是势在必行,又是势在必得的时代所需。郑玉美教授在成功推出《21世纪高等职业教育规划教材·数学系列》后,吸纳了湖北大学知行学院、武汉科技大学中南分校、武汉科技大学城市学院、中国地质大学江城学院、江汉大学文理学院、中南民族大学工商学院、武汉生物工程学院、武汉工程大学、武汉工业职业技术学院以及武汉职业技术学院(本科部)等独立院校一批经验丰富的教育专家又编写了一套具有“三用三凸一独”的《21世纪独立院校本科规划教材·数学系列》,以满足独立院校教学之急需。这套用心力作的教材具有以下特点:

1. 以“三用”为原则

(1) 够用 删去传统本科教材中难而繁的内容,保留理、工、农、医、管各本科专业的最基本的内容,达到满足本科高度所必需的最低限度,够用即可。

(2) 管用 增添以往传统教材中没有的同时又是必需的知识内容,使教材适合三类本科各专业之需要,达到管用的效果。

(3) 会用 淡化传统本科教材偏重理论的倾向,删去理论性较强的内容,强调数学知识的应用,力求学以致用、学后会用,增强学生学习数学的信心与兴趣。

2. 以“三凸现”为特色

(1) 凸现数学与文化的联系 对重要的数学概念与理论,着重讲解它们的历史背景、产生的过程及影响,同时有机地结合一些有趣的数学故事及有影响力的数学家的逸事进行讲解,尽量让学生全面了解数学,达到提高学生综合素质的目的。

(2) 凸现数学现代化教学手段的应用 将数学软件的使用有机地融合进教材中,不盲目追求运算技巧,着力于培养学生解决实际问题的能力。

(3) 凸现数学的应用性 如把有重要应用的“微元法”贯穿在整个高等数学教材中。

3. 体现独立院校的“独”字

全套教材从知识的分量、难易程度、结构分布等方面要适合独立院校三本之需要。如高等数学以一元微积分、多元微积分为主线,而多元微积分浓缩为多元微分学与多元积分学两大块,将微分方程、无穷级数放在一元微积分学之后,这样使“三本”学生易于接受掌握。

为了使本套教材有更宽广的适应性,可供独立院校中的高等专科生选用,在保证科学性

和逻辑性的前提下,我们在编写时更注重培养学生良好的学习习惯,提高学生的综合素质。为此,我们力求全套教材语言准确、生动、简洁而清晰,思想有条有理、精练而富逻辑。在每章正文后附有本章小结,设计一个“本章知识结构导航图”,让读者对全章主要内容一目了然;归纳小结“本章主要内容及重点、难点”,让同学们心中有一个全章小“仓库”。此外,还安排了全章综合练习,供学有余力的学生去品尝一下课外的套餐。

本套教材共六种:《高等数学》(上)、《高等数学》(下)、《高等数学全程辅导与提高》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《概率论与数理统计学习指导》。

全套书的框架结构、统稿定稿由郑玉美教授及各册的主编负责,齐民友、任德麟、邓宗琦教授认真审阅了全部教材的原稿,提出了许多建设性意见,在此对三位资深教授表示衷心的感谢。

参加《高等数学》(下)编写的有尤正书、马军、宋翌、李霞、李圆媛、许虹、张汉萍、胡楚、吴跃、赵慧、彭虎峰等。全书由姚志扬、马军、尤正书统稿、定稿。

虽然各位编者十分努力,但由于我们的水平有限,成书时间又很仓促,本套教材可能还有不少缺点和错误,欢迎广大师生、读者批评指正。

编委会
2009年7月

目 录

Mulu

第 6 章 常微分方程和差分方程简介	(1)
6.1 常微分方程的基本概念	(1)
习题 6.1	(3)
6.2 一阶微分方程	(3)
6.2.1 可分离变量的微分方程	(3)
6.2.2 齐次方程	(4)
6.2.3 一阶线性微分方程	(7)
习题 6.2	(10)
6.3 高阶微分方程	(10)
6.3.1 可降阶的高阶微分方程	(10)
6.3.2 高阶线性微分方程解的结构	(13)
6.3.3 n 阶常系数线性齐次微分方程	(14)
6.3.4 高阶常系数非齐次线性微分方程	(17)
习题 6.3	(22)
6.4 差分方程简介	(23)
6.4.1 基本概念	(23)
6.4.2 常系数线性差分方程	(25)
6.4.3 一阶常系数线性差分方程	(26)
6.4.4 二阶常系数线性差分方程	(28)
习题 6.4	(33)
本章小结	(34)
综合练习六	(37)
第 7 章 无穷级数	(40)
7.1 常数项级数的概念与性质	(40)
7.1.1 常数项级数的概念	(40)
7.1.2 级数的性质	(42)
习题 7.1	(45)
7.2 正项级数与任意项级数	(46)
7.2.1 正项级数及其敛散判别法	(46)
7.2.2 任意项级数	(52)

习题 7.2	(54)
7.3 幂级数	(55)
7.3.1 函数项级数的概念	(55)
7.3.2 幂级数	(56)
7.3.3 幂级数的性质	(58)
习题 7.3	(60)
7.4 函数展开成幂级数	(61)
7.4.1 泰勒级数	(61)
7.4.2 函数展开成幂级数	(62)
习题 7.4	(65)
7.5 函数的幂级数展开式的应用	(66)
7.5.1 近似计算	(66)
7.5.2 微分方程的幂级数解法	(68)
习题 7.5	(68)
7.6* 傅里叶级数	(69)
7.6.1 三角级数 三角函数系的正交性	(69)
7.6.2 函数展开成傅里叶级数	(70)
7.6.3 正弦级数和余弦级数	(73)
习题 7.6	(76)
7.7* 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	(76)
习题 7.7	(78)
本章小结	(79)
综合练习七	(82)
第 8 章 向量代数与空间解析几何	(84)
8.1 向量及其运算	(84)
8.1.1 向量的概念	(84)
8.1.2 向量的线性运算	(85)
8.1.3 空间直角坐标系	(86)
8.1.4 向量坐标运算	(87)
8.1.5 向量的模、方向角、投影	(88)
习题 8.1	(90)
8.2 数量积、向量积、混合积	(91)
8.2.1 两向量的数量积	(91)
8.2.2 两向量的向量积	(94)
8.2.3 向量的混合积	(96)
习题 8.2	(97)
8.3 平面与直线的常用方程	(97)

8.3.1 平面	(98)
8.3.2 直线	(102)
习题 8.3	(106)
8.4 曲面方程的概念及常用方程	(107)
8.4.1 曲面方程的概念	(107)
8.4.2 旋转曲面	(108)
8.4.3 柱面	(110)
8.4.4 二次曲面	(111)
习题 8.4	(112)
8.5 空间曲线及其方程	(113)
8.5.1 空间曲线的一般方程	(113)
8.5.2 空间曲线的参数方程	(114)
8.5.3 空间曲线在坐标面上的投影	(115)
习题 8.5	(117)
本章小结	(117)
综合练习八	(120)
第 9 章 多元函数微分学	(123)
9.1 多元函数的极限与连续	(123)
9.1.1 平面点集和区域	(123)
9.1.2 多元函数的概念	(125)
9.1.3 多元函数的连续性	(127)
9.1.4 有界闭区域上连续函数的性质	(128)
习题 9.1	(129)
9.2 偏导数与全微分	(129)
9.2.1 偏导数	(129)
9.2.2 全微分	(133)
习题 9.2	(137)
9.3 链式求导法则	(138)
9.3.1 多元函数求导的链式法则	(138)
9.3.2 全微分形式不变性	(141)
9.3.3 坐标变换下的微分表达式	(142)
习题 9.3	(143)
9.4 隐函数的微分法及应用	(144)
9.4.1 一元函数的隐函数	(144)
9.4.2 二元函数的隐函数	(145)
9.4.3 偏导数的应用	(147)
习题 9.4	(152)

9.5 方向导数与梯度	(152)
9.5.1 方向导数	(152)
9.5.2 梯度	(155)
习题 9.5	(158)
9.6 二元函数的泰勒公式	(158)
习题 9.6	(161)
9.7 多元函数的极值	(161)
9.7.1 多元函数的极值及最大值、最小值	(161)
9.7.2 条件极值	(165)
9.7.3 最小二乘法	(166)
习题 9.7	(169)
本章小结	(169)
综合练习九	(174)
第 10 章 多元函数积分学	(177)
10.1 二重积分的概念与性质	(177)
10.1.1 二重积分的定义	(177)
10.1.2 二重积分的性质	(179)
习题 10.1	(180)
10.2 二重积分的计算	(181)
10.2.1 二重积分在直角坐标系下的计算	(181)
10.2.2 二重积分在极坐标系下的计算	(184)
10.2.3 二重积分的一般换元公式	(187)
习题 10.2	(189)
10.3 三重积分	(191)
10.3.1 三重积分的定义	(191)
10.3.2 三重积分的计算	(191)
习题 10.3	(196)
10.4 重积分的应用	(197)
10.4.1 曲面的面积	(197)
10.4.2 重心的坐标	(199)
10.4.3 转动惯量	(201)
10.4.4 引力	(202)
习题 10.4	(203)
10.5 曲线积分	(204)
10.5.1 对弧长的曲线积分	(204)
10.5.2 对坐标的曲线积分	(207)
10.5.3 两类曲线积分之间的关系	(211)

习题 10.5	(212)
10.6 格林公式及其应用	(214)
10.6.1 格林公式	(214)
10.6.2 平面上曲线积分与路径无关的条件	(217)
10.6.3 全微分方程	(220)
习题 10.6	(222)
10.7* 曲面积分	(223)
10.7.1 对面积的曲面积分	(223)
10.7.2 对坐标的曲面积分	(226)
习题 10.7	(230)
10.8* 高斯公式 通量与散度	(231)
10.8.1 高斯公式	(231)
10.8.2 通量与散度	(233)
习题 10.8	(234)
10.9* 斯托克斯公式 环流量与旋度	(234)
10.9.1 斯托克斯公式	(234)
10.9.2 环流量与旋度	(236)
习题 10.9	(237)
本章小结	(238)
综合练习十	(241)
习题参考答案	(244)
参考文献	(257)

注:带星号“*”的内容为选学内容。

常微分方程和差分方程简介

Zhang 6

“数学的有机统一,是这门科学固有的特点,因为它是一切自然科学的基础.为了实现这个目标,让新世纪给这门科学带来天才的大师和无数热忱的信徒吧.”

—— 希尔伯特

函数是反映客观事物内部联系的重要概念,如何寻求函数关系在理论上、实践上具有重要意义.实际上,在多数问题中不能直接找出所需要的函数关系,而只能获知所需的函数与其导数之间的关系式,这就是所谓的微分方程,根据它,用数学方法求出所需的函数,这就是所谓的解微分方程.本章主要介绍微分方程的一些基本概念及其常用的解法,同时也介绍与微分方程相近且在经济学中应用广泛的差分方程及其解法.

6.1 常微分方程的基本概念

我们通过几何中的切线问题与物理学中的镭衰变问题来说明微分方程的基本概念.

例 1 已知一曲线 $y = f(x)$ 上任一点处的切线斜率为 $3x^2$,且此曲线经过点 $(1, 3)$,求此曲线的方程.

解 根据导数的几何意义,得以下方程:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2. \quad (6-1)$$

此外,未知函数还应满足以下条件:

$$x = 1 \text{ 时, } y = 3. \quad (6-2)$$

要找出满足这两个等式的曲线,把(6-1)式两端积分,得

$$y = x^3 + C. \quad (6-3)$$

此处 C 是任意常数.

再用条件(6-2)代入得 $3 = 1 + C$,故 $C = 2$,即所求曲线方程为

$$y = x^3 + 2. \quad (6-4)$$

例 2 根据实验,放射性元素镭会不断放出射线而逐渐减少其质量,这种现象叫衰变,其衰变的速率与元素剩余的质量成正比,已知 $t = 0$ 时存镭的质量为 m_0 克,求任意时刻 t 的存镭量.

解 设任意时刻 t 的存镭量为 $m(t)$ 克,由衰变的速率与元素剩余的质量成正比,令正比例系数为 $a(a < 0)$,得以下方程:

$$\frac{dm}{dt} = am. \quad (6-5)$$

此外,函数 $m(t)$ 应满足以下条件:

$$m(0) = m_0. \quad (6-6)$$

先将(6-5)式变成

$$\frac{dm}{m} = a dt,$$

两边积分

$$\int \frac{dm}{m} = \int a dt,$$

解得

$$\ln m = at + C_1,$$

得

$$m = e^{at+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{at}.$$

令常数 $e^{C_1} = C$, 得

$$m = Ce^{at}, \quad (6-7)$$

由条件(6-6)得

$$m_0 = Ce^{a0} = C,$$

即任意时刻 t 的存镭量为

$$m(t) = m_0 e^{at} \text{ 克}. \quad (6-8)$$

关系式(6-1)和(6-5)中都含有未知函数的导数,它们都是微分方程,一般地,可归纳得到以下有关微分方程的重要概念:

定义 6.1 含有未知函数的导数或微分,同时也可能含有未知函数和自变量的方程叫微分方程.在微分方程里,如果未知函数只与一个自变量有关,此方程叫常微分方程.如果未知函数与两个以上的自变量有关,此方程就叫偏微分方程.

这里只介绍常微分方程,所以以后凡不特别说明,常微分方程就简称为微分方程或方程.

例如:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^2,$$

$$y''' + 3y'' + y = 0,$$

$$3x^2 dy - 2y dx = 0$$

都是常微分方程.

定义 6.2 在微分方程里,未知函数的导数或微分的最高阶数,叫做微分方程的阶.

上面的前三个方程分别是一阶、二阶和三阶的,最后一个方程是一阶的. n 阶微分方程的一般形式可写为

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (y \text{ 是未知函数, } x \text{ 是自变量}).$$

通过例1、例2可以看出,在建立一个微分方程的过程中,即找出自变量、未知函数、未知函数的导数之间的关系式时,往往会同时出现这些量之间需要满足的伴随条件,将这些条件称为初始条件,通常初始条件与微分方程放在一起用以下形式表达:

$$\begin{cases} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

由上述两例可以看到找满足方程的函数需要积分,进而出现任意常数,而初始条件就是

用以确定函数中所含任意常数的.

定义 6.3 若一个函数代入微分方程后,能使方程成恒等式,这样的函数就叫做微分方程的解,求微分方程解的过程叫做解微分方程.如果在微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,那么这样的解叫做微分方程的通解,也称通积分.

上述两例中的(6-3)和(6-7)都是通解.在通解中利用初始条件确定了任意常数的数值代入通解后所得到的解叫做微分方程的特解.上述两例中的(6-4)和(6-8)都是特解.

习题 6.1

1. 简述常微分方程的概念及其分类.
2. 简述常微分方程的解的类型及初始条件的作用.
3. $y'' - 3y' + 3y = 0$ 和 $y^2 - 3y + 3 = 0$ 哪个是微分方程,哪个不是?
4. 验证给出的函数是否为下列方程的解,如果是,它是通解还是特解?

(1) $y = 3\sin x - 4\cos x$, $y'' + y = 0$;

(2) $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$, C_1, C_2 为任意常数, $y'' + \omega^2 y = 0$.

6.2 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x, y, y') = 0.$$

此方程须根据方程的不同特点分别求解.

6.2.1 可分离变量的微分方程

形如
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (6-9)$$

的一阶微分方程叫可分离变量方程.

此方程的特点是方程右端为只含 x 的函数与只含 y 的函数的积.

形如
$$\varphi(x)dx = \psi(y)dy \quad (6-10)$$

的一阶微分方程叫变量已分离方程.

对变量已分离方程(6-10)的两边同时积分得

$$\int \varphi(x)dx = \int \psi(y)dy.$$

若 $\varphi(x)$ 的原函数是 $\Phi(x)$, $\psi(y)$ 的原函数是 $\Psi(y)$, 那么 $\Phi(x) = \Psi(y) + C$ 就是变量已分离方程(6-10)的通解,尽管这个通解的表达式可能是隐函数形式.

对可分离变量方程(6-9),只要 $g(y)$ 恒不为零,将方程两边同时除以 $g(y)$,再同时乘以 dx 得

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

这就是变量已分离方程,只需对两边同时积分即可.我们把这种求解可分离变量方程的方法叫分离变量法.