

现代学校制度研究成果

数学思想方法

The background of the cover features a soft-focus photograph of a field of bright yellow flowers. Two butterflies are visible: one in the upper right corner, appearing to fly away, and a larger one in the lower left foreground, facing right. The overall color palette is warm and natural, dominated by yellows and greens.

● 主编 张 甦 朱 英

上海科学普及出版社

现代学校制度研究成果

数学思想方法

● 主编 张 甦 朱 英

上海科学普及出版社

序 言

本书的出版,犹如一颗鲜活生动的石子,在广大教师无限的思索之间激荡起小学数学教学的层层涟漪。作为顾问的我,读来倍感亲切,谨以此序志贺。

数学是现代文化的重要组成部分,它以无比的魅力和光芒为人类渐次揭开了未知世界的神秘面纱。今天,数学的翅膀已掠过生活的各个领域,冲击着我们的思维方式,推动了社会文明的不断进步。

现代社会和生产力的高速发展,更加突显了现代数学的重要地位。发展数学能力,提高数学素养,已成为学生学习阶段最重要的任务之一,它将直接关系到学生今后的生活和工作。如果说经验是数学的基础、问题是数学的心脏、思考是数学的核心、发展是数学的目标,那么数学思想方法就是其中最具活力的灵魂和精髓。

“学会学习,学会思考”是当代中小学数学教学改革的一个重要理念,也是广大小学数学教师在进行教学改革中处于核心地位的一个重要课题。小学数学教学中渗透数学思想方法是使学生“学会学习,学会思考”的重要举措。这里存在一个“过河”和“搭桥”的关系,如果把学生“学会学习,学会思考”比作“过河”,那么使学生获得基本的数学思想方法则是“搭桥”。如果没有这座“桥”,那么只能“望河兴叹”了。

上海市嘉定区城中路小学《小学数学教学中渗透数学思想方法的实践与研究》是上海市教委 2005 年批准的研究课题。课题组老师为架这座“桥”,进行了三年多的探究,取得了丰硕的成果。他们结合小学数学教学实际,认真学习和研究了数学思想方法的理论和知识,分析了小学数学教材中渗透数学思想方法的着力

点,探索了渗透数学思想方法的途径、策略和方法,并以一个个具体的教学案例阐明了小学数学教学中渗透数学思想方法的可能性,总结了相当宝贵的经验。这些无疑为以“学会学习,学会思考”为核心的小学数学教学改革建立了一个新的视面,开辟了一条新的通道。

小学数学教学中渗透数学思想方法是容易被广大小学数学教师所忽视的。其原因,一是对数学思想方法在培养学生学习能力中的地位和作用认识不足,因而缺少渗透意识;二是缺少数学思想方法的基本理论和知识,因而不能自觉运用;三是可能认为数学思想方法应该在中学数学教学中培养,小学阶段只要学好基础知识和基本技能就可以了。由于这样的一些原因,使教师在实际教学中不能有意地挖掘教材所蕴含的数学思想方法,不能及时地准确地把握好可以渗透的契机,错过了一个个可以培养学生学习能力的良机,从而使数学课堂教学水平不能提高到应有的高度。

从课题组的研究成果可以看出,小学数学教学中渗透数学思想方法不仅是必要的,而且是可能的。从必要性来说,小学数学教学不仅要为中学数学学习打好扎实的基础知识和技能,而且要为中学数学学习“积累数学探究活动的经验”。这里的经验应该是很广泛的,当然也包括运用数学思想方法去探究新知和解决实际问题的经验。从这个意义上说,小学数学教学也要为中学数学学习打好数学思想方法的基础。从可能性来说,知识和方法本来就是一对“孪生的兄弟”。数学思想方法不是数学知识的外部之物,它是与数学知识的生成发展和解决问题的过程密切联系在一起的。小学生从一年级开始学数学,就伴随着用怎样的思想方法去学习数学。例如,用对应的思想方法去认识事物之间的相互联系,用数形结合的思想方法去抽象、概括基本的数学概念和数量关系,用转化思想方法去归纳基本的数学法则等。这些都隐含于整个小学数学教材中,贯穿于整个小学数学教学的全过程。小学生尽管年龄小,生活经验和数学知识不多,但通过数学知识的教

学,有意识的渗透,孕伏一些数学思想方法,小学生是完全可以体验和领悟的。一般来说,在低中年级,以探究数学知识为明线,潜移默化地渗透一些基本的数学思想方法;到高年级,在知识运用和解决数学问题的过程中,对已存在于学生头脑中,但处于朦胧状态的数学思想方法进行适当的提炼和概括,让学生学会应用。课题组的研究与实践表明,这些是完全能够实现的。如果能这样,就可以有效地促进学生数学思维的发展,提高学生的数学探究和解决实际问题的能力。

作为顾问,我深深为课题组老师对教育事业与小学数学教学改革的执着追求和钻研精神所感动。他们认真学习,勇于实践,善于反思,总结提高,使自己的教学理论水平和教学专业水平得到持续发展。本书的出版,凝聚了他们的智慧与心血,体现了他们的构思与探索。我相信,他们的研究成果定能给广大第一线的小学数学教师一些有益的启示。

陈锦生

2009年元月

(作者:原上海市安亭师范学校 高级讲师)

目 录

学 习 与 研 究

数学思想方法	3
1. 思想和数学思想	3
2. 方法和数学方法	4
3. 数学思想和数学方法	4
渗透数学思想方法的意义	6
1. 有利于教师深刻认识教材	6
2. 有利于学生完善数学认知结构,提高数学认知水平	7
3. 有利于转变学生的学习方式	9
小学数学中的基本数学思想方法	11
1. 符号思想方法	11
2. 集合思想方法	14
3. 对应思想方法	16
4. 数形结合思想方法	21
5. 化归思想方法	26
6. 分类思想方法	30
7. 归纳和类比思想方法	32
8. 方程和函数思想方法	35
9. 统计思想方法	38
10. 数学建模思想方法	39
11. 极限思想方法	42
数学思想方法的渗透策略	45
1. 数学思想方法在教学中渗透的特征	45

渗透的隐含性	45
渗透的跳跃性	46
渗透的实践性	46
渗透的阶段性	47
2. 挖掘教材中的数学思想方法	48
教师要提高渗透意识	48
了解数学思想方法的基本知识和理论	49
分析教材与挖掘数学思想方法相结合	50
3. 渗透数学思想方法的途径	58
在知识生成发展过程中渗透	58
在实验操作中渗透	60
在数学练习中渗透	62
在知识整理和提高中渗透	67

实 践 与 体 验

教学中渗透数学思想方法的探索	77
1. 从理性角度认识数学思想方法	77
2. 从教材角度分离数学思想方法	78
3. 从教学角度渗透数学思想方法	78
4. 从学法角度训练数学思想方法	81
在小学教学数学中渗透转化思想方法的尝试	84
1. 做好铺垫, 适时点明	84
2. 尝试运用, 加深理解	85
3. 持之以恒, 促使成熟	86
在“平均数”教学中渗透统计思想方法	88
三角形面积公式推导中渗透数学思想方法的尝试	92
列方程解应用题教学中渗透数学思想的体会	96
1. 方程思想方法	96
2. 数学建模思想方法	97
3. 数形结合思想方法	99

小学数学思想方法在几何知识教学中的渗透	101
1. 渗透转化思想方法,构建自主学习方式	101
2. 渗透集合思想方法,构建知识网络	102
3. 渗透函数思想方法,展示运动变化的观点	103
4. 渗透数形结合思想方法,提高学生灵活解题能力	104
5. 渗透极限思想方法,培养自主探究能力	105
小学数学教学中符号思想方法的渗透	107
1. 渗透符号思想方法的要求和内容	107
2. 在数的认识、运算和解决实际问题中培养数感, 渗透符号思想方法	108
3. 在用字母表示数中培养符号感, 渗透符号思想方法	109

案 例 与 分 析

把平均数置于统计的大背景下 ——《平均数(一)》教学案例与分析	115
让学生体验生活中的数学 ——《24 时记时法》教学案例与分析	125
笔算进位加法法则推导中的数形结合思想方法 ——《100 以内笔算进位加法》教学案例与分析	134
让学生体验知识复习与整理的方法 ——《数的整除的复习与整理》教学案例与分析	145
渗透数学思想方法要从一年级抓起 ——《加与减》教学案例与分析	156
让培养统计观念成为统计教学的主旋律 ——《统计》教学案例与分析	166
以形助数与以数助形 ——《各人眼中的 20》教学案例与分析	176
三角形面积公式推导中的数学思想方法 ——《三角形面积》教学案例与分析	188

在构建新知识中渗透数学思想方法	
——《比一比分数的大小》教学案例与分析	198
提高学生“会学”数学的能力	
——《三角形的认识》教学案例与分析	209
培养学生将实际问题转化为数学问题的能力	
——《平均数(二)》教学案例与分析	222
数学思想方法渗透一览表(部分内容)	234
后 记	249

学习与研究

教师在课堂里的生态,取决于教师对教育理念和专业知识的学习与研究,取决于教师的教学实践能力,决定着教学的执行力、学生的积极性、教学的有效性和目标的实现度。当教师的学习与研究成为一种习惯时,它就能转化为学生的一种习惯和能力,从而使学习与研究成为一项艺术,迸发出无穷的魅力和光芒。



数学思想方法

知识是人们在改造客观世界的实践中所获得的认识和经验的总和。在小学数学中,概念、性质、法则、公式和方法等都属于知识的范围,即数学基本知识,这些知识本身都有其特定的内容。但是这些知识反映了哪些共同的、带有本质性的东西,怎样才能完成任务(或问题)面前对知识和运用知识的途径进行选择,使得任务(或问题)的实现达到又好又快?实践和研究表明,这就需要数学思想方法。

1. 思想和数学思想

思想是客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果。它是从大量的思维活动中获得的产物,经过反复提炼和实践,如果一再被证明为正确,就可以反复应用到思维活动中,并产生新的结果。例如,哲学中一分为二的思想,文艺中普及与提高的思想等。如果思想的对象和结果是数量关系和空间形式,那么,就成为数学思想。数学思想是一种科学思想。

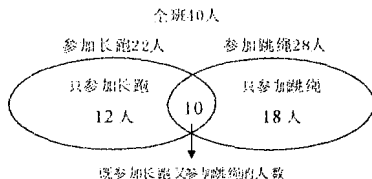
数学思想是指客观世界的数量关系和空间形式反映在人的意识中,经过思维活动而产生的本质认识。这种本质认识是以具体数学内容为载体,但又比具体内容更丰富、更本质、更深刻且普遍适用。例如,建立某一数学概念时,常常在大量的感性材料中把相同属性的材料放在一类,把不同属性的材料放在另一类,然后在相同属性的材料中揭示共同的本质,形成概念。又如,在学习平面图形时根据图形的不同特征,可以把图形分成曲线封闭图形和多边形,多边形中的四边形和三角形还可以按各自的标准再分类。这里都是按共同的特征进行分类,且这种分类是借助于具体数学内容进行的,反映了知识形成过程中的共同的本质特征,但又比具体数学内容更丰富、更深刻。这种分类还可运用在其他

情境中,因此更具普遍性和稳定性。这就是数学中分类思想的产生。

2. 方法和数学方法

方法是指人们为了达到某种目的而采取的途径、程序或手段中所包含的可操作性的规则和模式。例如,做思想工作时,先要进行调查研究,了解问题的症结,再倾听本人的想法,最后进行针对性的说服教育,这就是思想工作方法。看待某一件事情时,既要看到事情的正面,又要看到事情的反面,还要看到事情的变化发展趋势,从中发现解决问题的方法,即一分为二的方法,或称辩证的方法。又如做习题时,先复习旧知识,仔细审题,寻找解题的突破口,再考虑怎样列式、运算等,这就是做习题的一般顺序和方法,称为作业方法。方法一般比较具体,有一定的途径和程序,具有可操作性。

数学方法就是解决数学问题的具体方法,即解决数学问题时所采用的方式、途径和手段,也可以说是解决数学问题的策略。例如,所有的自然数,可以分为两类,能被2整除的数称为偶数,不能被2整除的数称为奇数,用的是分类方法。又如,一个班级40名学生参加运动会,每人至少参加一个项目。统计时发现参加长跑的有22人,参加跳绳的有28人。问既参加长跑又参加跳绳的有几人?用图表示:



$$\text{列式: } 22 + 28 - 40 = 10(\text{人})$$

这里用的是交集的方法。这些方法都是针对某一个具体问题而言,具有可操作性。

3. 数学思想和数学方法

数学思想与数学方法两者既有联系又有区别。首先,两者都

是形成数学知识的基础,都被反复实践证明是正确的,都能促进数学知识的深化和数学能力的转化,但两者又有区别。

(1)数学思想是宏观的,它更具普遍指导意义。数学方法是微观的,它是解决数学问题的直接的具体手段。

(2)两者的抽象概括程度不同,表现为互为表里的关系。一方面,数学方法受数学思想支配,是数学思想在数学思维活动中的体现,表现为外显性和实践性,在解决问题中常常呈现策略性。另一方面,数学思想是数学方法的结晶和升华,表现为内隐性和理论性,在解决问题中常常呈现方向性。

一般说来,强调思想时称为数学思想,强调操作时称为数学方法。例如,平行四边形面积是通过剪拼转化成已学过的长方形求得,这时,我们就说运用“转化方法”,这里的转化有很强的实践性和操作性。但在评价这种转化方法的价值时,我们又发现“转化方法”不仅可以用在平行四边形面积公式推导上,而且可以推广到三角形、梯形、圆的面积公式推导上。而且,在计算中,乘法可以转化加法,除数是小数的小数除法可以转化成除数是整数的小数除法等,于是转化方法就具有思想价值了,它更深刻,更本质,更具普遍性,因此称为转化思想。由此可见,数学思想和数学方法不能截然分开,它们更多地反映在联系方面,其本质是一致的。如常用的分类思想与归类方法,统计思想和统计方法,集合思想和交集方法等。我们常常把数学思想和数学方法合并为数学思想方法。

渗透数学思想方法的意义

《上海市中小学数学课程标准》在数学课程定位中指出：“学生通过数学学习，掌握数学的基础知识、基本技能和思想方法，学会有条理地思考和清晰地表达思考过程，并运用数学思想方法分析问题和解决问题，这对培养学生的抽象能力、推理能力、创造能力具有特殊作用，对培养学生认识世界的积极态度和思想方法、求真求实和锲而不舍的精神具有深远影响。”在课程总目标的第一条中又指出：培养学生“具有适应未来社会生活和继续学习所必须的数学基本知识和技能以及基本的数学思想方法。”由此可知，中小学数学教学有两大基本任务，一是获取重要的数学知识和技能，二是掌握基本的数学思想方法。明确掌握数学基本思想方法是中小学数学教学的基本任务之一，是适应未来社会生活和进一步发展，促进学生获取知识，提高分析问题和解决问题能力的重要举措。在阶段目标中，初中、高中都明确提出培养数学思想方法的要求，小学阶段虽然没有明确提出，但中小学数学是一个完整的整体，小学数学不仅要为初中、高中的数学学习打好知识的基础，而且也要为初中、高中的数学学习积累数学事实和数学探究活动经验。这里的经验应该是很广泛的，当然包括运用数学思想方法从现实背景中，通过一系列探究活动，抽象出数与量、四则运算与数量关系、空间图形及关系的经验。因此，在小学数学教学中，结合教学内容，有计划、有目的地孕伏、渗透数学思想方法，对小学生继续学好初中、高中的数学有着极其重要的作用，对教师、对学生都有十分重要的意义。

1. 有利于教师深刻认识教材

任何一册或一段教材的编写，都受一定的数学思想方法所支配。教材的前后联系是一个原则，更深层次的研究，涉及到概念

与例题的本质是什么,从怎样的材料出发,经过怎样的过程概括,最终要形成怎样的数学结构,组成怎样的体系,让学生形成怎样的数学思想方法,所有这些问题,教材上都不可能完整的说明。但是,这些问题中的数学思想方法却像灵魂一样支配着整个教材,使教材组成整体,而不是孤立的、毫无联系的知识点。

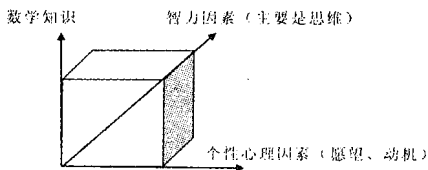
例如,对应思想方法是两个集合元素之间的联系的一种基本的数学思想方法。小学生学习数学是从“对应”开始的。一年级学习10以内数的认识时,让学生认识教室里的物体,课桌与椅子对应,学生与椅子对应,练习本与铅笔对应,投影机与屏幕对应等,这些都是物与物之间的对应,这些对应物都是有关联的。进而让学生数物体,得出这些物体都与自然数列中的自然数一一对应,于是抽象出自然数来。这就是教材中蕴含的对应思想方法。接着,教材在“听着数”中,要求学生边听边数,边画记号,并把结果记下来。声音(统计对象)——画记号(统计过程中的一环)——记下来(统计结果),反映了统计中资料整理的初始阶段的一些要求和方法。再后,在玩积木中,要求学生将积木先按形状分类,并进行统计,再填入表格中,这样统计又前进了一步,实际上已初步进行了统计表的教学。这就是教材中蕴含的统计思想方法。

由此可知,小学数学教材尽管内容简单,但实际上包括两条主线:一是显性知识,如前面要求学生认识10以内的各数及大小、顺序等,是写在教材上的明线;二是隐含于显性知识中的数学思想方法,是一条暗线。前者是教材写什么,学生学什么,后者是明确为什么这样写,应该怎样学;前者是看得见的,后者是需要挖掘的。只有理解后者,才能在教学中站在一定的高度认识教材体系和编写意图。

2. 有利于学生完善数学认知结构,提高数学认知水平

数学认知水平是学生数学能力强弱的主要标志。数学认知水平取决于数学认知结构完善的程度。数学认知结构就是学生头脑里的数学知识按照学生自身理解的深度与广度,结合个体感

觉、知觉、记忆、思维及联想等认知过程(主要是思维)组成的一个具有内部规律的整体结构。一般包括数学知识结构和这些知识在头脑里的组织形式。如有关分数的意义和四则运算的认知结构,一方面要反映分数概念、四则运算意义及运算法则等知识内容;另一方面要体现学生头脑里对这些知识的接收、编码、储存、提取等一系列活动的组织方式。这种组织方式取决于与认知过程直接有关的智力因素,如观察、记忆、想象、思维等,以及与认知过程的起动、维持、调节有关的非智力因素,如愿望、动机等。由此可知,影响数学认知结构一般包括三方面因素。如图:



现代数学教育心理研究认为,除上述三方面因素之外,数学思想方法和科学的思维方法一样,同样起着决定性的作用。因为在学生数学认知结构的优化和发展过程中,都是依靠原有的数学认知结构对新的知识不断同化和顺应。同化是把新的数学学习内容纳入到自己原有的认知结构中去,顺应是当新的学习内容不能有效地纳入原有认知结构中去时,就要对原有的认知结构进行改造,使之适应新的学习内容。但知识的同化和顺应都要对新的数学材料进行加工改造,使之与原有的认知结构相适应。一般来说,在对数学知识加工和改造的过程中,数学知识不具备思维特点和能动性,正像材料自己不能变成产品一样;而心理成分不能指导加工过程,它只给主体提供愿望和动机,也不能完成加工过程,就像人们只有生产愿望和生产工具,而没有设计思想和技术,照样不能生产产品。于是,数学思想方法就担负起“指导加工”的重任。它不仅提供思想策略和思维方向,而且提供实施目标的具体手段和方法。教育研究与实践证明,这种加工改造都必须在数学思想方法指导下进行,因此,影响数学认知结构的因素中应加