21世纪高等院校教材

高等数学

（上 册）

常迎香 主编

栗永安 李 秦 刘海忠 张仲荣 刘 旭 编

俞建宁 主审

科学出版社

www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

高等数学

（上册）

常迎香　主　编

栗永安　李　秦　刘海忠　张仲荣　刘　旭　编

俞建宁　主　审

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是在高等教育大众化的新形势下，根据编者多年的教学实践，并结合工科院校《高等数学课程教学基本要求》而编写的. 全书分上、下两册. 上册内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学及微分方程，下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数. 每节之后配有习题，每章后配有自测题，书后附有部分习题答案与提示、几种常用的曲线. 全书力求结构严谨，逻辑清晰，通俗易懂.

本书可供高等院校工科各专业学生使用，也可供广大教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/常迎香主编；栗永安等编. —北京：科学出版社，2009
21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-025162-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①常…②栗… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 134874 号

责任编辑：赵 靖 李鹏奇 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 8 月第一次印刷 印张：14 3/4
印数：1—4 000 字数：282 000

定价：42.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

随着我国高等学校办学规模逐年扩大，高等教育已从精英教育逐渐走向了大众化教育，因材施教就成了当前教学改革和课程建设的重要内容之一. 因材施教首先是教学手段的改革和教材的更新，而根据学生自身情况和教学目的实行分层次教学是目前大众化教育下因材施教所采用的一种教学手段. 编写适应分层次教学的教材是完成分层次教学必不可少的工具. 本书正是针对这种情况为适应分层次教学而编写的.

在这一指导思想下，本书遵循的编写原则是：在教学内容的深度和广度方面达到工科院校《高等数学课程教学基本要求》的前提下，依据学生的实际情况，强调对学生应用能力的培养，力求做到由浅入深，循序渐进，强化基本概念与基本理论，淡化某些计算技巧与抽象理论的证明，配备精选的难度适中、适量的习题，使教师易用、易教，学生易学、易懂.

本书的编写具有以下特点：

(1) 本书是为我国工科院校本科编写的，考虑到使用本书学生的特点，在注重对数学思想方法和应用能力的培养训练的同时，对于验算技巧和逻辑推理的要求相对降低了一些. 例如，在函数部分减少了学生比较熟悉的集合的有关概念，增加了学生不太了解的极坐标系及极坐标系下函数表示法；在极限的定义部分，先给出直观的通俗定义，再给出严格的数学定义；在定积分应用中，将旋转体体积作为平行截面面积已知的立体的特例；微分方程一章，先介绍有关微分方程的解法，再介绍微分方程的建立和解法；在空间解析几何与向量代数中增加了曲面围成的立体图形的描绘；在多元函数微分学中，给出多元复合函数的结构图，便于学生计算多元函数的偏导数.

(2) 突出平台思想，重直观性和实用性. 对于有些证明较难、较烦的定理，或不加证明直接作为平台应用，或用直观方法归纳得出，使概念讲述平易直观、逻辑推理展开迅速简明、教学方法通用有力，力求让学生学得容易一些、生动一些、实用一些.

本书分为上、下两册. 上册内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学及微分方程. 下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分

学、多元函数积分学、无穷级数. 每节之后配有习题，每章后配有自测题，书后附有部分习题答案与提示、几种常用的曲线.

本书由常迎香教授制定编写框架；第 1、2、5 章由李秦副教授完成；第 3、4 章由张仲荣副教授完成；第 6、7、12 章由栗永安副教授完成；第 8 章由刘旭副教授完成；第 9～11 章由刘海忠副教授完成；全书由常迎香教授统稿. 本书上册由俞建宁教授主审，下册由褚衍东教授主审.

由于作者水平有限，加上时间仓促，书中难免有不妥之处，疏漏也在所难免，希望专家、同行及读者批评指正.

编　者

2009 年 5 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

现在，我们进入高等数学的学习和研究. 在中学阶段，我们已经学过了诸如几何、代数、三角等数学知识. 那时研究的问题主要是一些固定不变的形和数，如三角形的全等、圆锥体的体积、三角形中边长和夹角的关系、一些方程和方程组的求解，等等. 这种研究不变的形和数的科学属于初等数学. 无论从实用观点还是从理论观点来看，变动的量有着更广泛、更重要的意义. 高等数学就是研究变量变化规律的一门科学，以函数作为主要的研究对象，以极限方法作为主要的研究方法，继承了中学数学的结果与方法，是中学数学中对函数研究的继续与发展. 从方法论的观点来看，这是高等数学区别于初等数学的一个显著标志. 本章首先复习和加深函数的有关知识，然后介绍函数的极限和连续性等概念及其性质.

1.1　函　　数

1.1.1　集合

集合(或简称集)是指具有特定性质的一些事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素. 本书以大写字母表示集合，小写字母表示集合中的元素. 事物 a 是集合 M 的元素，就称 a 属于 M，记作 $a\in M$；事物 a 不是集合 M 的元素，就称 a 不属于 M，记作 $a\notin M$.

通常集合有两种表示方法：一种是列举法，即把集合的全体元素一一列举出来. 如果集合 M 是由事物 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的，那么集合 M 就可以表示为

$$M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

另一种是描述法，即若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 M 就可表示为

$$M=\{x\mid x\text{具备性质}P\}.$$

一些常用的数集通常用特定的字母表示：

N 表示自然数集；**R** 表示实数集；**Z** 表示整数集；**Q** 表示有理数集；**C** 表示全体复数的集合.

有时还在表示数集的字母的右上角标上“+”、“−”、“*”等记号来表示其特定的子集. 以实数集 **R** 为例，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合，$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数的集合，$\mathbf{R}^*$ 表示全体非零实数的集合. 以此可得出其他集合的类似记号和含义.

除非特别说明,以后提到的数都是实数,集合都是实数集.

区间是用得较多的一类数集.设 a 与 b 都是实数,且 $a<b$,则不同类型的区间定义如下:

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\},\quad [a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\},$$
$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},\quad (a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}.$$

以上所定义的这些区间都称为有限区间,数 $b-a$ 称为这些区间的长度.此外还有无限区间

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\},\quad [a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\},$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid |x|<+\infty\}.$$

邻域是高等数学中经常用到的概念,设 a 与 δ 为两实数,且 $\delta>0$,则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

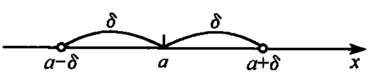

图 1.1

其中点 a 称为邻域 $U(a,\delta)$ 的中心,δ 称为邻域 $U(a,\delta)$ 的半径.在数轴上邻域 $U(a,\delta)$ 如图 1.1 所示.

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心 δ 邻域,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域,相应的 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.这里只强调邻域的存在,不关注 δ 的取值大小.同样的,有点 a 的去心邻域,记作 $\mathring{U}(a)$.

1.1.2　映射

定义 1　设 X,Y 是两个非空集合,如果按照某种对应关系 f,使得对 X 中任何一个元素 x,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作

$$f:X\to Y,$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的像,并记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$;元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的一个原像;集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f,即 $D_f=X$;X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记为 R_f,或 $f(X)$,即

$$R_f=f(X)=\{f(x) \mid x\in X\}.$$

注　(1) 映射是由集合 X,集合 Y 和对应关系 f 三者构成的一个整体.满足:①定义域的遍历性.X 中的每个元素 x 在映射的值域中都有对应对象.②对应的唯一性.定义域中的一个元素只能与映射值域中的一个元素对应.

(2) 对每个 $y\in R_f$,元素 y 的原像不一定是唯一的;映射 f 的值域 R_f 是 Y 的

一个子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 $R_f = Y$.

例 1 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$，对每个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)=\sin x$.

f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，值域 $R_f=[-1,1]$.

例 2 设 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，对每个 $x\in\mathbf{N}$，$f(x)=2x$.

f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\mathbf{N}$，值域 $R_f=\{2x \mid x\in\mathbf{N}\}$，$R_f$ 是 $\mathbf{N}$ 的一个真子集.

例 3 设 $X=\mathbf{N}^*$，$Y=\{0,1\}$，$f:X\to Y$，对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应，满足对应关系"x 除以 2 得的余数".

显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=X$，值域 $R_f=Y$. 对于 R_f 中的元素 y，它的原像不是唯一的.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的**映射**或**满射**；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的**单射**；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为**一一映射(或双射)**.

上述三例各是什么映射？读者结合图 1.2 不难确定.

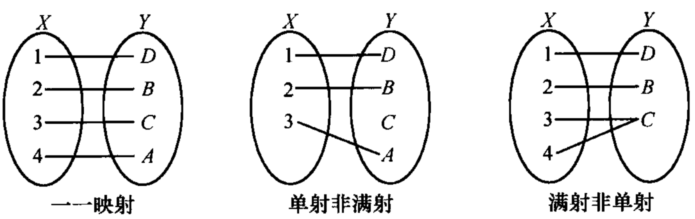

图 1.2

逆映射与复合映射 设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$，满足 $f(x)=y$. 于是，也可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g:R_f\to X,$$

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，且 x 满足 $f(x)=y$. 映射 g 称为 f 的**逆映射**，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$.

按上述定义，只有单射才存在逆映射. 上述三例中哪个映射存在逆映射？

设有两个映射

$$g:X\to Y_1,\quad f:Y_2\to Z,$$

其中 $Y_1\subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以确定一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映射成 $f(g(x))\in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的**复合映射**，记作 $f\circ g$，即

$$f \circ g: X \to Z,$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)], \quad x \in X.$$

由上述定义，映射 g 和 f 构成复合映射是有条件的，g 的值域 R_g 必须包含于 f 的定义域 D_f 内，即 $R_g \subset D_f$；否则，不能构成复合映射，并且映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义；即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义，复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

1.1.3　函数

关于函数概念，中学已有比较仔细的学习，这里我们做简要的复习，并作一些补充.

定义 2　设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为
$$y = f(x), \quad x \in D,$$
其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$.

与自变量 x 对应的因变量 y 的值，称为函数 f 在点 x 处的函数值，记作 $f(x)$. 当 x 取遍定义域 D 的所有数值时，对应的全体函数值所组成的集合
$$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$
称为函数的值域.

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内，因此构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的；否则，就是不同的.

1. 函数表示

函数对应关系的确定，即对定义域 D 中的任意 x 能用某种方法规定函数对应的值. 因此函数的表示法常用的有：解析法（公式法），图形法，表格法. 下面重点介绍函数的解析法表示.

函数 y 可以用含自变量 x 的解析式表示，如 $y = \ln x$，$y = 2\sin x + x$ 等，形如 $y = f(x)$ 的函数称为**显函数**.

一个二元方程 $F(x, y) = 0$ 也蕴含着两个变量 x, y 之间的某种关系，因而也可能确定 y 是 x 的函数关系. 例如，二元方程 $3x + 2y - 1 = 0$，给 x 一个确定值，相应就可确定 y 的值（如 $x = 0, y = \frac{1}{2}$；$x = 1, y = -1$；…），根据函数的定义，y 是 x 的函数. 一般地，如果在方程 $F(x, y) = 0$ 中，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这个方程的 y 值存在，那么就称方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个**隐函数** $y = f(x)$.

对一般的方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

如果把对应于同一个 t 值的 x, y 看作是对应的，就确定 y 与 x 的函数关系 $y = f(x)$，称此函数为由**参数方程所确定的函数**. 例如，圆的参数方程为 $\begin{cases} x=a+r\cos\theta, \\ y=b+r\sin\theta, \end{cases}$ $0\leqslant\theta<2\pi$，椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \end{cases}$ $0\leqslant\theta<2\pi$.

有的函数在整个定义域上不是用一个式子表示，而是在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示，这类函数通常称为**分段函数**. 这种分段表示的函数在整个定义域上是一个函数，而不是几个函数. 下面举几个分段函数的例子.

例 4

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

这个函数的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=(0, +\infty)$，图形如图 1.3 所示.

例 5 函数

$$y = \mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=\{-1, 0, 1\}$，图形如图 1.4 所示. 对于任何实数 x，下列关系成立：

$$y = \mathrm{sgn}x \cdot |x|.$$

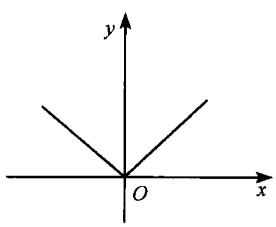

图 1.3

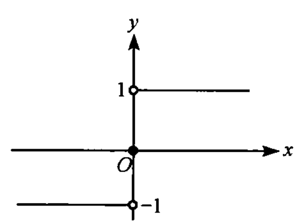

图 1.4

例 6 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的取整函数，记作 $[x]$. 如 $\left[\frac{1}{2}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[-1]=-1$，$[-\pi]=-4$. 函数

$$f(x) = [x]$$

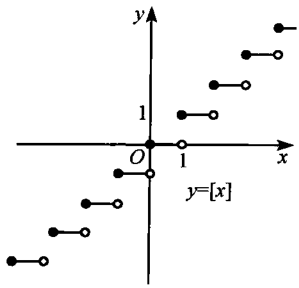

图 1.5

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 R_f 为全体整数 $\mathbf{Z}$，图形如图 1.5 所示. 这个图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1.

例 7　设

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

求函数 $f(x+3)$ 的定义域 D_f.

解　因为 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 所以

$$f(x+3)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x+3\leqslant 1,\\ -2, & 1<x+3\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}1, & -3\leqslant x\leqslant -2,\\ -2, & -2<x\leqslant -1,\end{cases}$$

故 D_f：$[-3,-1]$.

极坐标系及在极坐标系下的极坐标方程

平面上的点，除了用直角坐标表示它的位置外，还用其他的方法表示位置. 例如，用“距离和方向”表示点的位置的**极坐标法**.

在平面上取一点 O，从 O 引一条水平射线 Ox，并且取定长度单位及计算角度的正方向(逆时针方向为正，顺时针方向为负). 这样，在平面上就建立了一个极坐标系. O 称为极点，射线 Ox 称为极轴.

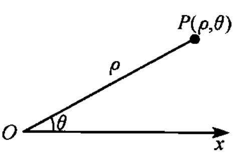

图 1.6

在极坐标系里，平面上任何一点 P 的位置，可以用它到极点的距离 ρ 及以 Ox 为始边，射线 OP 为终边所成的有向角 θ 来表示(图 1.6)，ρ 称为点 P 的极径，θ 称为点 P 的极角. 有序数对 (ρ,θ) 称为点 P 的极坐标. ρ,θ 可以取一切实数，当 $\rho<0$ 时，规定它的对应点 P 的位置在 θ 角终边的反向延长线上，且 $|OP|=|\rho|$. 因此，一个点的极坐标为 (ρ,θ)，那么 $(\rho,\theta+2n\pi)$ $(n\in\mathbf{Z})$ 都可以作为它的极坐标.

在极坐标系里，限定 $\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，这样的范围称为极径与极角的主值范围. 平面上的点(除去极点)在主值范围与极坐标 (ρ,θ) $(\rho\neq 0)$ 建立一一对应关系.

规定：极点的极坐标是 $\rho=0$，θ 可取任意值.

极坐标系与直角坐标系虽是两种不同的坐标系，但它们都是被用来表示平面上点的位置的. 因此，在同一点的极坐标和直角坐标之间存在联系.

在已经建立了直角坐标系的平面上，再建立如下的极坐标系，以原点为极点，以 x 正半轴为极轴，并且极坐标系的长度单位，计算角度的正向都与直角坐标系一致. 这样，平面上任何一点 P 就有两种坐标——直角坐标与极坐标. 设 P 的直角坐标为 (x,y)，极坐标为 (ρ,θ)，如图 1.7 所示，则有 x,y 与 ρ,θ 的关系式