



正算子理论

杨长森 左红亮 李海英 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社



正算子理论

杨长森 左红亮 李海英 著

本书得到下列基金资助：

河南师范大学专著基金
河南省基础数学重点学科基金
河南省高校青年骨干教师资助计划
教育部科学技术研究重点项目基金
国家天元青年科学基金



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

正算子理论/杨长森,左红亮,李海英著. —武汉:武汉大学出版社,
2009. 8

现代数学专著系列

ISBN 978-7-307-07205-3

I. 正… II. ①杨… ②左… ③李… III. 正规算子 IV. 0177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 133371 号

责任编辑:顾素萍

责任校对:黄添生

版式设计:詹锦玲

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:720×1000 1/16 印张:13 字数:215 千字 插页:1

版次:2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-07205-3/0 · 406 定价:26.00 元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售
部门联系调换。

内 容 提 要

Hilbert 空间上正算子理论是线性代数中正定矩阵理论向无穷维情形的推广. 本书介绍利用算子极分解理论研究 Hilbert 空间上正算子的若干性质, 如不等式的保序性、算子函数的单调性和若干新的算子类等方面的知识和方法. 全书共分五章: 第一章介绍部分等距和极分解等预备知识. 第二章介绍 L-H 不等式、Furuta 不等式及 Furuta 型不等式, 并研究具有负幂的 Furuta 型不等式的推广. 第三章介绍 L-H 不等式和 Furuta 不等式条件的最优性, 并研究 Faruta 型算子单调函数的最佳单调区间. 第四章介绍 Furuta 不等式在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、Kantorovich 型不等式等中的应用, 并研究若干算子保序不等式. 第五章利用 Furuta 不等式和算子单调函数研究 $F(p, r, q)$, $wF(p, r, q)$, $A(s, t)$ 等算子类, 指出这些类与其中参数的依赖性、它的谱性质和其中算子幂的性质等. 本书可作为基础数学专业泛函分析方向的研究生教材或参考书, 也可供有关专业的教师和科研工作者参考.

来重述。译者感谢王洪强曾寄来此书。樊振江在 T. Furuta 大师辞世前本译者就关注到此部经典著作大有深意，希望用中文将此书翻译出来，中译版译者经过本章一筹出长编由李大典先生译成英文，感谢已故梁鼎一，樊首译本译著于市，樊志祥秀山执事，樊鼎西主译译著于晓春道。

前　　言

译　　者

正定矩阵在矩阵理论中有着重要的地位，正定矩阵向无穷维空间的推广就产生了正算子，像正定矩阵一样正算子有着极其丰富的性质。早在 1934 年，Löwner-Heinz 证明了如下著名的不等式：若 $A \geq B \geq 0$ ，则对任意实数 $\alpha \in [0, 1]$ ，有 $A^\alpha \geq B^\alpha$ 。到 1985 年，Chan-Kwong 在 [12] 中猜想 $A \geq B \geq 0$ 蕴含 $(AB^2A)^{\frac{1}{2}} \leq A^2$ 。T. Furuta 在 1987 年证明了这个猜想是正确的，得到了一个比 Löwner-Heinz 不等式更广泛的不等式，后来称之为 Furuta 不等式。该不等式出现后，引起许多学者的关注和研究。例如 Furuta 等先后给出了该不等式的简化证明，以及其所诱导的算子单调函数和它在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、Kantorovich 型不等式、算子类等中的应用；K. Tanahashi 等研究了该不等式条件的最优性，并研究了具有负指数的 Furuta 型不等式。本书介绍这方面的基本理论和最近作者获得的一些结果，鉴于篇幅有限，有些结果没有列出。

全书共分五章。第一章介绍部分等距和极分解等预备知识。第二章介绍 L-H 不等式、Furuta 不等式及 Furuta 型不等式，并研究具有负幂的 Furuta 型不等式的推广。第三章介绍 L-H 不等式和 Furuta 不等式条件的最优性，并研究 Furuta 型算子单调函数的最佳单调区间。第四章介绍 Furuta 不等式在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、Kantorovich 型不等式等中的应用，并研究若干算子保序不等式。第五章利用 Furuta 不等式和算子单调函数来研究 $F(p, r, q)$, $wF(p, r, q)$, $A(s, t)$ 等算子类，指出这些类与其中参数的依赖性、它的谱性质和其中算子幂的性质等。为了方便读者，在附录中给出了常用的名词索引。

本书主要内容是由著者论文整理而成的，著者感谢导师李国平院士，是他引导著者对 Hilbert 空间上算子理论产生了浓厚的兴趣；感谢日

本东京科技大学的 T. Furuta 教授，他给著者提供了许多资料，多年来他给予我们许多关怀和培养；最后感谢武汉大学刘培德教授的关心、鼓励与帮助，并推荐该书在武汉大学出版社出版。在本书的写作过程中，还得到许多研究生的帮助，在此也表示感谢。由于著者水平有限，难免有错误和不当之处，欢迎读者批评指正！

著者

目 录

前言	i
第一章 预备知识	1
1.1 正常算子与自伴算子的简单性质	1
1.2 投影算子与正算子的平方根	5
1.3 部分等距与极分解	12
1.4 降幂引理及比较引理	17
1.5 几种特殊的算子类	19
第二章 几个重要的算子不等式	23
2.1 L-H 不等式及其等价命题	23
2.2 Furuta 不等式	28
2.3 具有负幂指数的 Furuta 型不等式	32
2.4 关于负幂的 Furuta 型不等式的推广	38
2.5 Kantorovich 不等式和 Hölder-McCarthy 不等式	47
第三章 Furuta 型不等式条件的最优性	55
3.1 L-H 不等式及 Furuta 不等式的最优性	55
3.2 Furuta 型算子单调函数的最佳单调区间	63
3.3 具有负指数 Furuta 型不等式外部指数的最优性	74
第四章 Furuta 不等式与 Furuta 型不等式的应用	77
4.1 Ando 定理	77
4.2 Furuta 不等式应用于 Ando 定理和算子的广义相对熵	81
4.3 Furuta 不等式应用于算子的保序不等式	89
4.4 Furuta 不等式应用于算子方程	100

4.5 与广义 Furuta 不等式相应的算子单调函数	105
4.6 Furuta 不等式在 Kantorovich 型不等式中的应用	110
4.7 Kantorovich 型不等式应用于算子混序的一个特征	116
第五章 Furuta 不等式应用于若干算子类	123
5.1 几个算子单调函数	123
5.2 $wF(p, r, q)$ 算子类	129
5.3 $F(p, r, q), wF(p, r, q)$ 算子类与其中参数的依赖性	152
5.4 $A(s, t)$ 类算子的谱性质	159
5.5 $wF(p, r, q)$ 类算子的谱性质	164
5.6 p - 亚正常算子及对数 - 亚正常算子的幂	171
索引	188
参考文献	191

10	类于算子的谱性质	3.1
23	左零不于算子要重个几	章二简
23	遇命伦举其又左零不 I-H	3.2
28	左零不 Furuta	3.3
28	左零不壁 Furuta 负数谱负算具	3.8
28	左零的左零不壁 Furuta 负数谱负算具	3.4
28	左零不壁 H鈴木方等不等式	3.5
33	左零是的半数左零不壁 Furuta	章三简
36	左半量的左零不壁 Furuta 又左零不 I-H	3.8
36	间区断单左零的数谱单于算壁 Furuta	3.3
47	左零量而数谱不壁左零不壁 Furuta 数谱负算具	3.8
57	左零的左零不壁 Furuta 已左零不 Furuta	章四简
77	左零的左零不壁 Furuta 已左零不 Furuta	4.4
121	数数脉又左零半算脉半 obuk 于左零不 Furuta	3.4
280	左零不零数半算半数左零不 Furuta	3.4
305	左零于算于数左零不 Furuta	4.4

卷 1.1.1 $\|x\| = (x, x) = \|y\|^2$ 由上面一节 $\|x\| \geq |x|$ 且很直观

$$\|x\| = \left\| \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \|x\|$$

第一章 预备知识

若 $x, y \in H$, 则 $(x+y)^2 = \|x+y\|^2$, 且 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. 由 $x^2 = \|x\|^2$ 及 $y^2 = \|y\|^2$, 得 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2$. 令 $\alpha = \|x\|^2 + \|y\|^2$, 则 $\|x+y\|^2 = \alpha + 2(x, y)$. 由 $\|x\| = \sqrt{\alpha}$, $\|y\| = \sqrt{\alpha}$, 得 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y)$. 令 $\beta = \frac{2(x, y)}{\|x\| \|y\|}$, 则 $\beta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$.

1.1 正常算子与自伴算子的简单性质

设 H 是 Hilbert 空间, $L(H)$ 是 H 上有界线性算子的全体构成的 Banach 代数. 以 $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1\}$ 为 $T \in L(H)$ 的范数; 以 Φ 代表 H 所取的标量域, 即实数域与复数域; 以 $R(T), N(T)$ 分别代表 T 的值空间与零空间.

定义 1 设 $T \in L(H)$. 若存在 $B \in L(H)$ 使得

$$(Tx, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H,$$

则称 B 是 T 的共轭算子, 记为 T^* .

如果 $T^*T = TT^*$, 则称 T 是 正常算子 或 正规算子. 特别地, 若 $T = T^*$, 则称 T 为 自伴算子.

为了说明对任意的有界线性算子 T , 其共轭算子都是存在的, 我们要从 Riesz 表现定理谈起.

定理 1.1.1 (Riesz 表现定理) 设 H 是 Hilbert 空间.

(1) 对于每个 $y \in H$, $f(x) = (x, y)$ 是 H 上的连续线性泛函, 且

$$\|f\| = \|y\|.$$

(2) 若 f 是 H 上的连续线性泛函, 则存在 $y \in H$, 使得

$$f(x) = (x, y), \quad \forall x \in H,$$

此时称 y 为 f 的表现.

证 (1) 显见, f 是线性泛函且

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\| = \|(x, y)\|.$$

故 f 有界且 $\|f\| \leq \|y\|$. 另一方面, 由 $f(y) = (y, y) = \|y\|^2$, 得

$$\|f\| \geq \left\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| = \|y\|.$$

从而必有 $\|f\| = \|y\|$.

(2) 如果 f 是 H 上的连续线性泛函, 令 $E = N(f)$, 则 E 闭. 若 $E = H$, 则 $f = 0$, 此时取 $y = 0$ 即可. 如果 $E \neq H$, $H = E \oplus E^\perp$, 先取 $z \in E^\perp$ 且 $\|z\| = 1$, 则 $f(z) \neq 0$. 令 $y = \overline{f(z)}z$, 对每个 $x \in H$, 显见 $x - \frac{f(x)}{f(z)}z \in E$, 故

$$0 = \left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z, y \right) = (x, y) - \frac{f(x)}{f(z)}(z, \overline{f(z)}z) = (x, y) - f(x),$$

即 $\forall x \in H$, $f(x) = (x, y)$, 且由 (1) 知 $\|f\| = \|y\|$.

定义 2 若

$$S(\alpha f_1 + \beta f_2) = \overline{\alpha}S(f_1) + \overline{\beta}S(f_2), \quad \forall f_1, f_2 \in H^*, \alpha, \beta \in \Phi,$$

则称映射 $S : H^* \rightarrow H$ 是共轭线性的. 若 $T : H^* \rightarrow H$ ($Tf = y$), 其中 y 是 f 的表现, 由 Riesz 表现定理可知, T 是共轭线性满射, 且 $\|Tf\| = \|f\|$, $\forall f \in H^*$.

定理 1.1.2 设 H 为 Hilbert 空间, 则对每个 $A \in L(H)$, 存在唯一的 $B \in L(H)$, 使得

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H.$$

证 对任意的 $x, y \in H$, 令 $\varphi(x, y) = (x, Ay)$. 固定 $x \in H$, 令

$$f_x(y) = \overline{\varphi(x, y)}.$$

下证 f_x 是 H 上的有界线性泛函. 事实上, 对任意的 $z, y \in H$, $\alpha, \beta \in \Phi$,

$$\begin{aligned} f_x(\alpha y + \beta z) &= \overline{\varphi(x, \alpha y + \beta z)} = \overline{(x, A(\alpha y + \beta z))} \\ &= \alpha f_x(y) + \beta f_x(z), \end{aligned}$$

且

$$|f_x(y)| = |\overline{\varphi(x, y)}| = |(x, Ay)| \leq \|A\| \|x\| \|y\|,$$

故 f_x 是 H 上的有界线性泛函。由 Riesz 表示定理可知，存在唯一的 z_x 使得 $f_x(y) = (y, z_x)$ 。设 $B : x \rightarrow z_x$ ，则容易验证 B 是 $H \rightarrow H$ 上的线性算子，并且对任意的 $x, y \in H$ 有

$$(Bx, y) = (z_x, y) = \overline{(y, z_x)} = \overline{f_x(y)} = \varphi(x, y) = (x, Ay),$$

且 B 是有界的。事实上，当 $Bx \neq 0$ 时， $\|Bx\| = \sqrt{\langle Bx, Bx \rangle} = \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} = \|Ax\|$ ，因此， $\|B\| \leq \|A\| < \infty$ 。

$$\begin{aligned} \|Bx\| &= \left(B \left(\frac{x}{\|x\|} \right), \frac{Bx}{\|Bx\|} \right) \|x\| = \left(\frac{x}{\|x\|}, A \left(\frac{Bx}{\|Bx\|} \right) \right) \|x\| \\ &\leq \|A\| \|x\|. \end{aligned}$$

因此， $\|B\| \leq \|A\| < \infty$ 。

注 若 $A \in L(H)$ ，则 A 自伴当且仅当对任意的 $x, y \in H$ ，有 $(Ax, y) = \overline{(Ay, x)}$ ；当 Φ 为复数域时， A 自伴当且仅当对任意的 $x \in H$ ，有 (Ax, x) 为实数。

定理 1.1.3 设 $A, B \in L(H)$, $\alpha, \beta \in \Phi$ ，则

- (1) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$;
- (2) $(A^*)^* = A$;
- (3) $(AB)^* = B^* A^*$;
- (4) $\|A^*\|^2 = \|A\|^2 = \|A^* A\|$;
- (5) $N(A) = R(A^*)^\perp$;
- (6) $N(A^*) = R(A)^\perp$;
- (7) $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$;
- (8) $\overline{R(A^*)} = N(A)^\perp$.

定理 1.1.4 设 $T \in L(H)$ ，且 Φ 是复数域。 $(1) \Leftrightarrow (8)$ 互逆只互逆

- (1) T 是正常的当且仅当 $\forall x \in H$, $\|Tx\| = \|T^*x\|$ 。
 - (2) 若 T 是正常的，则 $N(T) = N(T^*) = R(T)^\perp$ 。
 - (3) 若 T 是正常的， $x \in H$ 是 T 的相应于 α 的特征向量，则 $T^*x = \bar{\alpha}x$ 。
 - (4) 若 T 是正常的，则 T 的不同特征值的特征向量彼此正交。
- 证 (1) 若 T 是正常的，即 $T^*T = TT^*$ ，则

由 $\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (TT^*x, x) = \|T^*x\|^2$. 反之, 若 $\forall x \in H$, 有 $\|Tx\| = \|T^*x\|$, 则

$$(Tx, x) = (T^*x, x) = ((T^*T - TT^*)x, x) = 0.$$

因若 $S \in L(H)$ 且在复空间中 $\forall x \in H$, $(Sx, x) = 0$, 则必有 $S = 0$. 事实上, 由对任意的 $x, y \in H$ 有 $(S(x+y), x+y) = 0$, 故

$$(Sx, y) + (Sy, x) = 0 \quad \text{且} \quad (Sx, iy) + (S(iy), x) = 0,$$

因此 $(Sx, y) - (Sy, x) = 0$. 从而对任意的 $x, y \in H$ 有 $(Sx, y) = 0$, 故 $S = 0$. 从而 (1) 成立.

(2) 对任意的 $x \in N(T)$ 有 $Tx = 0$, 由 (1) 知, 当且仅当对任意的 $x \in H$, $T^*x = 0$, 故 $x \in N(T^*)$. 再由定理 1.1.3 知结论成立.

(3) 由 T 是正常的知 $T - \alpha I$ 也是正常的, 再由 (1) 知结论成立.

(4) 设 $Tx = \alpha x$, $Ty = \beta y$ 且 $\alpha \neq \beta$. 则由 (3) 可知 $T^*y = \bar{\beta}y$, 从而

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y) = (Tx, y) = (x, T^*y) = (x, \bar{\beta}y) = \beta(x, y),$$

故 $x \perp y$.

对酉算子, 易证下面结果:

定理 1.1.5 设 H 是复 Hilbert 空间, $U \in L(H)$, 则下列条件等价:

(1) U 是酉算子 (即 $UU^* = U^*U = I$);

(2) U 是满射, 且对任意 $x, y \in H$ 有 $(Ux, Uy) = (x, y)$;

(3) U 是满射, 且对任意 $x \in H$ 有 $\|Ux\| = \|x\|$.

证 只须证 (3) \Rightarrow (1). 由 $\|Ux\| = \|x\|$, 得

$$(U^*Ux, x) = (x, x),$$

故 $U^*U = I$. 再由 (3) 知, U 是可逆的, 从而 $U^* = U^{-1}$, 故 U 是酉算子.

定理 1.1.6 (Fuglede-Putnam-Rosenblum) 设 $M, N, T \in L(H)$, 且 M, N 都是正常的. 若 $MT = TN$, 则 $M^*T = TN^*$.

证 由 $MT = TN$, 则对任意自然数 $k \geq 0$, 有 $M^k T = T N^k$. 故若 $p(z)$ 是多项式, 则

$$p(M)T = Tp(N).$$

从而对任意固定的复数 z , 有 $e^{izM}T = Te^{izN}$, 即有 $T = e^{-izM}Te^{izN}$. 令

$$f(z) = e^{-izM^*}Te^{izN^*} = e^{-i(zM^* + \bar{z}M)}Te^{i(zN^* + \bar{z}N)},$$

易见, $e^{-i(zM^* + \bar{z}M)}$, $e^{i(zN^* + \bar{z}N)}$ 都是酉算子, 故 $\|f(z)\| \leq \|T\|$. 又 $f(z)$ 解析, 由刘维尔定理知 $f(z)$ 是常值函数. 从而

$$0 = f'(z) = -iM^*e^{-izM^*}Te^{izN^*} + i e^{-izM^*}Te^{izN^*}N^*.$$

令 $z = 0$, 得 $M^*T = TN^*$.

1.2 投影算子与正算子的平方根

假设 H 是复 Hilbert 空间. 若 $T \in L(H)$, 且 $T^2 = T$, 则称 T 是幂等算子, 自伴的幂等算子称为 投影算子; 若 $\forall x \geq 0$, $(Tx, x) \geq 0$, 则称 T 是 正算子, 记为 $T \geq 0$. 若 T 是可逆的正算子, 则称 T 是 严格正算子, 记为 $T > 0$.

定理 1.2.1 若 $P \in L(H)$, 则下列条件等价:

(1) P 是 投影算子;

(2) $P^2 = P$ 并且 P 是 正常的;

(3) $P^2 = P$ 并且 $R(P) = N(P)^\perp$;

(4) $(Px, x) = \|Px\|^2 (\forall x \in H)$.

证 (1) \Rightarrow (2) 显见.

(2) \Rightarrow (3) 由定理 1.1.4 知, 若 P 正常, 则 $N(P) = R(P)^\perp$. 又 $P^2 = P$, 故 $R(P) = N(I - P)$. 从而 $R(P)$ 是闭的, 且

$$R(P) = \overline{R(P)} = \left(\overline{R(P)}^\perp\right)^\perp = N(P)^\perp.$$

(3) \Rightarrow (4) 假设 $x \in H$. 令 $z = Px$, $y = x - Px$, 则 $(Py = 0)$, $Pz = z$, 故 $y \in N(P)$, $z \in R(P)$. 所以由 (3) 得 $y \perp z$, 从而有

基础为 $(Px, x) = (z, z + y) = (z, y) + (z, z) = (z, z) = \|Px\|^2$. 且

(4) \Rightarrow (1) 由 $\|Px\|^2$ 是实数, 故

$$(Px, x) = (x, P^*x) = \overline{(P^*x, x)} = (P^*x, x),$$

由 H 是复空间知 $P = P^* = P^2$; 又

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (P^2x, x) = (Px, x),$$

故 $P^2 = P$.

定义 3 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in L(H)$, 称

$$W(A) = \{(Ax, x) : \forall x \in H, \|x\| = 1\}$$

为 A 的 数值值域; 称

$$\omega(A) = \sup_{\mu \in W(A)} |\mu|$$

为 A 的 数值半径.

关于数值值域, 我们有下列著名的 Toeplitz-Hausdorff 定理.

定理 1.2.2 [59] 设 H 是 Hilbert 空间, $T \in L(H)$, 则 T 的数值值域 $W(T)$ 是复平面上的凸集.

证 对 H 中任意两个单位向量 x, y , 令 $\xi = (Tx, x)$, $\eta = (Ty, y)$; 现证对任意 $t \in [0, 1]$, 有 $t\xi + (1-t)\eta \in W(T)$. 不妨设 $\xi \neq \eta$, 记

$$\alpha = \frac{1}{\xi - \eta}, \quad \beta = \frac{-\eta}{\xi - \eta}, \quad (1)$$

则只要证明 $[0, 1] \subseteq W(\alpha T + \beta)$. 事实上, 如果 $[0, 1] \subseteq W(\alpha T + \beta)$ 成立, 则对任意 $t \in [0, 1]$, 有 H 中的单位向量 z 使得 $t = \alpha(Tz, z) + \beta$, 从而

$$\begin{aligned} \alpha(Tz, z) + \beta &= t = t(\alpha\xi + \beta) + (1-t)(\alpha\eta + \beta) \\ &= \alpha[t\xi + (1-t)\eta] + \beta, \end{aligned}$$

故 $t\xi + (1-t)\eta = (Tz, z) \in W(T)$. 下面考虑 $\alpha T + \beta$ 的笛卡儿分解 $A + iB$, 其中 A, B 为自伴算子, 易证 $(Bx, x) = 0$, $(By, y) = 0$. 不妨设

(Bx, y) 是一个纯虚数, 必要时可将 x 乘以一个单位复数. 由 $\xi \neq \eta$ 知, 单位向量 x, y 必线性无关, 令 $h(t) = tx + (1-t)y$, 则 $h(t) \neq 0$. 由 $(Bx, x) = (By, y) = \operatorname{Re}(Bx, y) = 0$, 得 $(Bx, h(t)) = (By, h(t)) = 0$. 若对所有 $t \in [0, 1]$ 有

$$\begin{aligned} & (Bh(t), h(t)) \\ &= t^2(Bx, x) + t(1-t)(Bx, y) + (1-t)^2(By, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

再由 A 自伴, 可知

$$f(t) = \left((\alpha T + \beta) \frac{h(t)}{\|h(t)\|}, \frac{h(t)}{\|h(t)\|} \right) \in W(\alpha T + \beta),$$

且它是 $[0, 1]$ 上的实值连续函数, 因 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 由介值定理可知 $[0, 1] \subseteq W(\alpha T + \beta)$.

定义 4 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in L(H)$, 如果复数 λ 使得 $\lambda I - A$ 可逆, 则称 λ 是 A 的 正则点, A 的所有正则点组成的集合称为 A 的 预解集, 记为 $\rho(A)$; A 的非正则点, 称为 谱点, 所有谱点组成的集合称为 A 的 谱集, 记为 $\sigma(A)$.

定理 1.2.3 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in L(H)$ 是自伴算子, 则

- (1) $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$ ($\overline{W(A)}$ 是 $W(A)$ 的闭包);
- (2) $\omega(A) = \sup_{\mu \in W(A)} |\mu| = \|A\|$;
- (3) $r(A) = \sup_{\mu \in \sigma(A)} |\mu| = \|A\|$,

其中 $\omega(A)$ 称为 A 的 数值半径, $r(A)$ 称为 A 的 谱半径.

证 (1) 由 A 是自伴算子, 故 $W(A) \subseteq \mathbf{R}$. 若 $\lambda \notin \overline{W(A)}$, 设

$$d = \rho(\lambda, \overline{W(A)}) = \inf_{\mu \in W(A)} |\lambda - \mu| > 0.$$

则 $\forall x \in H, x \neq 0$, 有

$$\begin{aligned} d\|x\|^2 &\leq \left| \lambda - \left(A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \right| \|x\|^2 = \left| ((\lambda I - A) \bar{x}, x) \right| \\ &\leq \|(\lambda I - A)x\| \|x\|. \end{aligned}$$

故由(1.2.1)得 $d\|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|$. (1.2.1)

若 $y_n \in R(\lambda I - A)$, 则 $y_n = (\lambda I - A)x_n$, $x_n \in H$. 如果 $\{y_n\}$ 是柯西列, 由(1.2.1)知 $\{x_n\}$ 也是, 故 x_n 收敛于某 x_0 于 H 中, 所以 $y_n \rightarrow (\lambda I - A)x_0$ 于 $R(\lambda I - A)$ 中. 因此 $R(\lambda I - A)$ 是闭的.

下面断言 $\lambda I - A$ 是到上的. 事实上, 如果它不是到上的, 由 Riesz 表现定理, 则存在 $y \in H$, $\|y\| = 1$ 使得

$$((\lambda I - A)x, y) = 0, \quad \forall x \in H.$$

特别地, 有 $((\lambda I - A)y, y) = 0$. 故

$$\lambda = \lambda \|y\|^2 = (Ay, y) \in W(A),$$

此与 $\lambda \notin \overline{W(A)}$ 矛盾. 从而 $\lambda I - A$ 是一一到上的, 由逆算子定理, 且 $(\lambda I - A)^{-1} \in L(H)$, $\lambda \in \rho(A)$, 所以 $\lambda \notin \sigma(A)$.

(2) 对任意的 $\mu \in W(A)$, 存在 $\|x\| = 1$ 使得 $\mu = (Ax, x)$, 故
从而

$$\omega(A) = \sup_{\mu \in W(A)} |\mu| \leq \|A\|.$$

反之, 记 $a = \sup_{\mu \in W(A)} |\mu|$, 则 $|(Ax, x)| \leq a\|x\|^2$. 又

$$4\operatorname{Re}(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y),$$

故

$$|4\operatorname{Re}(Ax, y)| \leq a(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2a(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1.2.2)$$

如果 $A = 0$, 结论显然成立. 如果 $A \neq 0$, 则存在 $x \in H$, $\|x\| = 1$ 使

$Ax \neq 0$. 令 $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$, 则

$$\|Ax\| = \left(Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|} \right) = \operatorname{Re}(Ax, y) \leq \frac{a}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) = a.$$

从而 $\|A\| \leq a = \omega(A)$. 因此 $\|A\| = \omega(A)$.

(3) 记 $M = \sup_{\mu \in W(A)} \mu$, $m = \inf_{\mu \in W(A)} \mu$, 则可断言 $M, m \in \sigma(A)$. 事实上, 设 $B = MI - A$, 则

$$B \geq 0, \quad \inf_{\|x\|=1} (Bx, x) = 0, \quad (1.2.3)$$

因此由 (1.2.3) 可断言 $M \in \sigma(A)$. 因为 (1.2.3) 可蕴含

$$(B(tBx + x), tBx + x) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

故对任意实数 t , $t^2(B^2x, Bx) + 2t\|Bx\|^2 + (Bx, x) \geq 0$. 因此

$$\|Bx\|^4 \leq \|B\|^3 \|x\|^2 |(Bx, x)|.$$

所以 (1.2.3) 可蕴含

$$\inf_{\|x\|=1} \|Bx\| = 0. \quad (1.2.4)$$

如果 B 是一一到上的, 那么 B^{-1} 有界. 由 $\|Bx\| \|B^{-1}\| \geq \|x\|$, 得

$$\inf_{\|x\|=1} \|Bx\| > 0,$$

此与 (1.2.4) 矛盾. 同理, 可知 $m \in \sigma(A)$. 再由 $W(A) \subseteq [m, M]$, 有

$$\omega(A) \leq \max\{|M|, |m|\} \leq \sup_{\mu \in \sigma(A)} |\mu| = r(A),$$

且由 $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$ 可知, $r(A) \leq \omega(A)$, 因此 (3) 成立.

定理 1.2.4 假设 $A, B \in L(H)$, 则 $\sigma(AB) - \{0\} = \sigma(BA) - \{0\}$.

证 假设 $\lambda \neq 0$, 我们证明 $AB - \lambda I$ 与 $BA - \lambda I$ 同时可逆或同时不可逆, 为此只需证明 $\lambda = 1$ 时的情况. 假若 $I - AB$ 可逆, 于是存在 $C \in L(H)$ 使得 $C(I - AB) = (I - AB)C = I$, 从而

$$(I + BCA)(I - BA) = I - BA + BCA - BCABA$$

$$= I + BCA - B(I + CAB)A = I + BCA - BCA = I.$$

同理 $(I - BA)(I + BCA) = I$. 故 $I - BA$ 可逆.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com