现代数学
专著系列

正算子理论

杨长森 左红亮 李海英 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

现代数学
专著系列

正算子理论

杨长森 左红亮 李海英 著

本书得到下列基金资助:

河南师范大学专著基金
河南省基础数学重点学科基金
河南省高校青年骨干教师资助计划
教育部科学技术研究重点项目基金
国家天元青年科学基金

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

正算子理论/杨长森,左红亮,李海英著. —武汉:武汉大学出版社,
2009.8
现代数学专著系列
ISBN 978-7-307-07205-3

Ⅰ.正… Ⅱ.①杨… ②左… ③李… Ⅲ.正规算子 Ⅳ.O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第133371号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:湖北恒泰印务有限公司
开本:720×1000　1/16　印张:13　字数:215千字　插页:1
版次:2009年8月第1版　2009年8月第1次印刷
ISBN 978-7-307-07205-3/O·406　定价:26.00元

内 容 提 要

Hilbert 空间上正算子理论是线性代数中正定矩阵理论向无穷维情形的推广. 本书介绍利用算子极分解理论研究 Hilbert 空间上正算子的若干性质, 如不等式的保序性、算子函数的单调性和若干新的算子类等方面的知识和方法. 全书共分五章: 第一章介绍部分等距和极分解等预备知识. 第二章介绍 L-H 不等式、Furuta 不等式及 Furuta 型不等式, 并研究具有负幂的 Furuta 型不等式的推广. 第三章介绍 L-H 不等式和 Furuta 不等式条件的最优性, 并研究 Furuta 型算子单调函数的最佳单调区间. 第四章介绍 Furuta 不等式在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、Kantorovich 型不等式等中的应用, 并研究若干算子保序不等式. 第五章利用 Furuta 不等式和算子单调函数研究 $F(p,r,q)$, $wF(p,r,q)$, $A(s,t)$ 等算子类, 指出这些类与其中参数的依赖性、它的谱性质和其中算子幂的性质等. 本书可作为基础数学专业泛函分析方向的研究生教材或参考书, 也可供有关专业的教师和科研工作者参考.

前言

正定矩阵在矩阵理论中有着重要的地位，正定矩阵向无穷维空间的推广就产生了正算子，像正定矩阵一样正算子有着极其丰富的性质．早在 1934 年， Löwner-Heinz 证明了如下著名的不等式：若 $A \geq B \geq 0$，则对任意实数 $\alpha \in [0,1]$，有 $A^{\alpha} \geq B^{\alpha}$．到 1985 年， Chan-Kwong 在 [12] 中猜想 $A \geq B \geq 0$ 蕴含 $(AB^2A)^{\frac{1}{2}} \leq A^2$．T. Furuta 在 1987 年证明了这个猜想是正确的，得到了一个比 Löwner-Heinz 不等式更广泛的不等式，后来称之为 Furuta 不等式．该不等式出现后，引起许多学者的关注和研究．例如 Furuta 等先后给出了该不等式的简化证明，以及其所诱导的算子单调函数和它在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、Kantorovich 型不等式、算子类等中的应用； K. Tanahashi 等研究了该不等式条件的最优性，并研究了具有负指数的 Furuta 型不等式．本书介绍这方面的基本理论和最近作者获得的一些结果，鉴于篇幅有限，有些结果没有列出．

全书共分五章．第一章介绍部分等距和极分解等预备知识．第二章介绍 L-H 不等式、Furuta 不等式及 Furuta 型不等式，并研究具有负幂的 Furuta 型不等式的推广．第三章介绍 L-H 不等式和 Furuta 不等式条件的最优性，并研究 Furuta 型算子单调函数的最佳单调区间．第四章介绍 Furuta 不等式在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、 Kantorovich 型不等式等中的应用，并研究若干算子保序不等式．第五章利用 Furuta 不等式和算子单调函数来研究 $F(p,r,q)$, $wF(p,r,q)$, $A(s,t)$ 等算子类，指出这些类与其中参数的依赖性、它的谱性质和其中算子幂的性质等．为了方便读者，在附录中给出了常用的名词索引．

本书主要内容是由著者论文整理而成的，著者感谢导师李国平院士，是他引导著者对 Hilbert 空间上算子理论产生了浓厚的兴趣；感谢日

本东京科技大学的 T. Furuta 教授，他给著者提供了许多资料，多年来他给予我们许多关怀和培养；最后感谢武汉大学刘培德教授的关心、鼓励与帮助，并推荐该书在武汉大学出版社出版. 在本书的写作过程中，还得到许多研究生的帮助，在此也表示感谢. 由于著者水平有限，难免有错误和不当之处，欢迎读者批评指正！

著　者

河南师范大学数学与信息科学学院

目　录

第一章 预备知识

1.1 正常算子与自伴算子的简单性质

设 H 是 Hilbert 空间， $L(H)$ 是 H 上有界线性算子的全体构成的 Banach 代数. 以 $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \le 1\}$ 为 $T \in L(H)$ 的范数；以 Φ 代表 H 所取的标量域，即实数域与复数域；以 $R(T), N(T)$ 分别代表 T 的值空间与零空间.

定义 1 设 $T \in L(H)$. 若存在 $B \in L(H)$ 使得

$$(Tx, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H,$$

则称 B 是 T 的**共轭算子**, 记为 T^*.

如果 $T^*T = TT^*$, 则称 T 是 **正常算子** 或 **正规算子**. 特别地，若 $T = T^*$, 则称 T 为 **自伴算子**.

为了说明对任意的有界线性算子 T, 其共轭算子都是存在的，我们要从 Riesz 表现定理谈起.

定理 1.1.1 (Riesz 表现定理) 设 H 是 Hilbert 空间.

(1) 对于每个 $y \in H$, $f(x) = (x, y)$ 是 H 上的连续线性泛函，且

$$\|f\| = \|y\|.$$

(2) 若 f 是 H 上的连续线性泛函，则存在 $y \in H$ ，使得

$$f(x) = (x, y), \quad \forall x \in H,$$

此时称 y 为 f 的 **表现**.

证 (1) 显见， f 是线性泛函且

$$|f(x)| = |(x, y)| \le \|x\|\|y\|,$$

故 f 有界且 $\|f\| \le \|y\|$. 另一方面，由 $f(y) = (y, y) = \|y\|^2$, 得

$$\|f\| \ge \left\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| = \|y\|.$$

从而必有 $\|f\| = \|y\|$.

(2) 如果 f 是 H 上的连续线性泛函，令 $E = N(f)$, 则 E 闭. 若 $E = H$, 则 $f = 0$, 此时取 $y = 0$ 即可. 如果 $E \ne H$, $H = E \oplus E^{\perp}$, 先取 $z \in E^{\perp}$ 且 $\|z\| = 1$, 则 $f(z) \ne 0$. 令 $y = \overline{f(z)}z$, 对每个 $x \in H$, 显见 $x - \dfrac{f(x)}{f(z)} z \in E$, 故

$$0 = \left(x - \frac{f(x)}{f(z)} z, y\right) = (x, y) - \frac{f(x)}{f(z)}\left(z, \overline{f(z)}z\right) = (x, y) - f(x),$$

即 $\forall x \in H$, $f(x) = (x, y)$, 且由 (1) 知 $\|f\| = \|y\|$.

定义 2 若

$$S(\alpha f_1 + \beta f_2) = \overline{\alpha} S(f_1) + \overline{\beta} S(f_2), \quad \forall f_1, f_2 \in H^*,\ \alpha, \beta \in \Phi,$$

则称映射 $S: H^* \to H$ 是**共轭线性的**. 若 $T: H^* \to H$ $(Tf = y)$, 其中 y 是 f 的表现，由 Riesz 表现定理可知，T 是共轭线性满射，且

$$\|Tf\| = \|f\|, \quad \forall f \in H^*.$$

定理 1.1.2 设 H 为 Hilbert 空间，则对每个 $A \in L(H)$，存在唯一的 $B \in L(H)$，使得

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H.$$

证 对任意的 $x, y \in H$, 令 $\varphi(x, y) = (x, Ay)$. 固定 $x \in H$, 令

$$f_x(y) = \overline{\varphi(x, y)}.$$

下证 f_x 是 H 上的有界线性泛函. 事实上，对任意的 $z, y \in H$, $\alpha, \beta \in \Phi$,

$$\begin{aligned} f_x(\alpha y + \beta z) &= \overline{\varphi(x, \alpha y + \beta z)} = \overline{\left(x, A(\alpha y + \beta z)\right)} \\ &= \alpha f_x(y) + \beta f_x(z), \end{aligned}$$

且

$$|f_x(y)| = |\overline{\varphi(x, y)}| = |(x, Ay)| \le \|A\|\|x\|\|y\|,$$

故 f_x 是 H 上的有界线性泛函. 由 Riesz 表现定理可知，存在唯一的 z_x 使得 $f_x(y)=(y,z_x)$. 设 $B: x\to z_x$, 则容易验证 B 是 $H\to H$ 上的线性算子，并且对任意的 $x,y\in H$ 有

$$(Bx,y)=(z_x,y)=\overline{(y,z_x)}=\overline{f_x(y)}=\varphi(x,y)=(x,Ay),$$

且 B 是有界的. 事实上，当 $Bx\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\|Bx\| &= \left(B\left(\frac{x}{\|x\|}\right),\frac{Bx}{\|Bx\|}\right)\|x\| = \left(\frac{x}{\|x\|},A\left(\frac{Bx}{\|Bx\|}\right)\right)\|x\|\\ &\leq \|A\|\|x\|.\end{aligned}$$

因此, $\|B\|\leq\|A\|<\infty$.

注 若 $A\in L(H)$, 则 A 自伴当且仅当对任意的 $x,y\in H$, 有 $(Ax,y)=\overline{(Ay,x)}$; 当 Φ 为复数域时, A 自伴当且仅当对任意的 $x\in H$, 有 (Ax,x) 为实数.

定理 1.1.3 设 $A,B\in L(H)$, $\alpha,\beta\in\Phi$, 则

(1) $(\alpha A+\beta B)^*=\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*$;

(2) $(A^*)^*=A$;

(3) $(AB)^*=B^*A^*$;

(4) $\|A^*\|^2=\|A\|^2=\|A^*A\|$;

(5) $N(A)=R(A^*)^{\perp}$;

(6) $N(A^*)=R(A)^{\perp}$;

(7) $\overline{R(A)}=N(A^*)^{\perp}$;

(8) $\overline{R(A^*)}=N(A)^{\perp}$.

定理 1.1.4 设 $T\in L(H)$, 且 Φ 是复数域.

(1) T 是正常的当且仅当 $\forall x\in H$, $\|Tx\|=\|T^*x\|$.

(2) 若 T 是正常的, 则 $N(T)=N(T^*)=R(T)^{\perp}$.

(3) 若 T 是正常的, $x\in H$ 是 T 的相应于 α 的特征向量, 则 $T^*x=\overline{\alpha}x$.

(4) 若 T 是正常的, 则 T 的不同特征值的特征向量彼此正交.

证 (1) 若 T 是正常的, 即 $T^*T=TT^*$, 则

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)=(TT^*x,x)=\|T^*x\|^2.$$

反之，若 $\forall x\in H$, 有 $\|Tx\|=\|T^*x\|$, 则

$$\Big((T^*T-TT^*)\,x,x\Big)=0.$$

因若 $S\in L(H)$ 且在复空间中 $\forall x\in H$, $(Sx,x)=0$, 则必有 $S=0$. 事实上，由对任意的 $x,y\in H$ 有 $(S(x+y),x+y)=0$, 故

$$(Sx,y)+(Sy,x)=0\quad 且\quad (Sx,\mathrm{i}y)+(S(\mathrm{i}y),x)=0,$$

因此 $(Sx,y)-(Sy,x)=0$. 从而对任意的 $x,y\in H$ 有 $(Sx,y)=0$, 故 $S=0$. 从而 (1) 成立.

(2) 对任意的 $x\in N(T)$ 有 $Tx=0$, 由 (1) 知，当且仅当对任意的 $x\in H$, $T^*x=0$, 故 $x\in N(T^*)$. 再由定理 1.1.3 知结论成立.

(3) 由 T 是正常的知 $T-\alpha I$ 也是正常的，再由 (1) 知结论成立.

(4) 设 $Tx=\alpha x$, $Ty=\beta y$ 且 $\alpha\neq\beta$. 则由 (3) 可知 $T^*y=\overline{\beta}y$, 从而

$$\alpha(x,y)=(\alpha x,y)=(Tx,y)=(x,T^*y)=(x,\overline{\beta}y)=\beta(x,y),$$

故 $x\perp y$.

对酉算子，易证下面结果：

定理 1.1.5 设 H 是复 Hilbert 空间， $U\in L(H)$, 则下列条件等价：

(1) U 是酉算子 (即 $UU^*=U^*U=I$)；

(2) U 是满射，且对任意 $x,y\in H$ 有 $(Ux,Uy)=(x,y)$；

(3) U 是满射，且对任意 $x\in H$ 有 $\|Ux\|=\|x\|$.

证 只须证 (3) $\Rightarrow$ (1). 由 $\|Ux\|=\|x\|$，得

$$(U^*Ux,x)=(x,x),$$

故 $U^*U=I$. 再由 (3) 知， U 是可逆的，从而 $U^*=U^{-1}$, 故 U 是酉算子.

定理 1.1.6 (Fuglede-Putnam-Rosenldum) 设 $M,N,T\in L(H)$，且 M,N 都是正常的. 若 $MT=TN$，则 $M^*T=TN^*$.

证 由 $MT = TN$, 则对任意自然数 $k \geq 0$, 有 $M^kT = TN^k$. 故若 $p(z)$ 是多项式，则

$$p(M)T = Tp(N).$$

从而对任意固定的复数 z, 有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{z}M}T = T\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{z}N}$, 即有 $T = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{z}M}T\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{z}N}$. 令

$$f(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zM^*}T\mathrm{e}^{\mathrm{i}zN^*} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(zM^*+\overline{z}M)}T\mathrm{e}^{\mathrm{i}(zN^*+\overline{z}N)},$$

易见， $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(zM^*+\overline{z}M)}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(zN^*+\overline{z}N)}$ 都是酉算子，故 $\|f(z)\| \leq \|T\|$. 又 $f(z)$ 解析，由刘维尔定理知 $f(z)$ 是常值函数. 从而

$$0 = f'(z) = -\mathrm{i}M^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zM^*}T\mathrm{e}^{\mathrm{i}zN^*} + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zM^*}T\mathrm{e}^{\mathrm{i}zN^*}N^*.$$

令 $z = 0$, 得 $M^*T = TN^*$.

1.2　投影算子与正算子的平方根

假设 H 是复 Hilbert 空间. 若 $T \in L(H)$, 且 $T^2 = T$, 则称 T 是 **幂等算子**, 自伴的幂等算子称为 **投影算子**; 若 $\forall x \geq 0$, $(Tx, x) \geq 0$, 则称 T 是 **正算子**, 记为 $T \geq 0$. 若 T 是可逆的正算子，则称 T 是 **严格正算子**, 记为 $T > 0$.

定理 1.2.1　若 $P \in L(H)$，则下列条件等价：

(1) P 是投影算子；

(2) $P^2 = P$ 并且 P 是正常的；

(3) $P^2 = P$ 并且 $R(P) = N(P)^{\perp}$；

(4) $(Px, x) = \|Px\|^2$ $(\forall x \in H)$.

证　(1) $\Rightarrow$ (2)　显见.

(2) $\Rightarrow$ (3)　由定理 1.1.4 知，若 P 正常，则 $N(P) = R(P)^{\perp}$. 又 $P^2 = P$, 故 $R(P) = N(I - P)$. 从而 $R(P)$ 是闭的，且

$$R(P) = \overline{R(P)} = \left(\overline{R(P)}^{\perp}\right)^{\perp} = N(P)^{\perp}.$$

(3) $\Rightarrow$ (4)　假设 $x \in H$. 令 $z = Px$, $y = x - Px$, 则 $Py = 0$, $Pz = z$, 故 $y \in N(P)$, $z \in R(P)$. 所以由 (3) 得 $y \perp z$, 从而有

$$(Px,x)=(z,z+y)=(z,y)+(z,z)=(z,z)=\|Px\|^2.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) 由 $\|Px\|^2$ 是实数，故

$$(Px,x)=(x,P^*x)=\overline{(P^*x,x)}=(P^*x,x),$$

由 H 是复空间知 $P=P^*=P^2$; 又

$$\|Px\|^2=(Px,Px)=(P^2x,x)=(Px,x),$$

故 $P^2=P$.

定义 3 设 H 是 Hilbert 空间，$A\in L(H)$, 称

$$W(A)=\{(Ax,x):\ \forall x\in H,\ \|x\|=1\}$$

为 A 的 **数值值域**; 称

$$\omega(A)=\sup_{\mu\in W(A)}|\mu|$$

为 A 的 **数值半径**.

关于数值值域，我们有下列著名的 **Toeplitz-Hausdorff 定理**.

定理 1.2.2 [59] 设 H 是 Hilbert 空间，$T\in L(H)$，则 T 的数值值域 $W(T)$ 是复平面上的凸集.

证 对 H 中任意两个单位向量 x,y, 令 $\xi=(Tx,x)$, $\eta=(Ty,y)$; 现证对任意 $t\in[0,1]$, 有 $t\xi+(1-t)\eta\in W(T)$. 不妨设 $\xi\neq\eta$, 记

$$\alpha=\frac{1}{\xi-\eta},\quad \beta=\frac{-\eta}{\xi-\eta},$$

则只要证明 $[0,1]\subseteq W(\alpha T+\beta)$. 事实上，如果 $[0,1]\subseteq W(\alpha T+\beta)$ 成立，则对任意 $t\in[0,1]$, 有 H 中的单位向量 z 使得 $t=\alpha(Tz,z)+\beta$, 从而

$$\begin{aligned}\alpha(Tz,z)+\beta=t&=t(\alpha\xi+\beta)+(1-t)(\alpha\eta+\beta)\\&=\alpha\Big[t\xi+(1-t)\eta\Big]+\beta,\end{aligned}$$

故 $t\xi+(1-t)\eta=(Tz,z)\in W(T)$. 下面考虑 $\alpha T+\beta$ 的笛卡儿分解 $A+\mathrm{i}B$, 其中 A,B 为自伴算子，易证 $(Bx,x)=0$, $(By,y)=0$. 不妨设

(Bx,y) 是一个纯虚数，必要时可将 x 乘以一个单位复数. 由 $\xi\neq\eta$ 知，单位向量 x,y 必线性无关，令 $h(t)=tx+(1-t)y$, 则 $h(t)\neq 0$. 由

$$(Bx,x)=(By,y)=\operatorname{Re}(Bx,y)=0,$$

则对所有 $t\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}&\big(Bh(t),h(t)\big)\\&=t^2(Bx,x)+t(1-t)\left((Bx,y)+\overline{(Bx,y)}\right)+(1-t)^2(By,y)\\&=0.\end{aligned}$$

再由 A 自伴，可知

$$f(t)=\left((\alpha T+\beta)\frac{h(t)}{\|h(t)\|},\frac{h(t)}{\|h(t)\|}\right)\in W(\alpha T+\beta),$$

且它是 $[0,1]$ 上的实值连续函数，因 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 由介值定理可知 $[0,1]\subseteq W(\alpha T+\beta)$.

定义 4 设 H 是 Hilbert 空间，$A\in L(H)$, 如果复数 λ 使得 $\lambda I-A$ 可逆，则称 λ 是 A 的 **正则点**, A 的所有正则点组成的集合称为 A 的 **预解集**, 记为 $\rho(A)$; A 的非正则点，称为 **谱点**, 所有谱点组成的集合称为 A 的 **谱集**, 记为 $\sigma(A)$.

定理 1.2.3 设 H 是 Hilbert 空间，$A\in L(H)$ 是自伴算子，则

(1) $\sigma(A)\subseteq\overline{W(A)}$ ($\overline{W(A)}$ 是 $W(A)$ 的闭包)；

(2) $\omega(A)=\sup\limits_{\mu\in W(A)}|\mu|=\|A\|$；

(3) $r(A)=\sup\limits_{\mu\in\sigma(A)}|\mu|=\|A\|$，

其中 $\omega(A)$ 称为 A 的 **数值半径**, $r(A)$ 称为 A 的 **谱半径**.

证 (1) 由 A 是自伴算子，故 $W(A)\subseteq\mathbf{R}$. 若 $\lambda\notin\overline{W(A)}$, 设

$$d=\rho(\lambda,\overline{W(A)})=\inf_{\mu\in W(A)}|\lambda-\mu|>0.$$

则 $\forall x\in H$, $x\neq 0$, 有

$$\begin{aligned}d\|x\|^2&\leq\left|\lambda-\left(A\frac{x}{\|x\|},\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\|x\|^2=\Big|\big((\lambda I-A)\,x,x\big)\Big|\\&\leq\|(\lambda I-A)\,x\|\|x\|.\end{aligned}$$

故
$$d\|x\| \le \|(\lambda I - A)x\|. \tag{1.2.1}$$
若 $y_n \in R(\lambda I - A)$, 则 $y_n = (\lambda I - A)x_n$, $x_n \in H$. 如果 $\{y_n\}$ 是柯西列, 由 (1.2.1) 知 $\{x_n\}$ 也是, 故 x_n 收敛于某 x_0 于 H 中, 所以 $y_n \to (\lambda I - A)x_0$ 于 $R(\lambda I - A)$ 中. 因此 $R(\lambda I - A)$ 是闭的.

下面断言 $\lambda I - A$ 是到上的. 事实上, 如果它不是到上的, 由 Riesz 表现定理, 则存在 $y \in H, \|y\| = 1$ 使得
$$\big((\lambda I - A)x, y\big) = 0, \quad \forall x \in H.$$
特别地, 有 $\big((\lambda I - A)y, y\big) = 0$. 故
$$\lambda = \lambda\|y\|^2 = (Ay, y) \in W(A),$$
此与 $\lambda \notin \overline{W(A)}$ 矛盾. 从而 $\lambda I - A$ 是一一到上的, 由逆算子定理, $(\lambda I - A)^{-1} \in L(H)$, $\lambda \in \rho(A)$, 所以 $\lambda \notin \sigma(A)$.

(2) 对任意的 $\mu \in W(A)$, 存在 $\|x\| = 1$ 使得 $\mu = (Ax, x)$, 故
$$|\mu| \le \|A\|\|x\|^2 = \|A\|.$$
从而
$$\omega(A) = \sup_{\mu \in W(A)} |\mu| \le \|A\|.$$
反之, 记 $a = \sup\limits_{\mu \in W(A)} |\mu|$, 则 $|(Ax, x)| \le a\|x\|^2$. 又
$$4\,\mathrm{Re}(Ax, y) = \big(A(x+y), x+y\big) - \big(A(x-y), x-y\big),$$
故
$$|4\mathrm{Re}(Ax, y)| \le a(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2a(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1.2.2}$$
如果 $A = 0$, 结论显然成立. 如果 $A \ne 0$, 则存在 $x \in H$, $\|x\| = 1$ 使 $Ax \ne 0$. 令 $y = \dfrac{Ax}{\|Ax\|}$, 则
$$\|Ax\| = \left(Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|}\right) = \mathrm{Re}(Ax, y) \le \frac{a}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) = a.$$
从而 $\|A\| \le a = \omega(A)$. 因此 $\|A\| = \omega(A)$.

(3) 记 $M=\sup\limits_{\mu\in W(A)}\mu$, $m=\inf\limits_{\mu\in W(A)}\mu$, 则可断言 $M,m\in\sigma(A)$. 事实上，设 $B=MI-A$，则

$$B\geq 0,\quad \inf_{\|x\|=1}(Bx,x)=0, \tag{1.2.3}$$

因此由 (1.2.3) 可断言 $M\in\sigma(A)$. 因为 (1.2.3) 可蕴含

$$\big(B(tBx+x),tBx+x\big)\geq 0,\quad \forall t\in\mathbf{R},$$

故对任意实数 t, $t^2(B^2x,Bx)+2t\|Bx\|^2+(Bx,x)\geq 0$. 因此

$$\|Bx\|^4\leq\|B\|^3\|x\|^2|(Bx,x)|.$$

所以 (1.2.3) 可蕴含

$$\inf_{\|x\|=1}\|Bx\|=0. \tag{1.2.4}$$

如果 B 是一一到上的，那么 B^{-1} 有界. 由 $\|Bx\|\|B^{-1}\|\geq\|x\|$, 得

$$\inf_{\|x\|=1}\|Bx\|>0,$$

此与 (1.2.4) 矛盾. 同理，可知 $m\in\sigma(A)$. 再由 $W(A)\subseteq[m,M]$, 有

$$\omega(A)\leq\max\{|M|,|m|\}\leq\sup_{\mu\in\sigma(A)}|\mu|=r(A),$$

且由 $\sigma(A)\subseteq\overline{W(A)}$ 可知， $r(A)\leq\omega(A)$, 因此 (3) 成立.

定理 1.2.4　假设 $A,B\in L(H)$, 则 $\sigma(AB)-\{0\}=\sigma(BA)-\{0\}$.

证　假设 $\lambda\neq 0$, 我们证明 $AB-\lambda I$ 与 $BA-\lambda I$ 同时可逆或同时不可逆，为此只需证明 $\lambda=1$ 时的情况. 假若 $I-AB$ 可逆，于是存在 $C\in L(H)$ 使得 $C(I-AB)=(I-AB)C=I$, 从而

$$\begin{aligned}(I+BCA)(I-BA)&=I-BA+BCA-BCABA\\&=I+BCA-B(I+CAB)A\\&=I+BCA-BCA=I.\end{aligned}$$

同理 $(I-BA)(I+BCA)=I$. 故 $I-BA$ 可逆.