特殊函数及其应用

H. H. 列别捷夫著

高等教育出版社

特殊函数及其应用

H. H. 列别捷夫著
張　　　燮譯

高等教育出版社

本書是根据苏联国家技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的列别捷夫（Н. Н. Лебедев）著"特殊函数及其应用"（Специальные функции и их приложения）1953年版譯出。原書是工程师的数理叢書之一。对于物理与工程方面的工作人員，本書是良好的参考資料。

特殊函数及其应用

Н. Н. 列别捷夫著

張燮譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷 新华書店發行

統一書号13010•376 開本850×1168 1/32 印張11 1/16 字數272,000 印數3,201—4,200

1957年11月第1版 1958年7月北京第2次印刷 定價（10）¥1.70

原　序

本書專講数学的一个部門，对于在工作中遇得到数学計算的科学工作者与工程研究人員而言，这一部門的知識是極为重要的。

本書系統地叙述了最重要的特殊函数的理論基础，以及这种理論对于数学物理与技术上的具体問題的应用。

在选擇本書的材料时，对于在实用观点上最有兴趣的問題尽量求其詳尽，这样自然而然地限制了純粹理論的部分；对于計算的技术也給以非常的注意，并指出了現有的表册等等。

由于篇幅所限，所討論的函数的某些性質虽然在应用上很有用，但不能列入正文中，而只排在例題里面，作为相应各章的習題。

本書假定讀者已經熟悉了复变函数論的基础知識，否則便無法深入地研究特殊函数，但为了使本書对于不是数学專家的讀者也有用处起見，作者尽可能的提到复变函数論的少許知識，这些知識在整个書中是經常要用的。特别，这种情况迫使作者不能采用某些專著中所用的叙述次序，在各該叙述中有許多特殊函数用圍綫积分来定义，而这种积分是最便于表达这些函数的。

要了解本書正文所必需的复变函数論的知識，其分量大約等于 B. И. 斯米尔諾夫的“高等数学教程”第三卷第二分册的第一，三兩章，而最主要的是 §§1—7, 9—21, 55—59, 64—67, 70 所講的部分。特别要注意的是这些問題：函数的分类，圍綫积分法，由級数与积分所定义的函数的性質的研究，解析延拓等。

綫性微分方程的解析理論的知識可以不具备，但最好能稍微知道一些，像上述教程中 §§ 95—99 的分量一样。

至于数学分析其他部門的知識（如数学物理，积分变换等等），則其应用范圍仅限于討論特殊函数个别例題；所以对于这些方法

的細节不甚明了时，并不很妨碍本書的閱讀。

我們設想讀者在他的实际工作中必須要利用特殊函数，因而在本書中有許多場合都沒有提到引入某些特殊函数的理由；同样的道理，作者認为，函数的定义法与得出它們的性質的方法，其取舍主要应該使叙述簡單，而不在于遵循历史或者其他論据。

本書的材料如此画分章节，使得本書各部分在一定的程度上是彼此独立的，并且研究比較簡單的函数类时，可以不必熟悉更一般的类型的函数。例如，由一般的球函数与柱函数的理論中，抽出整个几节来講勒讓德多項式与貝色尔函数，又在建立球函数的理論时，并未利用超几何函数的相应的性質。

所选的应用，主要在說明特殊函数对于物理与技术上的应用的各个方面，而不在于詳述数学物理的相应的部門。对于柱函数，尤其是球函数的应用的問題講得最詳細，因为在国内的文献中，对于这方面的說明是不够充分的。

目 次

第一章　伽瑪函数

§1.1. 伽瑪-函数的定义

伽瑪-函数是最簡單而重要的特殊函数之一；熟悉这个函数的性質是为研究許多別的特殊函数，例如柱函数，超几何函数等，必須具备的基础。

伽瑪-函数的理論，在分析学与复变函数論的敎程中都有討論，因而在本章內我們仅仅簡略地叙述这个理論，其个別的細节請讀者去参考現有的文献①。

对于具有正的实数部分的任何复变数 z, 伽瑪-函数 $\Gamma(z)$ 可由如次的公式来定义：

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad R(z)>0. \qquad (1.1,1)$$

积分 (1.1,1) 在区域 $0<\delta\leqslant R(z)\leqslant A<\infty$ 內一致收斂，因为这里 $|e^{-t}t^{z-1}|\leqslant\varphi(t)$, 其中

$$\varphi(t)=\begin{cases} e^{-t}t^{\delta-1} & (0<t\leqslant 1), \\ e^{-t}t^{A-1} & (t\geqslant 1), \end{cases}$$

而 $\varphi(t)$ 在区間 $(0, \infty)$ 上的积分是收斂的。于是根据复变函数論的著名定理卽知，$\Gamma(z)$ 在区域 $R(z)>0$ 內是正規函数②。

---

① 例如参看：В. И. Смирнов[1], Е. Т. Уиттекр 与 Г. Н. Ватсон[1]。参考文献表列在本書末尾。

② 这个定理包含如次的断語，假設积分 $F(z)=\int_C f(z,t)dt$ 的求积路綫 C 是复变数 t 的平面內的綫段或者某个曲綫，則 $F(z)$ 在 D 区內为复变数 z 的正規函数，倘若下列条件成立的話：1) $f(z,t)$ 在 C 弧上是 t 的連續函数；2) 对于 C 弧上的任一点 t, $f(z,t)$ 在 D 区內为 z 的正規函数。本定理对于旁义积分也成立，但須假設积分在 D 区內一致收斂。

例如，参看 В. И. Смирнов[1], 257－260 頁。

在复变数平面的其余部分内的伽瑪函数值，須用上述函数的解析延拓法来求。为了获得此种延拓，可以先注意一点：倘若在(1.1,1)中施行部分积分法

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{-t}t^{z}\Big|_{0}^{\infty}+\frac{1}{z}\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{z}dt=\frac{1}{z}\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{z}dt,$$

则由此式幷設 $R(z)>0$ 即可推出以下的函数关系：

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \qquad (1.1,2)$$

现在考慮复变函数 $f(z)$，对于在区域 $R(z)>-(n+1)$，$z\neq 0, -1, -2, \cdots$ 內的任何数值 z，这个函数 $f(z)$ 由下面的等式来定义：

$$f(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \qquad (1.1,3)$$

其中 $\Gamma(z)$ 是由积分(1.1,1)所定的函数。

函数 $f(z)$ 在所考慮的区域內是正規的，而且根据(1.1,2)可知，当 $R(z)>0$ 时 $f(z)$ 的值与 $\Gamma(z)$ 的值完全相同。因此，$f(z)$ 便是所求 $\Gamma(z)$ 在区域 $-(n+1)<R(z)\leqslant 0$，$z\neq 0, -1, -2, \cdots$ 內的解析延拓，从而在此区域內即可用如次的公式来定义伽瑪-函数：

$$\Gamma(z)\equiv f(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \qquad (1.1,4)$$

因为数目 n 可以取得任意大，所以伽瑪函数除了 $z=0, -1, -2, \cdots$ 各点以外便定义于整个复变数平面上。$z=0, -1, -2, \cdots$ 各点全是所考慮的函数的極点。事实上，在 $z=-n$ 一点的鄰区內，$\Gamma(z)$ 由公式(1.1,4)表出，从而

$$\lim_{z\to -n}\Gamma(z)(z+n)=(-1)^{n}\frac{\Gamma(1)}{n!}=\frac{(-1)^{n}}{n!}, \qquad (1.1,5)$$

因为由(1.1,1)可知，$\Gamma(1)=1$。

这样，$\Gamma(z)$ 便是复变数 z 的半純函数，它在 $z=0, -1, -2, \cdots$ 各点处具有單極点。

由(1.1,5)可知,$\Gamma(z)$在$z=-n(n=0,1,2,\cdots)$的鄰区内的罗郎級数展开式为:

$$\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}+P(z+n),\tag{1.1,6}$$

其中$P(z+n)$是正規的部分。

下面 (§ 1.2) 將要証明，伽瑪-函数在复变数的平面上沒有零点,从而$[\Gamma(z)]^{-1}$便是全整函数。

§ 1.2. 伽瑪-函数的函数关系

伽瑪-函数$\Gamma(z)$满足三个函数关系:

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\tag{1.2,1}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\tag{1.2,2}$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z);\tag{1.2,3}$$

这些关系式在与此函数有关的各种变换和計算中，起了很重要的作用。

上述第一个关系式，可以由$\Gamma(z)$的定义(§ 1.1)直接推出。欲証第二个函数关系,可以暫設z为屬于区間$0<z<1$的实数,并利用积分表达式(1.1,1)。此时我們得到

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s+t)}s^{-z}t^{z-1}ds\,dt;$$

或者,引入新变数(u,v),令

$$u=s+t,\quad v=\frac{t}{s},$$

则根据定积分理論中的著名的公式卽有①

① 例如,参看 В. И. Смирнов[1], 232 頁。

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u}v^{z-1}\frac{du\,dv}{1+v}=\int_0^\infty\frac{v^{z-1}}{1+v}dv=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

这样，对于区間$(0,1)$內的一切 z 值，公式(1.2,2)都証明了。現在再用解析延拓的一般原理，即可証明所得的結果对于任何复数 $z\neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$都是正确的，只要注意一点，即：此时(1.2,2)的左右兩边全是复变数 z 的正規函数①。

关系式(1.2,3)叫做伽瑪-函数的加倍公式，欲証此式，可設 $z>0$ 而仍利用等式(1.1,1)，則有

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s+t)}(2\sqrt{st})^{2z-1}t^{-\frac{1}{2}}ds\,dt=$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)}(2\alpha\beta)^{2z-1}\alpha\,d\alpha\,d\beta,$$

其中新变数(α, β)与旧变数(s, t)的关系是$\sqrt{s}=\alpha, \sqrt{t}=\beta$。

如果在所得的公式中將α, β对調，再將这兩个等式相加，便得到更对称的表达式如下：

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)}(2\alpha\beta)^{2z-1}(\alpha+\beta)d\alpha\,d\beta=$$

$$=4\iint\limits_{(\sigma)} e^{-(\alpha^2+\beta^2)}(2\alpha\beta)^{2z-1}(\alpha+\beta)d\alpha\,d\beta,$$

其中的求积区是扇形$0\leqslant\alpha\leqslant\infty, 0\leqslant\beta\leqslant\alpha$。

引入新变数(u, v)，令

$$u=\alpha^2+\beta^2,\quad v=2\alpha\beta$$

---

① 这种原理以后經常要用到，按照这个原理，倘若在复变数平面的某个区域D內已經确立了等式$f(z)=\varphi(z)$，那么在包含D的更大的区域D^*內此式仍能成立，但須設所考虑的等式的兩边在D^*內为正規函数。如果等式$f(z)=\varphi(z)$在D^*区內的某一个綫段上已經确立，那么仍有同样的結果。例如，参看 В. И. Смирнов[1]，67 頁。

则得

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty v^{2z-1}dv\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-v}}du=$$

$$=2\int_0^\infty e^{-v}v^{2z-1}dv\int_0^\infty e^{-w^2}dw=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z).$$

和前面一样，这个結果也可以利用解析延拓的原理而推广到任何复数 $z\neq 0,\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2},\cdots$ 上。

兹利用上列函数关系来計算，当变数 z 取得某些特殊值时伽瑪-函数的値。

利用(1.2,1)，并注意到 $\Gamma(1)=1$，则由归納法可得

$$\Gamma(n+1)=n!\quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{1.2,4}$$

其次，在(1.1,1)中令 $z=\frac{1}{2}$，则得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}, \tag{1.2,5}$$

再利用公式(1.2,1)，便得到

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.2,6}$$

等等。

在結束本节时，我們再証明函数 $\Gamma(z)$ 在复变数的平面上是沒有零点的。事实上，$z=n(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots)$ 不是 $\Gamma(z)$ 的零点，因为 $\Gamma(n)=(n-1)!\,(n=1,2,\cdots)$，而 $\Gamma(n)=\infty\,(n=0,-1,-2,\cdots)$。对于其余的数値 z，公式(1.2,2)成立，从而立刻可以推出所要証明的結果，其理由如下：假定 $z=z_0$ 是 $\Gamma(z)$ 的零点，那么这点便是函数 $\Gamma(1-z)$ 的極点，而这是不可能的。

§1.3. 伽瑪-函数的对数导数

伽瑪-函数的理論与另一种特殊函数 $\psi(z)$ 的理論密切相关，后者是 $\Gamma(z)$ 的对数导数，也就是

$$\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{1.3,1}$$

因为 $\Gamma(z)$ 是半純函数，而且沒有零点，所以 $\psi(z)$ 除了伽瑪-函数的極点 $z=-n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 以外，不能再有别的奇点。由(1.1,6)可知，$\psi(z)$ 在 $z=-n$ 的鄰区內具有如次的展开式:

$$\psi(z)=-\frac{1}{z+n}+P(z+n), \tag{1.3,2}$$

因此 $\psi(z)$ 便是半純函数，它在 $z=0,\ -1,\ -2,\ \cdots$ 上具有單極点。

函数 $\psi(z)$ 滿足一些函数关系，这些关系可以由等式(1.2,1—3)推得，只要取它們的对数导数即可。

这些关系式具有以下的形狀:

$$\psi(z+1)=\frac{1}{z}+\psi(z), \tag{1.3,3}$$

$$\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\ \mathrm{ctg}\ \pi z, \tag{1.3,4}$$

$$\psi(z)+\psi\left(z+\frac{1}{2}\right)+2\ln 2=2\psi(2z). \tag{1.3,5}$$

所得的这些等式可以用来計算当 z 取得某些値时，$\psi(z)$ 的値。

命
$$\psi(1)=\Gamma'(1)=-\gamma, \tag{1.3,6}$$

其中 γ 是欧拉常数($\gamma=0.5772157\cdots$)，幷利用公式(1.3,3)，便得到

$$\psi(n+1)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\quad(n=1,2,\cdots). \tag{1.3,7}$$

此外，在(1.3,5)中命 $z=\frac{1}{2}$，則得

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2; \tag{1.3,8}$$

又由公式(1.3,3)給出:

$$\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}(n=1,2,\cdots). \quad (1.3,9)$$

函数 $\psi(z)$ 可以写成简單的定积分形式，而各种积分表达式包含着变数 z 作为参数。欲导出这些表达式，要首先注意：由于积分(1.1,1)的一致收斂性，当 $R(z)>0$ 时，伽瑪-函数的导数可以写成

$$\Gamma'(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\ln t\,dt. \quad (1.3,10)$$

倘若將积分号下的对数代以伏汝蘭尼积分①

$$\ln t=\int_0^\infty\frac{e^{-x}-e^{-xt}}{x}dx,\ \ R(t)>0, \quad (1.3,11)$$

則可將 $\Gamma'(z)$ 表成二重积分的形式，而且不难証明，这个二重积分当 $R(z)>0$ 时是絕对收斂的。因此，我們可以將积分的次序顚倒，而得

$$\Gamma'(z)=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\int_0^\infty(e^{-x}-e^{-xt})e^{-t}t^{z-1}dt=$$

$$=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left[e^{-x}\Gamma(z)-\int_0^\infty e^{-t(x+1)}t^{z-1}dt\right].$$

如果引入新的积分变数 $u=t(x+1)$，則知上式方括号中的积分值为 $(x+1)^{-z}\Gamma(z)$，从而立刻可以推出 $\psi(z)$ 的第一种积分表达式如下：

$$\psi(z)=\int_0^\infty\left[e^{-x}-\frac{1}{(x+1)^z}\right]\frac{dx}{x},\ R(z)>0. \quad (1.3,12)$$

欲得 $\psi(z)$ 的第二种积分表达式，可將公式(1.3,12)写成

---

① 例如，参看 Г. М. Фихтенгольц[1], n°458。

$$\psi(z)=\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{\infty}\left[e^{-x}-\frac{1}{(x+1)^{z}}\right]\frac{dx}{x}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{\delta}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx-\int_{\delta}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^{z}x}\right],$$

并將第二个积分中的求积变数更换而令 $x+1=e^{t}$, 則得

$$\psi(z)=\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{\delta}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_{\ln(1+\delta)}^{\infty}\frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}dt\right]=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{\ln(1+\delta)}^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}\right)dt-\int_{\ln(1+\delta)}^{\delta}\frac{e^{-t}}{t}dt\right].$$

因为当 $\delta\to 0$ 时第二个积分趋近于零，所以由此即得

$$\psi(z)=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}\right)dt,\quad R(z)>0. \qquad (1.3,13)$$

在此式中令 $z=1$, 并將所得的等式由(1.3,13)减去，則得

$$\psi(z)=-\gamma+\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-tz}}{1-e^{-t}}dt,\quad R(z)>0;\ (1.3,14)$$

或引入新的积分变数 $x=e^{-t}$:

$$\psi(z)=-\gamma+\int_{0}^{1}\frac{1-x^{z-1}}{1-x}dx,\quad R(z)>0. \quad (1.3,15)$$

由公式(1.3,15)可以导出 $\psi(z)$ 的新的重要表达式，使其成为解析的形式，它对于任何値 $z\neq 0,-1,-2,\cdots$ 都有意义；也就是說，在整个平面上，凡 $\psi(z)$ 有定义的点处，解析的形式也成立。欲得此种表达式，只須將 $(1-x)^{-1}$ 展开为 x 的升冪級数，然后再逐項积分即可——由于級数的一致收斂性，这种运算是可用的。于是便