

0.174.6

2

特殊函数及其应用

И. И. 列别捷夫 著



高等教育出版社

特殊函数及其应用

И. И. 列别捷夫 著
張 燮 譯

高等教育出版社

本書是根据苏联国家技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的列別捷夫 (Н. Н. Лебедев) 著“特殊函数及其应用” (Специальные функции и их приложения) 1953 年版譯出。原書是工程師的數理叢書之一。對於物理與工程方面的工作人員, 本書是良好的參考資料。

特 殊 函 數 及 其 應 用

Н. Н. 列 別 捷 夫 著

張 燮 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第 054 号)

京華印書局印刷 新華書店發行

統一書号 13010·376 開本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印張 11 $\frac{1}{16}$ 字數 272,000 印數 3,201—4,200
1957 年 11 月第 1 版 1958 年 7 月北京第 2 次印刷 定價 (10) 元 1.70

原 序

本書專講数学的一个部門，对于在工作中遇得到数学計算的科学工作者与工程研究人員而言，这一部門的知識是極為重要的。

本書系統地敘述了最重要的特殊函数的理論基础，以及这种理論对于数学物理与技术上的具体問題的應用。

在選擇本書的材料时，对于在实用观点上最有興趣的問題尽量求其詳尽，这样自然而然地限制了純粹理論的部分；对于計算的技术也給以非常的注意，并指出了現有的表册等等。

由于篇幅所限，所討論的函数的某些性質虽然在应用上很有用，但不能列入正文中，而只排在例題里面，作为相应各章的習題。

本書假定讀者已經熟悉了复变函数論的基础知識，否則便無法深入地研究特殊函数，但为了使本書对于不是数学專家的讀者也有用处起見，作者尽可能的提到复变函数論的少許知識，这些知識在整个書中是經常要用的。特別，这种情况迫使作者不能采用某些專著中所用的敘述次序，在各該敘述中有許多特殊函数用圍綫积分来定义，而这种积分是最便于表达这些函数的。

要了解本書正文所必需的复变函数論的知識，其分量大約等于 B. И. 斯米尔諾夫的“高等数学教程”第三卷第二分册的第一，三兩章，而最主要的是 §§1—7, 9—21, 55—59, 64—67, 70 所講的部分。特別要注意的是這些問題：函数的分类，圍綫积分法，由級数与积分所定义的函数的性質的研究，解析延拓等。

綫性微分方程的解析理論的知識可以不具备，但最好能稍微知道一些，像上述教程中 §§ 95—99 的分量一样。

至于数学分析其他部門的知識（如数学物理，积分變換等等），則其應用範圍仅限于討論特殊函数个别例題；所以對於這些方法

的細節不甚明了時，並不很妨碍本書的閱讀。

我們設想讀者在他的實際工作中必須要利用特殊函數，因而在本書中有許多場合都沒有提到引入某些特殊函數的理由；同樣的道理，作者認為，函數的定義法與得出它們的性質的方法，其取舍主要應該使敘述簡單，而不在于遵循歷史或者其他論據。

本書的材料如此畫分章節，使得本書各部分在一定的程度上是彼此獨立的，並且研究比較簡單的函數類時，可以不必熟悉更一般的類型的函數。例如，由一般的球函數與柱函數的理論中，抽出整個幾節來講勒讓德多項式與貝色爾函數，又在建立球函數的理論時，並未利用超幾何函數的相應的性質。

所選的應用，主要在說明特殊函數對於物理與技術上的應用的各个方面，而不在于詳述數學物理的相應的部門。對於柱函數，尤其是球函數的應用的問題講得最詳細，因為在國內的文獻中，對於這方面的說明是不夠充分的。

目次

原序	vii
第一章 伽瑪函数	1
§ 1. 1. 伽瑪-函数的定义	1
§ 1. 2. 伽瑪-函数的函数关系	3
§ 1. 3. 伽瑪-函数的对数导数	6
§ 1. 4. 当 $ z $ 值甚大时, 伽瑪-函数的渐近表达式	10
§ 1. 5. 与伽瑪-函数有关的定积分	16
§ 1. 6. 伽瑪-函数表	17
習 題	18
第二章 概率积分及其有关的函数	20
§ 2. 1. 概率积分及其基本性質	20
§ 2. 2. 当 $ z $ 值甚大时, 概率积分的渐近表达式	22
§ 2. 3. 虚变数的概率积分 · 函数 $F(z)$	23
§ 2. 4. 变数 $x\sqrt{i}$ 的概率积分 · 福倫納尔积分	25
§ 2. 5. 对于概率論的应用	28
§ 2. 6. 对于热傳导理論的应用 · 無界的热体的表面散热	30
§ 2. 7. 对于振动理論的应用 · 無限樞杆在突然受到集中力作用时的橫 向振动	33
§ 2. 8. 概率积分表及其有关的函数表	25
習 題	36
第三章 积分指数函数及其有关的特殊函数	38
§ 3. 1. 积分指数函数及其基本性質	38
§ 3. 2. 当 $ z \rightarrow \infty$ 时积分指数函数的渐近表达式	41
§ 3. 3. 具有虚变数的积分指数函数 · 积分正弦与积分余弦	42
§ 3. 4. 积分对数	47
§ 3. 5. 对于無綫电技术的应用 · 綫性半波振动子的輻射	49
§ 3. 6. 积分指数函数及其相关函数的表	51
習 題	52
第四章 直交多項式	54
§ 4. 1. 关于直交多項式的一般注解	54
§ 4. 2. 勒讓德多項式 · 定义及母函数	55
§ 4. 3. 勒讓德多項式的循环关系式与微分方程	57
§ 4. 4. 勒讓德多項式的积分表达式	59

§ 4. 5. 勒讓德多項式的直交性	61
§ 4. 6. 当标号 n 甚大时, 勒讓德多項式的漸近表达式	63
§ 4. 7. 函数按照勒讓德多項式展开为級数法	66
§ 4. 8. 函数按照勒讓德多項式展开为級数法的例子	72
§ 4. 9. 爱尔密特多項式。定义及母函数	74
§ 4. 10. 爱尔密特多項式的循环关系式与微分方程	76
§ 4. 11. 爱尔密特多項式的积分表达式	77
§ 4. 12. 爱尔密特多項式的积分方程	78
§ 4. 13. 爱尔密特多項式的直交性	80
§ 4. 14. 当标号 n 甚大时, 爱尔密特多項式的漸近表达式	81
§ 4. 15. 函数按照爱尔密特多項式展开为級数法	84
§ 4. 16. 函数按照爱尔密特多項式展开为級数法的例子	91
§ 4. 17. 拉盖尔多項式。定义及母函数	92
§ 4. 18. 拉盖尔多項式的循环关系式与微分方程	94
§ 4. 19. 拉盖尔多項式的积分表达式。拉盖尔多項式的与爱尔密特多項式的关系	97
§ 4. 20. 拉盖尔多項式的积分方程	99
§ 4. 21. 拉盖尔多項式的直交性	101
§ 4. 22. 当标号 n 甚大时, 拉盖尔多項式的漸近表达式	103
§ 4. 23. 函数按照拉盖尔多項式展开为級数法	107
§ 4. 24. 对于电磁波沿着長綫上的傳播理論的应用。闭合于集中的感应上从电綫端点反射的波	109
§ 4. 25. 直交多項式的表	112
習 題	113

第五章 柱函数 116

§ 5. 1. 引論	116
§ 5. 2. 具有正整数标值的貝色尔函数	116
§ 5. 3. 具有任意标值的貝色尔函数	120
§ 5. 4. 柱函数的一般表达式。第二种的貝色尔函数	123
§ 5. 5. 具有整数标值的第二种貝色尔函数的級数展开法	126
§ 5. 6. 第三种貝色尔函数	128
§ 5. 7. 虚变数的貝色尔函数	130
§ 5. 8. 标号等于正奇数之半的柱函数	123
§ 5. 9. 貝色尔方程的解組的烏隆斯基行列式	135
§ 5. 10. 柱函数的积分表达式	136
§ 5. 11. 当变数值甚大时, 柱函数的漸近表达式	148
§ 5. 12. 柱函数的加法定理	153
§ 5. 13. 柱函数的零点	157
§ 5. 14. 任意函数按照柱函数展开为級数与积分的方法	159
§ 5. 15. 包含柱函数的定积分	163
§ 5. 16. 具有正实变数与标值的柱函数	168

§ 5.17. 柱函数表	170
習 題	172
第六章 柱函数对于数学物理的应用	175
§ 6. 1 引論	175
§ 6. 2. 在柱坐标之下, 方程 $\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu$ 的变数分离法	175
§ 6. 3. 特解的方法对于柱形的边界问题的应用 • 热传导理论中的例子	178
§ 6. 4. 由两个平行面所围的区域的边界问题	182
§ 6. 5. 楔形区域的边界问题	183
§ 6. 6. 静电学的例子 • 置于薄的传导平面的边界附近的点电荷的电场	186
§ 6. 7. 在热传导理论中的应用 • 关于散热柱的问题	188
§ 6. 8. 在衍射理论中的应用	190
第七章 球函数	193
§ 7. 1. 引論	193
§ 7. 2. 超几何微分方程及其级数解	193
§ 7. 3. 勒让德的球函数	196
§ 7. 4. 球函数的积分表达式	205
§ 7. 5. 球函数的函数关系式	209
§ 7. 6. 球函数的级数表达式	211
§ 7. 7. 勒让德方程的解组的烏隆斯基行列式	217
§ 7. 8. 循环关系式	220
§ 7. 9. 具有正整数标号的球函数 • 与勒让德多项式的关系	222
§ 7.10. 标号等于奇整数之半的球函数	223
§ 7.11. 当 $ v $ 值甚大时, 球函数的渐近表达式	227
§ 7.12. 连带的球函数	232
§ 7.13. 球函数表	241
習 題	242
第八章 球函数对于数学物理的应用	245
§ 8. 1. 引論	245
§ 8. 2. 在球坐标之下, 拉普拉斯方程的变数分离法	246
§ 8. 3. 特解的方法对于球形区的边界问题的应用	248
§ 8. 4. 静电学的例子 • 置于导电球的电场内部的点电荷的电场	250
§ 8. 5. 特解的方法对于锥形区域的边界问题的应用	251
§ 8. 6. 在退化的椭圆坐标之下, 拉普拉斯方程的变数分离法	255
§ 8. 7. 旋轉椭球的边界问题	258
§ 8. 8. 数学物理中的例子, 长形均匀椭球的引力	261
§ 8. 9. 旋轉双曲面的边界问题	263
§ 8.10. 环形坐标	265
§ 8.11. 环形的边界问题 • 静电学的例子	268
§ 8.12. 两个相交的球面所围的区域的边界问题	271

§ 8. 13. 双極坐标及其对于数学物理的边界问题的应用	275
§ 8. 14. 球函数在赫姆霍兹方程的积分法中的应用	279

第九章 超几何函数.....281

§ 9. 1. 超几何級数及其解析延拓	281
§ 9. 2. 当 $z \rightarrow 1$ 而 $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ 时超几何級数之和的極限	285
§ 9. 3. 超几何函数的函数关系	287
§ 9. 4. 当超几何函数的参数之間有特殊关系式时, 它的解析延拓公式	294
§ 9. 5. 各种函数用超几何函数的表达法	298
§ 9. 6. 退化的超几何函数	300
§ 9. 7. 当变数值甚大时, 退化的超几何函数的漸近表达式	304
§ 9. 8. 各种函数用退化的超几何函数的表达法	311
§ 9. 9. 超几何函数表	316
習 題	316

第十章 抛物柱形函数.....319

§ 10. 1. 在抛物柱形坐标之下, 拉普拉斯方程的变数分离法	319
§ 10. 2. 第一种爱尔密特函数	321
§ 10. 3. 第二种爱尔密特函数	324
§ 10. 4. 爱尔密特函数的循环关系式	326
§ 10. 5. 抛物柱形函数的积分表达式	328
§ 10. 6. $H_\nu(z)$ 与 $H_\nu(\pm iz)$ 之間的函数关系	330
§ 10. 7. 当变数值甚大时, 抛物柱形函数的漸近表达式	331
§ 10. 8. 虚变数的爱尔密特函数	335
§ 10. 9. 抛物柱形的边界問題	338
§ 10. 10. 对于量子力学的应用	341
習 題	342

参考文献343

第一章 伽瑪函数

§ 1.1. 伽瑪-函数的定义

伽瑪-函数是最簡單而重要的特殊函数之一;熟悉这个函数的性質是为研究許多別的特殊函数,例如柱函数,超几何函数等,必須具备的基础。

伽瑪-函数的理論,在分析学与复变函数論的教程中都有討論,因而在本章內我們仅仅簡略地叙述这个理論,其个別的細節請讀者去参考現有的文献^①。

对于具有正的实数部分的任何复变数 z , 伽瑪-函数 $\Gamma(z)$ 可由如次的公式来定义:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad R(z) > 0. \quad (1.1,1)$$

积分 (1.1,1) 在区域 $0 < \delta \leq R(z) \leq A < \infty$ 內一致收斂, 因为这里 $|e^{-t} t^{z-1}| \leq \varphi(t)$, 其中

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-t} t^{\delta-1} & (0 < t \leq 1), \\ e^{-t} t^{A-1} & (t \geq 1), \end{cases}$$

而 $\varphi(t)$ 在区間 $(0, \infty)$ 上的积分是收斂的。于是根据复变函数論的著名定理即知, $\Gamma(z)$ 在区域 $R(z) > 0$ 內是正規函数^②。

① 例如参看: В. И. Смирнов[1], Е. Т. Уиттекер 与 Г. Н. Ватсон[1]。

参考文献表列在本書末尾。

② 这个定理包含如次的断語, 假設积分 $F(z) = \int_C f(z, t) dt$ 的求积路綫 C 是复变数 t 的平面內的綫段或者某个曲綫, 則 $F(z)$ 在 D 区內为复变数 z 的正規函数, 倘若下列条件成立的話: 1) $f(z, t)$ 在 C 弧上是 t 的連續函数; 2) 对于 C 弧上的任一点 t , $f(z, t)$ 在 D 区內为 z 的正規函数。本定理对于旁义积分也成立, 但須假設积分在 D 区內一致收斂。

例如, 参看 В. И. Смирнов[1], 257—260 頁。

在复变数平面的其余部分内的伽瑪函数值，須用上述函数的解析延拓法来求。为了获得此种延拓，可以先注意一点：倘若在(1.1,1)中施行部分积分法

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt,$$

则由此式并設 $R(z) > 0$ 即可推出以下的函数关系：

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \quad (1.1,2)$$

现在考虑复变函数 $f(z)$ ，对于在区域 $R(z) > -(n+1)$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$ 内的任何数值 z ，这个函数 $f(z)$ 由下面的等式来定义：

$$f(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \quad (1.1,3)$$

其中 $\Gamma(z)$ 是由积分(1.1,1)所定的函数。

函数 $f(z)$ 在所考虑的区域內是正规的，而且根据(1.1,2)可知，当 $R(z) > 0$ 时 $f(z)$ 的值与 $\Gamma(z)$ 的值完全相同。因此， $f(z)$ 便是所求 $\Gamma(z)$ 在区域 $-(n+1) < R(z) \leq 0$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$ 內的解析延拓，从而在此区域內即可用如次的公式来定义伽瑪-函数：

$$\Gamma(z) \equiv f(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \quad (1.1,4)$$

因为数目 n 可以取得任意大，所以伽瑪函数除了 $z=0, -1, -2, \dots$ 各点以外便定义于整个复变数平面上。 $z=0, -1, -2, \dots$ 各点全是所考虑的函数的極点。事实上，在 $z=-n$ 一点的鄰区内， $\Gamma(z)$ 由公式(1.1,4)表出，从而

$$\lim_{z \rightarrow -n} \Gamma(z)(z+n) = (-1)^n \frac{\Gamma(1)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad (1.1,5)$$

因为由(1.1,1)可知， $\Gamma(1)=1$ 。

这样， $\Gamma(z)$ 便是复变数 z 的半純函数，它在 $z=0, -1, -2, \dots$ 各点处具有單極点。

由(1.1,5)可知, $\Gamma(z)$ 在 $z = -n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 的鄰区内的罗郎級数展开式为:

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + P(z+n), \quad (1.1,6)$$

其中 $P(z+n)$ 是正規的部分。

下面 (§ 1.2) 将要証明, 伽瑪-函数在复变数的平面上沒有零点, 从而 $[\Gamma(z)]^{-1}$ 便是全整函数。

§ 1.2. 伽瑪-函数的函数关系

伽瑪-函数 $\Gamma(z)$ 滿足三个函数关系:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (1.2,1)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (1.2,2)$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z); \quad (1.2,3)$$

这些关系式在与此函数有关的各种变换和計算中, 起了很重要的作用。

上述第一个关系式, 可以由 $\Gamma(z)$ 的定义 (§ 1.1) 直接推出。欲証第二个函数关系, 可以暫設 z 为属于区間 $0 < z < 1$ 的实数, 并利用积分表达式(1.1,1)。此时我們得到

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} s^{-zt} t^{z-1} ds dt;$$

或者, 引入新变数 (u, v) , 令

$$u = s+t, \quad v = \frac{t}{s},$$

則根据定积分理論中的著名的公式即有^①

① 例如, 参看 В. И. Смирнов[1], 232 頁。

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} v^{z-1} \frac{du dv}{1+v} = \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v} dv = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

这样,对于区间 $(0, 1)$ 内的一切 z 值,公式(1.2,2)都证明了。现在再用解析延拓的一般原理,即可证明所得的结果对于任何复数 $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 都是正确的,只要注意一点,即:此时(1.2,2)的左右两边全是复变数 z 的正規函数^①。

关系式(1.2,3)叫做伽瑪-函数的加倍公式,欲証此式,可設 $z > 0$ 而仍利用等式(1.1,1),則有

$$\begin{aligned} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} (2\sqrt{st})^{2z-1} t^{-\frac{1}{2}} ds dt = \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} \alpha d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

其中新变数 (α, β) 与旧变数 (s, t) 的关系是 $\sqrt{s} = \alpha, \sqrt{t} = \beta$ 。

如果在所得的公式中將 α, β 对調,再將这两个等式相加,便得到更对称的表达式如下:

$$\begin{aligned} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\alpha d\beta = \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

其中的求积区是扇形 $0 \leq \alpha \leq \infty, 0 \leq \beta \leq \alpha$ 。

引入新变数 (u, v) ,令

$$u = \alpha^2 + \beta^2, \quad v = 2\alpha\beta$$

① 这种原理以后經常要用到,按照这个原理,倘若在复变数平面的某个区域 D 內已經确立了等式 $f(z) = \varphi(z)$,那么在包含 D 的更大的区域 D^* 內此式仍能成立,但須設所考虑的等式的兩边在 D^* 內为正規函数。如果等式 $f(z) = \varphi(z)$ 在 D^* 区內的某一个綫段上已經确立,那么仍有同样的結果。例如,參看 В. И. Смирнов[1], 67 頁。

則得

$$\begin{aligned} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty v^{2z-1}dv \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-v}}du = \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-v}v^{2z-1}dv \int_0^\infty e^{-w^2}dw = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z). \end{aligned}$$

和前面一样，这个結果也可以利用解析延拓的原理而推广到任何复数 $z \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots$ 上。

茲利用上列函数关系来计算，当变数 z 取得某些特殊值时伽瑪-函数的值。

利用(1.2,1)，并注意到 $\Gamma(1)=1$ ，則由归纳法可得

$$\Gamma(n+1)=n! \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (1.2,4)$$

其次，在(1.1,1)中令 $z=\frac{1}{2}$ ，則得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}, \quad (1.2,5)$$

再利用公式(1.2,1)，便得到

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.2,6)$$

等等。

在結束本节时，我們再証明函数 $\Gamma(z)$ 在复变数的平面上是没有零点的。事实上， $z=n$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 不是 $\Gamma(z)$ 的零点，因为 $\Gamma(n)=(n-1)!$ ($n=1, 2, \dots$)，而 $\Gamma(n)=\infty$ ($n=0, -1, -2, \dots$)。对于其余的数值 z ，公式(1.2,2)成立，从而立刻可以推出所要証明的結果，其理由如下：假定 $z=z_0$ 是 $\Gamma(z)$ 的零点，那么这点便是函数 $\Gamma(1-z)$ 的極点，而这是不可能的。

§ 1.3. 伽瑪-函数的对数导数

伽瑪-函数的理論与另一种特殊函数 $\psi(z)$ 的理論密切相关, 后者是 $\Gamma(z)$ 的对数导数, 也就是

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (1.3,1)$$

因为 $\Gamma(z)$ 是半純函数, 而且沒有零点, 所以 $\psi(z)$ 除了伽瑪-函数的極点 $z = -n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 以外, 不能再有别的奇点。由 (1.1,6) 可知, $\psi(z)$ 在 $z = -n$ 的鄰区内具有如次的展开式:

$$\psi(z) = -\frac{1}{z+n} + P(z+n), \quad (1.3,2)$$

因此 $\psi(z)$ 便是半純函数, 它在 $z=0, -1, -2, \dots$ 上具有單極点。

函数 $\psi(z)$ 滿足一些函数关系, 这些关系可以由等式 (1.2,1—3) 推得, 只要取它們的对数导数即可。

这些关系式具有以下形状:

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z), \quad (1.3,3)$$

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z, \quad (1.3,4)$$

$$\psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) + 2 \ln 2 = 2\psi(2z). \quad (1.3,5)$$

所得的这些等式可以用来計算当 z 取得某些值时, $\psi(z)$ 的值。

$$\text{令 } \psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma, \quad (1.3,6)$$

其中 γ 是欧拉常数 ($\gamma = 0.5772157\dots$), 并利用公式 (1.3,3), 便得到

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.3,7)$$

此外, 在 (1.3,5) 中令 $z = \frac{1}{2}$, 則得

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2; \quad (1.3,8)$$

又由公式 (1.3,3) 給出:

$$\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2+2\sum_{k=1}^n\frac{1}{2k-1}(n=1,2,\dots). \quad (1.3,9)$$

函数 $\psi(z)$ 可以写成简单的定积分形式, 而各种积分表达式包含着变数 z 作为参数。欲导出这些表达式, 要首先注意: 由于积分 (1.1,1) 的一致收敛性, 当 $R(z)>0$ 时, 伽玛-函数的导数可以写成

$$\Gamma'(z)=\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln t \, dt. \quad (1.3,10)$$

倘若将积分号下的对数代以伏汝兰尼积分①

$$\ln t = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx, \quad R(t) > 0, \quad (1.3,11)$$

则可将 $\Gamma'(z)$ 表成二重积分的形式, 而且不难证明, 这个二重积分当 $R(z)>0$ 时是绝对收敛的。因此, 我们可以将积分的次序颠倒, 而得

$$\begin{aligned} \Gamma'(z) &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \int_0^{\infty} (e^{-x} - e^{-xt}) e^{-t} t^{z-1} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left[e^{-x} \Gamma(z) - \int_0^{\infty} e^{-t(x+1)} t^{z-1} dt \right]. \end{aligned}$$

如果引入新的积分变数 $u=t(x+1)$, 则知上式方括号中的积分值为 $(x+1)^{-z} \Gamma(z)$, 从而立刻可以推出 $\psi(z)$ 的第一种积分表达式如下:

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left[e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right] \frac{dx}{x}, \quad R(z) > 0. \quad (1.3,12)$$

欲得 $\psi(z)$ 的第二种积分表达式, 可将公式 (1.3,12) 写成

① 例如, 参看 Г. М. Фихтенгольц [1], n° 458.

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} \left[e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right] \frac{dx}{x} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^z x} \right],\end{aligned}$$

并将第二个积分中的求积变数更换而令 $x+1=e^t$, 则得

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\ln(1+\delta)}^{\infty} \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} dt \right] = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\ln(1+\delta)}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} \right) dt - \int_{\ln(1+\delta)}^{\delta} \frac{e^{-t}}{t} dt \right].\end{aligned}$$

因为当 $\delta \rightarrow 0$ 时第二个积分趋近于零, 所以由此即得

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} \right) dt, \quad R(z) > 0. \quad (1.3,13)$$

在此式中令 $z=1$, 并将所得的等式由(1.3,13)减去, 则得

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{1-e^{-t}} dt, \quad R(z) > 0; \quad (1.3,14)$$

或引入新的积分变数 $x=e^{-t}$:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-x^{z-1}}{1-x} dx, \quad R(z) > 0. \quad (1.3,15)$$

由公式(1.3,15)可以导出 $\psi(z)$ 的新的重要表达式, 使其成为解析的形式, 它对于任何值 $z \neq 0, -1, -2, \dots$ 都有意义; 也就是说, 在整个平面上, 凡 $\psi(z)$ 有定义的点处, 解析的形式也成立。欲得此种表达式, 只须将 $(1-x)^{-1}$ 展开为 x 的升幂级数, 然后再逐项积分即可——由于级数的一致收敛性, 这种运算是可用的。于是便