高等学校
小学教育
专业教材

初等数论

主编　单墫

南京大学出版社

初等数论

高等学校小学教育专业教材

初等数论

主　编　单　墫
编　者　单　墫　纪春岗
　　葛　军

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等数论/单墫编. —南京:南京大学出版社,
2000.6
ISBN 7—305—03588—2

Ⅰ. 初... Ⅱ. 单 Ⅲ. 初等数论-高等学校-教材
Ⅳ. 0156.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 31891 号

丛 书 名 高等学校小学教育专业教材
书 名 初等数论
主 编 单 墫
责任编辑 秦 涛
装帧设计 赵 庆
责任校对 刘子普
出版发行 南京大学出版社
(南京汉口路 22 号南京大学校内 邮编 210093)
印 刷 南京陆军指挥学院印刷厂
经 销 全国各地新华书店
开 本 850×1168 1/32 印张 4.25 字数 116 千
版 次 2000 年 7 月第 1 版 2002 年 5 月第 2 次印刷
印 数 4001～7000
定 价 6.50 元
ISBN 7-305-03588-2/O·248

目　录

第 1 章　数的整除性

数学家克罗内克(L. Kronecker,1823 ～ 1891)有句名言:“上帝创造了整数,其余都是人做的工作”,其实,整数也是人类创造出来的,它是我们最熟悉的朋友.

自然数集{0,1,2,3,…}通常记为 **N**.

在集 **N** 中可以施行两种运算:加法与乘法.

要使加法的逆运算 —— 减法运算能施行,还必须引入零与负整数. 我们把自然数、零与负整数所组成的集记为 **Z**,**Z** 中的数称为整数.

要使乘法的逆运算 —— 除法永远能进行,就必须引入分数(当然 0 不能作除数). 整数与分数统称为有理数,有理数的集合记为 **Q**.

在 **N** 中,有时也能够进行除法运算.

定义 1.1　若 a,b,c 都是整数,并且 $a = bc$,则称 a 为 b 的倍数,b 为 a 的约数(因数). 又称 b 能整除 a 或 a 能被 b 整除,记作 $b \mid a$. 如果 b 不能整除 a,就记作 $b \nmid a$.

除非特别申明,本章中所有字母均表示自然数.

§1.1　奇数与偶数

整数中能被 2 整除的整数称为偶数,不能被 2 整除的整数称为奇数,即偶数集为

$$\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots\};$$

奇数集为

$$\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots\}.$$

注意 0 是偶数，而且 0 是任何整数的倍数.

因此，我们就有奇数与偶数的基本性质：

基本性质 1.1

(1) 偶数 ± 偶数 = 偶数；

(2) 奇数 ± 奇数 = 偶数；

(3) 偶数 ± 奇数 = 奇数.

反复利用(1)，(2)，(3)，我们就得到一般的结论：

奇数个奇数的和是奇数；偶数个奇数的和是偶数；任意正整数个偶数的和是偶数.

基本性质 1.2

(1) 奇数 × 奇数 = 奇数；

(2) 奇数 × 偶数 = 偶数；

(3) 偶数 × 偶数 = 偶数.

同样地，我们就有：

任意多个奇数的积是奇数；至少有一个乘数是偶数的积是偶数.

基本性质 1.3

(1) 如果一个偶数能被奇数整除. 那么商必是偶数.

(2) 两个连续整数的积 $n(n+1)$ 是偶数.

运用奇数与偶数的基本性质，可以解决很多问题.

例 1 平方数的(正)因数的个数是奇数.

基本思路 抓住 n 的因数成对这一特点：有因数 d，就有因数 $\frac{n}{d}(d < \sqrt{n})$.

解 每个自然数 n 的因数是成对出现的：如果 d 是 n 的因数，那么 $\frac{n}{d}$ 也是 n 的因数；d 不同时，$\frac{n}{d}$ 也不相同. 当 $d \neq \sqrt{n}$ 时，d 与 $\frac{n}{d}$ 不等. 只有当 n 为平方数时，$\sqrt{n}$ 是 n 的因数，与它配对的数就

是 $\sqrt{n}$ 自身. 所以当且仅当 n 为平方数时，n 的因数个数为奇数.

在 d 是 n 的因数时，我们把 $\frac{n}{d}$ 称为 d 的共轭因数. 这样，n 为平方数时，它有一个自共轭（自己和自己共轭）的因数 $\sqrt{n}$. 反过来，如果 n 有自共轭的因数，那么它一定是平方数.

例 2 用 $\tau(n)$ 表示 n 的因数个数，试确定

$$\tau(1)+\tau(2)+\cdots+\tau(1999) \qquad ①$$

的奇偶性.

解 由例 1 的讨论可知，非平方数的因数个数是偶数，平方数的因数个数是奇数.

因为 $45>\sqrt{1999}>44$，所以 1 至 1999 中有 44 个平方数，即 ① 式中有 44 项为奇数，于是由基本性质 1 得 ① 式是偶数.

例 3 能否将 $\{1,2,\cdots,972\}$ 分为 12 个互不相交的子集，每个子集含 81 个元素，并且各个子集的元素的和相等？如果能，怎样分？

解 如果存在所述的分法，那么和 $1+2+3+\cdots+972$ 应是 12 的倍数，可是

$$1+2+\cdots+972=\frac{1+972}{2}\times 972=973\times 81\times 6$$

不是 12 的倍数，矛盾！

所以，无法将题中的集合分成 12 个互不相交的子集符合要求.

说明 一般地，

(1) 设 $n>1$，当 n 为奇数，m 为正偶数时，无法将集合 $\{1,2,\cdots,mn\}$ 分为 m 个互不相交的子集，并且各个子集的元素的和相等.

不难由

$$1+2+\cdots+mn=(1+mn)\times n\times\frac{m}{2}$$

不是 m 的倍数知道这个结论成立.

(2) 当 $n>1$ 及 m 均为奇数或者 n 为偶数时，我们都可以将集合 $\{1,2,\cdots,mn\}$ 分为 m 个互不相交的子集，满足上面所述的要求.（读者可以尝试一下！）

例 4 在一条线段的内部任取 n 个点，将这些点及线段端点依次记为 $A_0,A_1,\cdots,A_{n+1}$，并且将端点 A_0 染上红色，A_{n+1} 染上蓝色，其余各点染上红色或蓝色. 称两端颜色不同的线段 A_iA_{i+1} $(0\leqslant i\leqslant n)$ 为“好线段”. 证明，好线段的条数为奇数.

基本思路 记两种颜色的点为“+1”和“−1”，运用基本性质解决这个问题.

解 将红色的点记为 $+1$，蓝色的点记为 -1.

考虑每条线段 A_iA_{i+1} 的两端的数的乘积. 当且仅当 A_iA_{i+1} 是好线段时，乘积是 -1.

将上述 $n+1$ 个乘积 $(i=0,1,2,\cdots,n)$ 乘起来. 这时 A_0,A_{n+1} 各出现一次，中间的点 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 各出现两次，于是 $n+1$ 个乘积的积为 $1\times(-1)=-1$. 这表明 $n+1$ 个乘积中，乘积为 -1 的个数是奇数，即好线段的条数为奇数.

1.1.2 奇偶分析

讨论某一个量的奇偶性常常有助于解题. 这样的方法称为奇偶分析.

例 5 在黑板上写出三个自然数，然后擦去一个换成其他两个数的和减 1，这样继续做下去，最后得到 17，1967，1983. 问原来的三个数能否为 2，2，2？

基本思路 考虑各个数的奇偶性.

解 假设原来三个数是偶数，那么操作一次得到两个偶数一个奇数.

接下去的一次操作：如果擦去一个偶数，那么得到的新数仍然是偶数（因为偶+奇−1是偶数）；如果擦去一个奇数，那么得到的新数仍然是奇数. 于是，这一次操作得到仍是两个偶数一个奇数.

因此，以后不论操作多少次，永远得到两个偶数一个奇数.

这就是说由 2，2，2 开始，不论进行多少次操作总是得到两个偶数一个奇数，即不可能得到三个奇数 17，1967，1983.

所以，原来的三个数不可能全为偶数 2，2，2.

例 6 已知 n 是奇数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 证明

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

是偶数.

基本思路 若奇数个整数的和是偶数，则其中必有一个整数是偶数.

证明 1 因为

$$(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n)=$$
$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(1+2+\cdots+n)=0$$

是偶数且 n 为奇数，所以，$a_1-1,a_2-2,\cdots,a_n-n$ 中至少有一个是偶数(若 $a_1-1,a_2-2,\cdots,a_n-n$ 全是奇数，则这奇数个数的和是奇数，与它们的和为 0 矛盾).

因此，这 n 个数的积一定是偶数.

证明 2 因为 n 是奇数，所以 $1,2,\cdots,n$(即 $a_1,a_2,\cdots,a_n$) 中奇数比偶数多 1 个. 从而在 $(a_1,1),(a_2,2),\cdots,(a_n,n)$ 这 n 个数对中，至少有一个数对的两个数都是奇数. 它们的差是偶数. 故

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

是偶数.

例 7 设 a,b,c 都是奇数，证明方程

$$ax^2+bx+c=0 \qquad ②$$

没有有理数解.

基本思路 反证法. 利用奇偶性导出矛盾.

证明 假设式 ② 有解 $\frac{r}{s}\in\mathbf{Q}$，r,s 不全为偶数(否则可以约简)，即 r,s 或全为奇数或恰有一个为奇数.

如果 r,s 全是奇数，那么由

$$a(\frac{r}{s})^2 + b(\frac{r}{s}) + c = 0,$$

得

$$ar^2 + brs + cs^2 = 0. \qquad ③$$

但 ③ 式左边各项均为奇数，且为三项，所以，它们的和为奇数，而 ③ 式右边为偶数 0，矛盾！

如果 r,s 中恰有一个奇数，那么 ③ 式左边有两项是偶数，而其余一项是奇数. 于是，它们的和也为奇数，不等于偶数 0，矛盾！

因此，方程 ② 无有理根.

例 8 能否将两个 1，两个 2，…，两个 1990 排成一列，使得两个 $i(1 \leqslant i \leqslant 1990)$ 之间恰好有 i 个数？

解 假设能满足题中所述要求，则这些数可以从左至右编上号码 1，2，…，2×1990，号码之和

$$1 + 2 + \cdots + 2 \times 1990 = \frac{1 + 2 \times 1990}{2} \times 2 \times 1990$$
$$= 1990 \times (1 + 2 \times 1990)$$

为偶数.

但是另一方面，每两个数 i 中间恰有 i 个数. 所以，在 i 为奇数时，这两个 i 的号码有相同的奇偶性，号码的和为偶数；在 i 为偶数时，两个 i 的号码的和为奇数. 又由于 1 至 1990 中有 995(奇数) 个偶数，所以 2 个 1，2 个 2，…，2 个 1990 中共有 995 对 i 的号码的和为奇数. 于是号码的总和为奇数. 两方面的结论矛盾.

因此，不可能将 2 个 1，2 个 2，…，2 个 1990 排成一列满足所述要求.

说明 将 1990 换为一般的 m，可以得到：

当且仅当 m 除以 4 余 0(即被 4 整除) 或余 3 时，有满足所述要求的排法.

有兴趣的读者请参看《对应》(王子侠、单墫著，上海科技文献

出版社).

例 9 将 $1,2,\cdots,n(n\geqslant 2)$ 分为无公共元素的组，使得每个数都不与它的 2 倍在同一组，问至少要分为几组？

基本思路 将数表示成 $2^k\cdot j(k\in \mathbf{N}\cup\{0\},j$ 为正奇数) 的形式.

解 至少分为 2 组.

将每个数表示成 $2^k\cdot j$ 的形式，其中 k 为非负整数，j 为正奇数.

将 k 为奇数的数作为一组，k 为偶数的数作为另一组.

显然，每一组中，没有一个数是另一个数的两倍.

例 10 证明：从 $1,2,\cdots,100$ 中任意选取 51 个数，其中必有一个数是另一个数的倍数.

基本思路 将数表示成 $2^k\cdot j$ 的形式，然后根据奇数 j 的值分组，并应用抽屉原理.

解 将 $1,2,\cdots,100$ 表示成 $2^k\cdot j$ 的形式，其中 k 为非负整数，j 为正奇数.

显然 j 只有 50 种可能，即 $1,3,5,\cdots,99$. 将 j 相同的数放在同一组，这样就得到 50 个组.

$\{1,2,4,8,16,32,64\}$,

$\{3,6,12,24,48,96\}$,

$\{5,10,20,40,80\}$,

……

$\{99\}$.

同一组中的两个数 $2^k\cdot j$ 与 $2^h\cdot j(k<h)$，由于 j 相同，一个是另一个的倍数(2^{h-k} 倍).

现在任取 51 个数. 由抽屉原理，这 51 个数中必有两个在同一组，所以必有一个是另一个的倍数.

说明 (1) 抽屉原理的通俗说法就是“将 5 个苹果放在 4 只抽屉里，必有一个抽屉里至少有 2 个苹果.”一般地，“将 $n+1$ 个元素

分为 n 组，必有一组至少含 2 个元素."

(2) 例 10 中的 100 与 51 可以分别改为 $2n$ 与 $n+1$.

练　习　1.1

1. 设四个自然数之和为 1989，求证：它们的立方和不是偶数.

2. 试证明：不存在 2 个自然数，它们的差与和的乘积等于 1990.

3. 求证：17 个同学聚会，不可能每人恰好握了 3 次手.

4. 圆周上有 1999 个点，给每一个点染两次颜色，每次染红色或蓝色，共染红色 1999 次，染蓝色 1999 次. 试证明：至少有一个点两次染的颜色不同.

5. 设有 n 盏亮着的灯，每盏都用拉线开关，如果规定每次必须同时拉动 $n-1$ 个拉线开关. 试问：能否把所有的灯都关闭？证明你的结论.

6. 如果两人互相握手，那么每人都记握手一次. 求证：握手是奇数次的人的总数一定是偶数.

7. 桌上有 6 只盘子排成一列，雅克从中任取 2 只——一手一只. 将这 2 只盘子移到与原来位置相邻的地方(向左或向右均可). 如果该处已有盘子，那么将这只放在原有的上面. 问能否通过上面的操作将所有的盘子并为一堆？

8. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一组数，它们中的每一个都取 $+1$ 或 -1，而且 $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$，证明 n 必须是 4 的倍数，并推广这一命题.

9. 设 n 是大于 1 的自然数，证明

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

不是整数.

10. 设 $n > 0, a \geqslant 2$，证明 n^a 能够表示成 n 个连续的奇数的和.

11. 证明：没有一个形如 2^n(n 为任意自然数)的数可以表示成 2 个或 2 个以上连续自然数之和.

12. 记 A_n 为小于 $(\sqrt{3}+1)^{2n}$ 的最大整数，证明：$A_n + 1$ 能被 2^{n+1} 整除 $(n \geqslant 1)$.

13. 边长为 n 的正三角形 ABC 被三组平行线(分别平行于 AB, BC, CA)分成 n^2 个小的正三角形，每一个的边长为 1. 现在将这些小三角形的顶点染

上红色、蓝色或白色，满足下列条件：

(1) AB 上的点不染红色；

(2) BC 上的点不染蓝色；

(3) CA 上的点不染白色.

证明：存在一个边长为 1 的三角形，它的顶点分别为红、蓝、白三种颜色.

*14. 是否存在一个 $\mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{N}$ 的函数 f，满足：对所有 $n\in\mathbf{N}$，

$$f^{(1999)}(n)=2n,$$

这里 $f^{(k)}(n)=\overbrace{f(f(f(\cdots f}^{k\uparrow f}(n)\cdots)))$

§1.2 带余除法

1.2.1 带余除法

熟知："被除数等于除数乘以商再加余数". 也就是说，对于自然数 a 和 b，总可以找到一对唯一确定的非负整数 q,r，满足

$$a=qb+r,\quad 0\leqslant r<b. \tag{1.2.1}$$

这里 q 称为商，r 称为余数.

要说明 q,r 存在，只需注意

$$0,b,2b,3b,\cdots \tag{①}$$

严格增加，其中必有两项将 a"夹住"，即有非负整数 q 使

$$qb\leqslant a<(q+1)b. \tag{⑤}$$

令

$$r=a-qb, \tag{⑥}$$

则(1.2.1)式成立.

另一方面，如果 q,r 满足(1.2.1)式，那么 q 满足 ⑤ 式，因而 q 是唯一的. r 必须满足 ⑥ 式，也是唯一确定的.

实际上 q 是 $\frac{a}{b}$ 的整数部分，即 $q=\left[\frac{a}{b}\right]$.

(1.2.1)式称为带余除法或欧几里得(Euclid)算法，在数论中

极为重要.

例 1 请在 503 后面添 3 个数字，使所得的 6 位数被 7,9,11 整除.

基本思路 取数 504000 与 $7 \times 9 \times 11$ 做除法，然后，运用 (1.2.1) 式可得欲添的数字.

解 要使所得的 6 位数被 7,9,11 整除，则这个 6 位数必须被 $693(=7 \times 9 \times 11)$ 整除.

做除法 $504000 \div 693$，得

$$504000 = 693 \times 727 + 189,$$

因此，

$$504000 - 189 = 503811(=693 \times 727),$$

$$503811 - 693 = 503118(=693 \times 726),$$

它们都能被 693 整除.

于是，所添数字是 8,1,1 或 1,1,8.

说明 7,9,11 的最小的倍数为 $7 \times 9 \times 11 = 693$.

1.2.2 最小公倍数与最大公约数

定义 1.2 如果 a 是 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的倍数，那么 a 称为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的公倍数. 公倍数中最小的一个称为最小公倍数，记为 $[b_1, b_2, \cdots, b_n]$.

例 1 中 $7 \times 9 \times 11 = 693$ 就是 $7 \times 9 \times 11$ 的最小公倍数，即 $[7, 9, 11] = 693$. 再如 3,4,18 的最小公倍数是 36，即 $[3, 4, 18] = 36$.

定义 1.3 如果 b 是 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的约数，那么 b 称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公约数. 公约数中最大的一个称为最大公约数，记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

如果两个数的最大公约数是 1，那么这两个数称为互质.

例如，$(8,9) = 1$，即 8 与 9 互质.

特别地，根据定义得到

$$(a,1) = 1. \qquad (1.2.2)$$

即 1 与任意一个自然数互质.

易知 $a \pm b$ 与 b 的公约数一定是 a 与 b 的公约数. 反过来,a 与 b 的公约数也是 $a \pm b$ 与 b 的公约数,所以

$$(a \pm b, b) = (a, b). \tag{1.2.3}$$

如果 d 是 a 的因数(约数),那么

$$(a, d) = d. \tag{1.2.4}$$

如何求两个或更多个数的最大公约数?

求 a, b 两个数的最大公约数可以按以下步骤进行:

不妨设 $a > b$,首先写出

$$a = qb + r,\ 0 \leqslant r < b.$$

由(1.2.3)式得

$$(a, b) = (a - b, b) = \cdots = (a - qb, b) = (b, r).$$

问题化为求 (b, r).

再由带余除法,写出

$$b = q_1 r + r_1, \qquad 0 \leqslant r_1 < r.$$

同理得

$$(b, r) = (r, r_1).$$

问题化为求 (r, r_1). 如此继续下去,

$$r = q_2 r_1 + r_2, \qquad 0 \leqslant r_2 < r_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_{k-1} = q_{k+1} r_k + r_{k+1}, \qquad 0 \leqslant r_{k+1} < r_k,$$

$$\cdots\cdots$$

由于非负整数 $r_1 > r_2 > \cdots$,严格递减,因此,经过若干步将有

$$r_{n+1} = 0,$$

这时,

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}.$$

这表明 r_n 是 r_{n-1} 的约数,所以 $(r_n, r_{n-1}) = r_n$.

于是,

$$(a, b) = (b, r) = (r, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

这就给出求 (a, b) 的一个方法.

例 2 求(27,15).

解 $27 = 1 \times 15 + 12$,

$15 = 1 \times 12 + 3$,

$12 = 4 \times 3$.

所以 $(27,15) = 3$.

以上步骤可以缩简为下面的算式.

27	1	15
15	1	12
12	4	3
12		

每次的商 1,1,4 写在两道竖线之间. 这种演算通常称为辗转相除法.

求最大公约数还可以利用质因数分解(请参见 §1.4). 例 2 如用后者更为简单. 但在难以进行质因数分解时,就需要用辗转相除法.

例 3 大厦公司销售某种货物,去年总收入为 36963 元. 今年每件货物的售价(单价)不变,总收入 59570 元. 如果单价(以元为单位)是大于 1 的整数,问今年与去年各售这种货物多少件?

解 单价是 36963 与 59570 的公约数,由辗转相除法得出 $(36963,59570) = 37$.

36963	1	59570
22607	1	36963
14356	1	22607
8251	1	14356
6105	1	8251
4292	2	6105
1813	1	2146
1665	5	1813
148	2	333
148	4	296
—		37