随机积分的一般理论

上　　册

中国科学院数学研究所概率统计室
长沙铁道学院科技情报室

一九七七年五月

原书缺页

下册（待续）分章目录

前　言

众所周知，在连续时间线性系统的滤波理论中，无论是模型方程，还是滤波方程都是用“随机微分方程”——更确切地说，是用“随机积分方程”——来描述的。因为对一个随机过程 X_t 的积分 $\int f\,dX_t$ 可以说得更严格，但对它的微分 dX_t，即使是性质非常好的布朗运动 W_t，其微商 $\xi_t=\frac{dW_t}{dt}$ ——通常称为“白噪声”——的精确意义也是通过对 ξ_t 的随机积分来表达的。因此随机积分这一工具对连续时间系统——无论线性、还是非线性，集中参数、还是分布参数——的滤波理论是不可缺少的基础之一。

最简单的随机积分出现于宽平稳过程的“谱表示”中：$\int e^{it\lambda}dZ_\lambda$ 其中 Z_λ 是正交增量过程。随后出现了对布朗运动 W_t 的 Itô 积分 $\int \Phi_t\,dW_t$，这时被积函数 Φ_t 已推广成随机过程（谱表示中的被积函数 $e^{it\lambda}$ 是非随机的）。这是目前在滤波、控制及其它估计理论中出现得最多的一类随机积分，其中布朗运动 W_t 用来描述随机干扰。但是实际问题中的“随机干扰”用布朗运动来描述未必十分拟合。因此，如果能对更广的一类过程推广随机积分的定义，我们就能有更大的灵活性去选择更能拟合实际问题中“随机干扰”的过程来建立模型。

适应这一需要的理论上的突破是六十年代完成的。Meyer 在 1962——1963 年解决了 Doob 提出了十几年而未得到解决的“上鞅分解的问题”；1967 年，Kunita 和 Watanabe 利用 Meyer 关于上鞅分解的新结果，把随机积分的定义从对布朗运动推广到对一类相当广的——称为“平方可积鞅”的——过程类；1970 年 Doléans 和 Meyer 又推广到对一类更广的——称为“半鞅”的——过程类。这些结果自然很快就应用到滤波等估计理论问题中，现在已经有不少文章讨论用“半鞅”来描

述随机干扰所建立起来的模型。

对半鞅的随机积分本质上是由两种性质很不一样的随机积分组成的：一是对局部平方可积鞅的随机积分，一是对有限变差过程按轨道的勒贝格——斯蒂阶积分。本书的第一篇“随机测度论”就是把这两种性质不同的随机积分抽象化，模仿测度论的方法讨论抽象可测空间（E，$\mathscr{E}$）上取“随机变量”值的集函数——当它满足适当条件时，就称为随机测度——以及对随机测度的积分理论。

第二篇是“对半鞅的积分”。Doleans 和 Meyer 讨论对半鞅的积分时，把半鞅分解成局部鞅和有限变差过程之和，这样对局部鞅的积分部份需要引进构造比较复杂、定义也不十分自然的“乘积变差过程”的概念；当然，对这一概念研究得比较透彻以后，揭示了对局部鞅的积分和对局部平方可积鞅的积分有许多相似之处。我们则从另一个角度，即用“随机测度论”的方法来研究对半鞅的积分。有了第一篇的一般理论，只要用“半鞅”产生出“随机测度”，积分的定义和性质也就有了，这一篇可看成是第一篇的“应用”。当然我们也论证我们的定义与 Doleans-Meyer 的定义是一致的，并用一定的篇幅讨论不同半鞅所产生随机测度之间的相互关系以及整体性的性质。

第三篇“随机场的一般理论”和第四篇“对某些随机场的随机积分”的目的在于为分布参数的滤波、控制和其它估计理论以及“随机偏微分方程”提供必要的数学工具。能把对半鞅的积分看成是“随机测度论”的应用要归功于“随机过程的一般理论”这一新学科，因此要把“随机测度论”应用到对随机场的积分就需要把“随机过程的一般理论”的一些概念和结果推广到随机场的情形，第三篇正是承担了这一任务。第四篇讨论对“正交随机场”（正交增量过程的推广）、“有限变差场”（有限变差过程的推广）和“鞅场”（平方可积鞅的推广）的积分。

本书基本上全是研究成果，但尽量作到在下列意义下自给，有了测度论、概率论基本概念和泛函分析的初步知识就能读懂，不需要“随机过程的一般理论”和对半鞅的随机积分这些比较近代的概率论基础。当然如果熟悉这些内容，就能更容易地理解本书的结果。不过应该指出，第二篇的写法是以“随机过程的一般理论”的概念和结果为已知作前提的，没有读过这方面内容的读者可把第二、三篇的次序颠倒过来读。我们把“随机过程的一般理论”中必要的概念和结果推广到随机场的情形，读了随机场，把随机过程看成是参数空间为一维的随机场便得到了作为第二篇的预备知识的“随机过程的一般理论”。

第一篇：随机测度论

第一章：随机测度

§1. 随机测度

设（Ω，$\mathcal{F}$，P）是完备概率空间，L是全体有限值随机变量依准范数 $\|X\|_L = \mathbb{E}\dfrac{|X|}{1+|X|}$ 所构成的Fréchet空间，这里$\mathbb{E}$是（Ω，$\mathcal{F}$，P）上的期望积分。把L看成Fréchet空间，自然意味着不计几乎处处相等随机变量之间的差别，用L_+表示全体非负有限值随机变量所组成的闭凸集，并把L的子空间与L_+之交称为L的正半子空间。这样，L_+是“最大的”正半子空间。

再设E是任意集，$\mathcal{E}$是E的某些子集组成的任一集族。

定义1. 定义在$\mathcal{E}$上取值于L_+中的集函数Z称为随机测度，简记成S.M.，如果它具有可列可加性，即对$F_n \in \mathcal{E}$，$n \geq 0$，$\{F_n\}_{n\geq 1}$两两不交，$F_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，我们有

$$Z(F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(F_n).$$

从定义马上可知，若$\phi \in \mathscr{E}$，则$Z(\phi)=0$，且这时Z具有有限可加性：$F_k \in \mathscr{E}$，$\{F_k\}_{1\le k\le n}$两两不交，且$\bigcup_{k=1}^{n} F_k \in \mathscr{E}$，则$Z(\bigcup_{k=1}^{n} F_k)=\sum_{k=1}^{n} Z(F_k)$.

当然最重要的情形还是（E，$\mathscr{E}$）为可测空间的情形，即$\mathscr{E}$为σ-域的情形。定义得更广一些是为了"建立"随机测度的需要，即在比较简单的集族（如半环或环）上有自然的方法给出随机测度的定义，然后利用扩张定理得到定义在由它们所生成的σ-域上的随机测度。

定理1—1．设$\mathscr{E}=\mathscr{P}$是半环，则定义在$\mathscr{P}$上的S.M. Z可唯一地扩张成$\mathscr{P}$所生成的环$\mathscr{R}(\mathscr{P})$上的S.M.，仍记作Z.

证明：$\mathscr{R}(\mathscr{P})=\left\{\bigcup_{i=1}^{n} F_i : F_i \in \mathscr{P}, \{F_i\}_{1\le i\le n}\text{两两不交}\right\}$

从半环含ϕ，因而Z有限可加即可以证明：若$\{F_i\}_{1\le i\le n}$和$\{F_j'\}_{1\le j\le m}$分别都是$\mathscr{P}$中两两不交的族，且满足$\bigcup_{i=1}^{n} F_i=\bigcup_{j=1}^{m} F_j'$，那么

$$\sum_{i=1}^{n} Z(F_i)=\sum_{j=1}^{m} Z(F_j') .$$

这样对$\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathscr{R}(\mathscr{P})$，$\{F_i\}_{1\le i\le n}$两两不交，$F_i \in \mathscr{P}$，$1\le i\le n$，令

$$Z(\bigcup_{i=1}^{n} F_i)=\sum_{i=1}^{n} Z(F_i) ,$$

则Z是定义在环$\mathscr{R}(\mathscr{P})$上，取值于L_+中的集函数，我们来验证Z是$\mathscr{R}(\mathscr{P})$上的S.M.

设$\{E_n\}_{n\ge 0}\subset\mathscr{R}(\mathscr{P})$，$\{E_n\}_{n\ge 1}$两两不交，$E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$．表$E_n=\bigcup_{j=1}^{N_n} F_{nj}$，$\{F_{nj}\}_{1\le j\le N_n}\subset\mathscr{P}$两两不交，$n\ge 0$，那么

$$F_{0j}=F_{0j}\cap E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_{0j}\cap E_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{N_n}(F_{0j}\cap F_{ni}),$$

从而

$$Z(E_0)=\sum_{j=1}^{N_0}Z(F_{0j})=\sum_{j=1}^{N_0}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N_n}Z(F_{0j}\cap F_{ni})$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_0}Z(F_{0j}\cap F_{ni})\Big],$$

此外

$$Z(E_n)=\sum_{i=1}^{N_n}Z(F_{ni})=\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_0}Z(F_{0j}\cap F_{ni}),$$

故 $Z(E_0)=\sum_{n=1}^{\infty}Z(E_n)$．唯一性是显然的，证毕。

环上的S.M.具有"单调性"：$F_1\subset F_2$推出$Z(F_1)\leqslant Z(F_2)$；"可减性"：$F_1\subset F_2$意味着

$Z(F_2\setminus F_1)=Z(F_2)-Z(F_1)$；"空集处的上連续性"：$F_n\subset F_{n-1}$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\emptyset$，则$\lim_{n\to\infty}Z(F_n)=0$；"任一元处的连续性"：$F_n\subset F_{n+1}$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=F$，则

$\lim_{n\to\infty}Z(F_n)=Z(F)$，或$F_n\subset F_{n-1}$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=F$，那么

$\lim_{n\to\infty}Z(F_n)=Z(F)$，这些都是极易验证的性质。对环上的"有限可加"集函數，"可列可加"与"空集处上連续"是等价的性质，它们还与"任一元处下连续"这一性质等价。在论证环上的集函數是S.M.时，往々在验证了有限可加性以后，验证"空集处上连续"代替验证"可列可加性"。

下面讨论环上的S.M.如何扩張到б-域上的问题。设$\mathscr{E}=\mathscr{R}$是环，且存在$E_n\in\mathscr{R}$上升趋于E，Z是$\mathscr{R}$上的"有界"S.M.：即存在$\xi\in L_+$，使得对一切$F\in\mathscr{R}$，$Z(F)\leqslant\xi$．

引理 1．Z 可唯一地从 $\mathcal{R}$ 扩张到 $\mathcal{R}_\sigma$ 上．

证明：$\mathcal{R}_\sigma$ 是用可列併封闭 $\mathcal{R}$ 所得到的集族，它封闭于有限交和可列併的运算，每一个 $F\in\mathcal{R}_\sigma$ 有形状：$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, $F_n\subset F_{n+1}$, $F_n\in\mathcal{R}$．我们令 $Z(F)=\lim\limits_{n\to\infty}Z(F_n)\leqslant\xi$．

这样的定义是一意的：若 $\{F_n\}$、$\{F_m'\}\subset\mathcal{R}$ 都上升趋于 $F\in\mathcal{R}_\sigma$，则 $F_n\cap F_m'$ 当 $n\longrightarrow\infty$ 时上升趋于 $F_m'\in\mathcal{R}_\sigma$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}Z(F_n\cap F_m')=Z(F_m')$，

$$\lim_{n\to\infty}Z(F_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}Z(F_n\cap F_m')=Z(F_m').$$

m 任意，故 $\lim\limits_{n\to\infty}Z(F_n)\geqslant\lim\limits_{m\to\infty}Z(F_m')$．但两个序列地位对称，相反的不等式也成立。这就是一意性。

Z 在 $\mathcal{R}_\sigma$ 上是可加的，设 F、$G\in\mathcal{R}_\sigma$，$F\cap G=\varnothing$，取 $\{F_n\}$、$\{G_n\}\subset\mathcal{R}$，$F_n$ 上升趋于 F，G_n 上升趋于 G，则 $\{F_n\cup G_n\}$ 上升趋于 $F\cup G$，且 $Z(F\cup G)=\lim\limits_{n\to\infty}Z(F_n\cup G_n)$
$=\lim\limits_{n\to\infty}[Z(F_n)+Z(G_n]=Z(F)+(G)$．

Z 在 $\mathcal{R}_\sigma$ 的任意元 F 处是下连续的：设 $\{F_n\}\subset\mathcal{R}_\sigma$ 上升趋于 F，取 $\{G_m^n\}_{m\geqslant1}\subset\mathcal{R}$ 上升趋于 F_n，必要时用 $\bigcup_{k=1}^{n}G_m^k$ 代替 G_m^n，可假定对固定的 m，G_m^n 随 n 的增大而上升。对 $k\leqslant n$, $G_n^k\subset G_n^n\subset F_n$ 知 $F_k\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^n\subset F$，令 $K\longrightarrow\infty$ 知 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^n$，这样 $Z(F)=\lim\limits_{n\to\infty}Z(G_n^n)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}Z(F_n)$，相反的不等式自然成立。这样，$Z$ 是 S.M.，唯一性是显然的。

在进一步扩张时，需要用到"本质下确界"的概念，对称的"本质上确界"的概念今后也要用，我们在此一起叙述。

引理 2．$\mathcal{H}\subset L$ 称为"上有界"，如果任给 $\eta\in\mathcal{H}$，$\eta\leqslant\xi$．

其中 $\xi\in L$ 是固定的元。上有界的 $\mathcal{H}$，必有"本质上确界"
$\operatorname{ess\,sup}\mathcal{H}\in L$，它具有下列性质：

(i). 任给 $\eta\in\mathcal{H}$，$\eta\leqslant\operatorname{ess\,sup}\mathcal{H}$，

(ii). 如果 ξ 使得任给 $\eta\in\mathcal{H}$，均有 $\eta\leqslant\xi$，

则 $\operatorname{ess\,sup}\mathcal{H}\leqslant\xi$.

对称地，L中"下有界"的族子 $\mathcal{H}$ 必有"本质下确界" $\operatorname{ess\,inf}\mathcal{H}$，它是L中不大于 $\mathcal{H}$ 中每一元素的最大随机变量。

证明：$\mathcal{H}$ 有"本质上确界"当且仅当

$$\mathcal{H}^*=\left\{\bigvee_{k=1}^{n}\xi_k:\ \xi_k\in\mathcal{H},\quad 1\leqslant k\leqslant n,\ n\geqslant 1\right\}$$

有"本质上确界"，故可仅就 $\mathcal{H}$ 封闭于 $\vee$ 这一运算的情形证明之。进而 $\mathcal{H}$ 有"本质上确界"当且仅当任意取定 $\xi_0\in\mathcal{H}$ 后，

$$\mathcal{H}^0=\{\xi-\xi_0\geqslant 0,\quad \xi\in\mathcal{H}\}$$

有"本质上确界"，而且这时 $\operatorname{ess\,sup}\mathcal{H}=\operatorname{ess\,sup}\mathcal{H}^0+\xi_0$.
因此可仅就 $\mathcal{H}$ 的元均为非负随机变量的情形验证之。这时只要令 $\alpha=\sup\|\eta\|_L$，并取 $\eta_n\in\mathcal{H}$，η_n 上升，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\eta_n\|=\alpha$，
则容易验证

$\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n\leqslant\xi$ 是L中具有对 $\operatorname{ess\,sup}\mathcal{H}$ 所要求一切性质的元，即

$$\operatorname{ess\,sup}\mathcal{H}=\lim_{n\to\infty}\eta_n.$$

定义2. 在E的一切子集所成的族 $\mathfrak{P}(E)$ 上定义，在 L_+ 中取值的集函数 Z^* 称为"随机外测度"，如果 $Z^*(\varnothing)=0$，而且具有

(i). 单调性：$G_1\subset G_2\subset E\Rightarrow Z^*(G_1)\leqslant Z^*(G_2)$，

(ii). 半可列可加性：$\{G_n\}\subset\mathfrak{P}(E)$，则

$$Z^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}Z^*(G_n).$$

引理3. 设Z是$\mathcal{R}_\sigma$ 上的有界S.M.，$E\in\mathcal{R}_\sigma$，则对每一个$G\subset E$，令

$$Z^*(G)=\operatorname{ess\,inf}\{Z(F):\ F\supset G,\ F\in\mathcal{R}_\sigma\},$$

集函数Z^*是一个随机外测度。

证明：$\mathcal{R}_\sigma$封闭于有限交的运算，故对每一个$G\subset E$，存在$\{F_n\}\subset\mathcal{R}_\sigma$，$F_n$下降趋于G，且使得$\lim\limits_{n\to\infty}Z(F_n)=Z^*(G)$.

$Z^*(\emptyset)=0$和(i)直接从定义推出。为验证(ii)，任给$\varepsilon>0$，对G_n取$F_n^\varepsilon\in\mathcal{R}_\sigma$，$F_n^\varepsilon\supset G_n$，使得

$$\|Z(F_n^\varepsilon)-Z^*(G_n)\|_L\leq\varepsilon/2^n,$$

则

$$Z^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n)\leq Z(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n^\varepsilon)\leq\sum_{n=1}^{\infty}Z(F_n^\varepsilon)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}Z^*(G_n)+\sum_{n=1}^{\infty}[Z(F_n^\varepsilon)-Z^*(G_n)]$$

令$\varepsilon\to0$，由于$\|\sum_{n=1}^{\infty}[Z(F_n^\varepsilon)-Z^*(G_n)]\|_L\leq\sum_{n=1}^{\infty}\|Z(F_n^\varepsilon)-Z^*(G_n)\|_L$
$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon/2^n=\varepsilon\to0$，可见

$$Z^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}Z^*(G_n).$$

定义3. 设Z^*是随机外测度，$F\subset E$称为Z^*—可测集，如果对任何$A\subset E$，

$$Z^*(A)=Z^*(A\cap F)+Z^*(A\cap F^c),$$

其中$F^c=E\setminus F$是F的补集。全体Z^*可测集所成的族记做$\mathfrak{S}(Z^*)$.

引理4. $\mathfrak{S}(Z^*)$是σ-域，Z^*限于$\mathfrak{S}(Z^*)$是S.M.

证明：　设F、$G\in\mathfrak{S}(Z^*)$，则任给$A\subset E$，

$$Z^*(A)=Z^*(A\cap F)+Z^*(A\cap F^c)$$

$$=Z^*(A\cap F\cap G)+Z^*(A\cap F\cap G^c)+Z^*(A\cap F^c\cap G)$$

$$+Z^*(A\cap F^c\cap G^c)$$

$$=Z^*(A\cap(F\cup G)\cap F\cap G)+Z^*(A\cap(F\cup G)\cap F\cap G^c)$$

$$+Z^*(A\cap(F\cup G)\cap F^c\cap G)+Z^*(A\cap(F\cup G)\cap F^c\cap G^c)$$

$$+Z^*(A\cap(F\cup G)^c)$$

$$=Z^*(A\cap(F\cup G))+Z^*(A\cap(F\cup G)^*)$$

故 $F\cup G\in\mathfrak{S}(Z^*)$. $\mathfrak{S}(Z^*)$ 显然对求补集运算封闭，因此 $\mathfrak{S}(Z^*)$ 是域。

设 $\{F_k\}_{1\leq k\leq n}\subset\mathfrak{S}(Z^*)$ 两两不交，则任给 $A\subset E$.

$$Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{n}F_k))=Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{n}F_k)\cap F_1)+Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{n}F_k)\cap F_1^c)$$

$$=Z^*(A\cap F_1)+Z^*(A\cap(\bigcup_{k=2}^{n}F_k))=\cdots=\sum_{k=1}^{n}Z^*(A\cap F_k)$$

特别，取 $A=E$，知 Z^* 限于 $\mathfrak{S}(Z^*)$ 是有限可加的。

设 $\{F_n\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathfrak{S}(Z^*)$ 中两两不交的集列，从

$$Z^*(A)=Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{n}F_k))+Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{n}F_k)^c)$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}Z^*(A\cap F_k)+Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)^c)$$

对一切 n 成立知

$$Z^*(A)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}Z^*(A\cap F_k)+Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)^c)\geqslant Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k))+Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)^c)$$

而相反的不等式 $Z^*(A)\leqslant Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k))+Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)^c)$

是随机外测度的固有性质，可见

$$Z^*(A)=Z^*\left(A\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)\right)+Z^*\left(A\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)^c\right).$$

这表明$\mathfrak{S}(Z^*)$对可列不交併运补封闭，从而是σ-域。

在等式

$$Z^*(A)=\sum_{k=1}^{\infty}Z^*(A\cap F_k)+Z^*(A\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)^c)$$

中取$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$即知$Z^*$限于$\mathfrak{S}(Z^*)$是可列可加的，从而是S.M.

定理1—2．设$\mathscr{E}=\mathscr{R}$是环，且存在$E_n\in\mathscr{R}$上升趋于E，Z是$\mathscr{R}$上的有界S.M.，则Z可唯一地扩张成由$\mathscr{R}$所生成的σ-域$\sigma(\mathscr{R})$上的有界S.M.

证明：从定义3可直接验证每一个$F\in\mathscr{R}$是Z^*-可测集，即$\mathscr{R}\subset\mathfrak{S}(Z^*)$，从而$\sigma(\mathscr{R})\subset\mathfrak{S}(Z^*)$．而根据$Z^*$的定义，显然对每一个$F\in\mathscr{R}$，甚至对每一个$F\in\mathscr{R}_\sigma$，均有$Z^*(F)=Z(F)$.因此$Z^*$限于$\mathfrak{S}(Z^*)$——当然$Z^*$限于$\sigma(\mathscr{R})$也——是Z的扩张。存在性得证。

为证唯一性，设Z_1、Z_2是Z的两个扩张，令

$$\mathscr{M}=\left\{F\in\sigma(\mathscr{R});\quad Z_1(F)=Z_2(F)\right\},$$

则$\mathscr{M}$是包含$\mathscr{R}$的单调类，故$\mathscr{M}=\sigma(\mathscr{R})$。

今后，我们把Z^*限于$\sigma(\mathscr{R})$仍记作Z．对任给的$G\subset E$，存在一个$F\in\mathscr{R}_{\sigma\delta}\subset\sigma(\mathscr{R})$，使得$G\subset F$，且$Z^*(G)=Z(F)$.具有这一性质的$F\in\sigma(\mathscr{R})$称为G的"可测覆盖"。如果$G\in\mathfrak{S}(Z^*)$，对G的可测覆盖F，我们有$Z^*(F\setminus G)=0$，即$\mathfrak{S}(Z^*)$中的集与$\sigma(\mathscr{R})$中的集可以只差一个"随机外测度"$Z^*$为0的集。更精确地说，我们用下述概念把$\sigma$-域$\mathfrak{S}(Z^*)$的结构描述清楚．

定义4．$\Lambda\subset E$称为Z^*-可略集，如果$Z^*(\Lambda)=0$.全体Z^*-可略集的族记作$\mathcal{N}(Z^*)$，这是一个可传σ-环，即是一个σ-环，

而且$N\in\mathcal{N}(Z^*)$，$\Lambda\subset N$，便有$\Lambda\in\mathcal{N}(Z^*)$．

σ-域$\mathfrak{S}(Z^*)$是由$\mathfrak{S}(\mathcal{R})\cup\mathcal{N}(Z^*)$所生成的σ-域，事实上$\mathfrak{S}(Z^*)=\{F\cup\Lambda:F\in\mathfrak{S}(\mathcal{R});\Lambda\in\mathcal{N}(Z^*)\}$，称为$\mathfrak{S}(\mathcal{R})$的Z-完备化。把$\mathcal{R}$上的有界S.M.扩张到$\mathfrak{S}(Z^*)$上也是唯一的，故今后我们把$Z^*$限于$\mathfrak{S}(Z^*)$这个S.M.也简单地记作Z．

定义5．σ-域$\mathcal{E}$上的S.M. Z称为完备S.M.，如果$N\in\mathcal{E}$，$Z(N)=0$，$\Lambda\subset N$，意味着$\Lambda\in\mathcal{E}$．

显然$\mathfrak{S}(Z^*)$上的S.M. Z是完备S.M.

§2．　符号随机测度

定义6．定义在$\mathcal{E}$上取值于L中，具有可列可加性的集函数Z称为符号随机测度，简记成S.S.M.

半环$\mathcal{P}$上的S.S.M. Z可唯一地扩张到它所产生的环$\mathcal{R}(\mathcal{P})$上，证法与定理1—1相同。

定义7．环$\mathcal{R}$上的S.S.M. Z称为"有界的"，如果存在$\xi\in L_+$，使得对一切$F\in\mathcal{R}$，$|Z(F)|\leq\xi$；称为σ-有界的，如果存在$E_n\in\mathcal{R}$上升趋于E，而且Z限于$F\cap\mathcal{R}$，对一切$F\in\mathcal{R}$，是有界的。

引理5．设$\mathcal{R}$是域，为要$\mathcal{R}$上的S.S.M. Z是有界的，当且仅当Z可表成两个S.M.之差。

证明：充分性显然。为证必要性，令

$$Z^+(F)=\text{lse}\sup\{Z(B):B\subset F,\ B\in\mathcal{R}\}$$

$$=\text{lse}\sup\left\{\bigvee_{j=1}^{n}Z(B_j):B_j\subset F,\ B_j\in\mathcal{R},\ 1\leq j\leq n\right\},$$

对F_1、$F_2\in\mathcal{R}$，$F_1\cap F_2=\emptyset$，任给$G_1^k\subset F_1$，$G_2^l\subset F_2$，G_1^k，$G_2^l\in\mathcal{R}$，

$1\leq K\leq n$，$1\leq l\leq m$．就不等式

$$\bigvee_{k=1}^{n} Z(G_1^k)+\bigvee_{l=1}^{m} Z(G_2^l)\leq \bigvee_{k,l=1}^{n,m} Z(G_1^k\cup G_2^l)$$

两边取 ess sup 知 $Z^+(F_1)+Z^+(F_2)\leq Z^+(F_1\cup F_2)$；对 $m=n$ 的情形就不等式

$$\bigvee_{k=1}^{n} Z(G_1^k\cup G_2^k)\leq \bigvee_{k=1}^{n} Z(G_1^k)+\bigvee_{k=1}^{n} Z(G_2^k)$$

两边取 ess sup 知 $Z^+(F_1\cup F_2)\leq Z^+(F_1)+Z^+(F_2)$，这样 Z^+ 是有限可加的。

若 $\{F_n\}$ 是 $\mathcal{R}$ 中两两不交的集列，对任给 N，

$$Z^+(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)=\sum_{n=1}^{N} Z^+(F_n)+Z(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} F_n)\geq \sum_{n=1}^{N} Z^+(F_n),$$

故 $Z^+(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)\geq \sum_{n=1}^{\infty} Z^+(F_n)$．反之，就

$$\bigvee_{k=1}^{m} Z(G_k)=\bigvee_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} Z(G_k\cap F_n)\leq \sum_{n=1}^{\infty}\bigvee_{k=1}^{m} Z(G_k\cap F_n)\ 让 G_k\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

$1\leq k\leq m$，再对两边取 ess sup 知 $Z^+(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)\leq \sum_{n=1}^{\infty} Z^+(F_n)$，这样 Z^+ 是有界 S.M.（与 Z 有相同的界 ξ）。

显然，$Z(F)\leq Z^+(F)$，故若令 $Z^-(F)=Z^+(F)-Z(F)$，则 Z^- 也是 S.M.，而且从

$$Z^-(F)=\operatorname{ess\,sup}\{Z(B)-Z(F):\ B\subset F,\ B\in\mathcal{R}\}$$

$$=-\operatorname{ess\,inf}\{Z(C):C\subset F,\ C\in\mathcal{R}\}\leq \xi$$

知 Z^- 也被 Z 的界所界住。我们已经把 Z 表成两个 S.M. 之差：$Z=Z^+-Z^-$．

推论：引理5的证明中所得到的 $Z=Z^+-Z^-$ 是把 Z 表成两个 S.M. 之差的"最小表示"，即如果 $Z=Z^{(1)}-Z^{(2)}$，$Z^{(1)}$、$Z^{(2)}$

也是S.M.，则 $Z^+\leq Z^{(1)}$，$Z^-\leq Z^{(2)}$．

证明：任给 $F\in\mathcal{R}$，$Z^{(1)}(F)=Z^{(2)}(F)+Z(F)\geq Z(F)$，更有，对 $B\subset F$，$Z^{(1)}(F)\geq Z^{(1)}(B)\geq Z(B)$，即 $Z^{(1)}(F)\geq Z^+(F)$，也就是 $Z^+\leq Z^{(1)}$．当然

$$Z^-=Z^+-Z\leq Z^{(1)}-Z=Z^{(2)}.$$

由此便可证明：

定理1—3．为要环 $\mathcal{R}$ 上的S.S.M. Z 是σ-有界的，当且仅当 $\mathcal{R}$ 中存在上升趋于E的集列 E_n，而且 Z 可表成两个S.M.之差．这时 Z^+：

$$Z^+(F)=\operatorname{ess\,sup}\{Z(B):\ B\subset F,\ B\in\mathcal{R}\}$$

和 $Z^-=Z^+-Z$ 是使得 $Z=Z^+-Z^-$ 的一对最小S.M.，$Z=Z^+-Z^-$ 称为 Z 的"若当分解"。如果 Z 有界，则 Z^+、Z^- 也有界。

关于"若当分解"，下列引理是有用的。

引理6．设环 $\mathcal{R}$ 上的S.S.M. X Y 是σ-有界的，而且有不交的支撑：即存在 $F_1\cap F_2=\emptyset$，使得 $F_1\cap\mathcal{R}\subset\mathcal{R}$，$F_2\cap\mathcal{R}\subset\mathcal{R}$（注意，$F_1$、$F_2$ 本身不必是 $\mathcal{R}$ 中的元），而且对任给的 $F\in\mathcal{R}$，$X(F)=X(F\cap F_1)$，$Y(F)=Y(F\cap F_2)$．那么S.S.M. $Z\triangleq X+Y$ 是σ-有界的，而且 $Z=Z^+-Z^-$，其中 $Z^+=X^++Y^+$，$Z^-=X^-+Y^-$ 是 Z 的若当分解。

证明：σ-有界性是显然的，若当分解的关系式可从下式得到：

$$\begin{aligned}
Z^+(F)&=\operatorname{ess\,sup}\{Z(B):\ B\subset F,\ B\in\mathcal{R}\}\\
&=\operatorname{ess\,sup}\{X(B\cap F_1)+Y(B\cap F_2):\ B\subset F,\ B\in\mathcal{R}\}\\
&=\operatorname{ess\,sup}\{X(B_1)+Y(B_2):\ B_1\subset F\cap F_1,\ B_2\subset F\cap F_2,\ B_1,B_2\in\mathcal{R}\}\\
&=\operatorname{ess\,sup}\{X(B_1):\ B_1\subset F\cap F_1,\ B_1\in\mathcal{R}\}\\
&\quad+\operatorname{ess\,sup}\{Y(B_2):\ B_2\subset F\cap F_2,\ B_2\in\mathcal{R}\}\\
&=X^+(F\cap F_1)+Y^+(F\cap F_2)=X^+(F)+Y^+(F).
\end{aligned}$$

定理1—4．设 $\mathcal{E}=\mathcal{R}$ 是环，且存在 $E_n\in\mathcal{R}$ 上升趋于E，