理科要覽

平面三角學

駱師曾 匡文濤編
顧正容修訂

商務印書館

理科要覽

平面三角學

駱師曾　匡文濤編
顧正容修訂

商務印書館

理 科 要 覽

平 面 三 角 學

駱師曾 匡文濤編
顧 正 容 修 訂

商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號
〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕
新 華 書 店 總 經 售
商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷
上海天通菴路一九〇號
(51118)

開本 787×1092 1/42　　印張 3 7/21
1937 年 6 月初版　　1953 年11月13版(修訂本)
1956 年 2 月18版　　印數 90,501—130,500
(2月第1次印)　　定價(7) ¥0.29

出 版 者 的 話

一、 本書的取材是將平面三角學的基本內容及其主要應用作一簡括的介紹。希望一方面能幫助高中學生從課外閱讀中獲得知識的熟習與鞏固；一方面能作爲目前正在蓬勃發展中的業餘學校的參考教材或一般社會青年的自修讀物。

二、 本書所採編排方式是：偶數面上列敍定義、定理、方法、例題和習題等作爲學習的主要內容；奇數面上除第一面爲緒論外，其餘都是習題的解答。這樣做，是希望學習原理和正確解題能夠取得緊密的配合與聯系。因此，對於讀者就不能不提出一個要求：在學會原理、看懂習題之後，不要先看習題解答，必須自己先盡力對習題作出演算或推證，然後再和解答互相對照。本書所選習題不多，但都略具代表性或典型性，讀者先自努力求解，實具有一種必要的意義。

三、 初版在十八年前，迄今共印行九萬册，說明它是能滿足一部分社會需要的。在此次修訂過程中，作了若干增删，和校正了一些脫誤，在內容和水平方面，企圖更能滿足最大多數讀者的需要。但錯誤或不夠恰當之處，事實上仍是難免的，希望讀者隨時提出意見，以便再版時加以改正！

1955.9.

目　　次

頁數

緒論……1
1. 角……2
三角函數的定義和基本關係……4
三角恆等式的證法(一)……6
三角恆等式的證法(二)……8
三角恆等式的證法(三)……10
餘角和45°、60°、30°的三角函數……12
簡單的測量(一)……14
簡單的測量(二)……16
任意的角度……18
三角函數的線值……20
2. 三角函數的變化……22
兩角的函數關係(一)……24
兩角的函數關係(二)……26
二角和的正弦及餘弦……28
二角差的正弦及餘弦……30
二角和及差的正切及餘切……32
二倍角的正弦和餘弦……34
二倍角的正切和餘切……36
三倍角的三角函數……38
倍角的三角函數習題……40
變換正弦餘弦的乘積爲和及差……42
變換正弦餘弦的和及差爲乘積……44
半角的三角函數(一)……46
半角的三角函數(二)……48
正弦(或餘弦)的積與差的關係……50
恆等式的證法(一)……52
恆等式的證法(二)……54
對數的意義和公式……56
常用對數的意義和指標與假數……58
從眞數求對數的方法……60
從對數求眞數的方法……62
從角度求三角函數的對數……64
用對數解直角三角形……66
三角形邊和角的關係(一)……68
三角形邊和角的關係(二)……70
三角形邊和角的關係(三)……72
三角形邊和角的關係(四)……74
三角形邊角關係的運用……76
三角形邊和半角的關係……78
三角形的面積……80
三角形的外接圓……82
三角形內切圓和傍切圓的半徑……84
三角形的中線和角的平分線……86
任意三角形的解法(一)……88
任意三角形的解法(二)……90
任意三角形的解法(三)……92
任意三角形的解法(四)……94
任意三角形的解法(五)……96
應用的範例(一)……98
應用的範例(二)……100
應用的範例(三)……102
應用的範例(四)……104
航海應用的範例……106
物理應用的範例……108
反三角函數(一)……110
反三角函數(二)……112
反三角函數(三)……114
反三角函數(四)……116
三角方程式解法(一)……118
三角方程式解法(二)……120
三角方程式解法(三)……122
三角方程式解法(四)……124
三角方程式解法(五)……126
三角方程式解法(六)……128
三角方程式解法(七)……130
消去法示例(一)……132
消去法示例(二)……134

1. 「三角學」一辭的由來　三角學這一名辭是從希臘文譯來的。希臘文原意是「三角形的量度」，因爲它研究怎樣利用三角形中已知的邊和角來推算未知的邊和角以及其他的因素如高線、中線或面積等等。現在三角學的基本內容仍然是研究這些問題。

2. 三角函數的意義　在 $y=ax+b$、$y=x^2$ 等代數式中，y 的變化必定對應着 x 的變化，這就稱 y 爲 x 的函數；或具體地說，例如，圓面積必隨其半徑而變化，這就稱圓面積爲其半徑的函數。在三角學中，制定幾種隨着角的改變而變化的補助量來建立三角形邊和角之間的定量關係（參閱本書第 4 頁），這些補助量對計算三角問題具有決定性意義，因此，稱它們爲三角函數。

3. 三角學的應用　在實際工作中，三角學有着廣泛的應用：在一般測量中決定高度和遠度；在天文學上測定恆星高度、方位、赤經和赤緯以及規定天體坐標等；在物理學、電工學和機械學方面，更是經常地利用三角學的理論和方法。

4. 三角學發展簡史　三角學的創立是和當時因農業及航海需要而成長的天文學有密切關聯的。紀元前一百多年，希臘學者希柏柯已創作了三角表，其後約二百年，門尼拉又發現球面三角原理，而著名天文學者托來梅更訂出半徑爲 1 的圓的弦長表。在中世紀，印度和阿拉伯學者則先後作了正弦表，發現了正切函數，用文字說明了公式 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 的意義。15 世紀德國學者米勒已指出三角學有其獨立體系而不應從屬於天文學。16 世紀起，則開始用文字符號表達三角公式，使三角學萌芽了現代形式。其後，三角學和其他學科一樣，隨着社會生產的發展而日益進步，18 世紀彼得堡科學院院士歐拉更闡明了三角函數的近代理論而成爲科學史上光輝的貢獻。

角的量法	角的單位	兩種單位間的關係	習題
1. 度量法或稱爲六十分法。	一個圓心角所對的弧，如爲圓周的 $\frac{1}{360}$，就稱爲一度。這是最常用的角度單位。1 度等於 60 分，1 分等於 60 秒。 計算時寫成：$1^\circ=60', 1'=60''$。 例如：3 度 48 分 52 秒，則寫成：$3^\circ\ 48'\ 52''$。	1. 因爲 360° 相當於 2π 弳，所以 1 弳 $=\frac{360^\circ}{2\pi}=57^\circ\ 17'\ 44.8''$；而 1 度則等於 $\frac{2\pi}{360}$ 弳，就是：$1^\circ=0.01745$ 弳。	(1) 直角的 $\frac{65}{100}$ 是幾度？ (2) $97^\circ\ 5'\ 15''$ 有幾直角？ (3) 正三邊形，正五邊形，正六邊形的一內角各有幾度？
2. 弧度法或稱爲弳制。	不論圓的大小，凡和半徑等長的弧所對的圓心角，就稱爲一弳，或一弧度。這是較高級的數學和物理學最通用的一種角度單位。設圓的半徑爲 R，則圓周爲 $2\pi R$，所以整個圓心角含有 $\frac{2\pi R}{R}$ 弳，也就是 2π 弳或弧度。	2. 某角用弧量法，所得的結果爲 θ；用六十分法去量，所得的結果爲 D；則 θ 和 D 的關係是：$\frac{\theta}{\pi}=\frac{D}{180^\circ}$， 也就是， $\theta=\frac{D}{180^\circ}\pi$ 或 $D=\frac{\theta}{\pi}\times180^\circ$。	(4) 令 π 爲 $\frac{22}{7}$，則某角所含弳數的二倍和它所含的度數相加爲 $23\frac{2}{7}$，求這角的度數。 (5) 各內角成等差級數，最小的是 120°，公差爲 5°，這是幾邊形？

(1) $90^\circ\times 0.65=58.5^\circ$,

$60'\times 0.5=30'$。

答 $58^\circ\ 30'$。

(2) $97^\circ\ 5'\ 15''\div 90^\circ$

$=349515''\div 324000''$

$=1.07875$。

答 1.07875 直角。

(3) $180^\circ\div 3=60^\circ$，這是正三角形的一角。

而正五角形的一角爲

$$180^\circ-360^\circ\div 5=108^\circ。$$

正六角形的一角爲

$$180^\circ-360^\circ\div 6=120^\circ。$$

(4) 令所求的度數爲 x 度。

用弳來表示，則爲 $\frac{x}{360}2\pi=\frac{x\pi}{180}$ 弳。由題意，得

$$x+\frac{2x\pi}{180}=23\frac{2}{7}。$$

令 $\pi=\frac{22}{7}$。

則 $x\left(1+\frac{1}{90}\times\frac{22}{7}\right)=23\frac{2}{7}$。

$\therefore\ x=22\frac{1^\circ}{2}$。

答 $22^\circ\ 30'$。

(5) 設所求的邊數爲 n，則因外角的總和爲 360°，而最大的外角必定和最小的內角相鄰，所以是 $180^\circ-120^\circ=60^\circ$。

由等差級數求和的公式，得

$$\frac{n}{2}\left\{60+[60-(n-1)5]\right\}=360^\circ$$

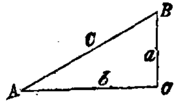
$$\therefore\ \frac{n}{2}\left\{120-(n-1)5\right\}=360^\circ,\quad 而\ n=16\ 或\ 9。$$

令 $n=16$，則最小外角爲 $60^\circ-(16-1)5^\circ=-15^\circ$；這結果不合理，所以 16 不適用。 $\therefore\ n=9$。

答 所求的爲九邊形。

定義

下列六種比值,稱爲三角函數。



設 $C=90^\circ$, 則

$\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$, 稱爲"$A$ 的正弦"

$\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$, 稱爲"$A$ 的餘弦"

$\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$, 稱爲"$A$ 的正切"

$\cot A=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$, 稱爲"$A$ 的餘切"

$\sec A=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$, 稱爲"$A$ 的正割"

$\csc A=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$, 稱爲"$A$ 的餘割"

基本關係

$$\text{倒數關係}\begin{cases}\sin A\csc A=1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \cos A\sec A=1\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ \tan A\cot A=1\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

$$\text{相除關係}\begin{cases}\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)\\ \cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)\end{cases}$$

$$\text{平方關係}\begin{cases}\sin^2 A+\cos^2 A=1\cdots\cdots(6)\\ 1+\tan^2 A=\sec^2 A\cdots(7)\\ 1+\cot^2 A=\csc^2 A\cdots(8)\end{cases}$$

(注意) 1. 上列八式,將函數的名稱換爲邊和邊相除,例如,將 $\sin A$ 換爲$\dfrac{a}{c}$, 便立刻可以證明; 2. 只要 A 的大小一定, C 是直角, A 的函數與三角形的大小無關; 3. 六種三角函數, 只要知道一種, 就能推出其餘的五種。

習題

(1) 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle C$ 爲直角, BC, AC 各爲 3, 4, 求 A 的三角函數。

*(2) 已知 $\sin A=\dfrac{15}{17}$, 求 A 角的其餘各函數。

*(3) 用 $\tan A$ 表出其餘的諸函數。

(4) 設 $\cos A=\dfrac{12}{13}$, 試求 A 的其他三角函數。

(5) 設 $\tan A=2+\sqrt{3}$, 試推算 A 的其他三角函數。

(1) $BC=3,\ AC=4,\ AB=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}=5$。

$$\therefore\ \sin A=\frac{3}{5},\qquad \cos A=\frac{4}{5},$$

$$\tan A=\frac{3}{4},\qquad \cot A=\frac{4}{3},$$

$$\sec A=\frac{5}{4},\qquad \operatorname{cosec} A=\frac{5}{3}。$$

*(2) $\sin A=\frac{15}{17}$, $\sin^2 A+\cos^2 A=1$。

$$\therefore\ \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17}。$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{15}{17}\times\frac{17}{8}=\frac{15}{8}。$$

$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{8}{15}。$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{17}{8}。$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{17}{15}。$$

*(3) $\cot A=\frac{1}{\tan A}$。

$$\sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}。$$

$$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}。$$

$$\sin A=\tan A\cos A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}。$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}。$$

(4) $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$。

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=\frac{5}{12}。$$

$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{12}{5}。$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{13}{12}。$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{13}{5}。$$

(5) 和 (3) 同樣,得

$$\cot A=2-\sqrt{3},\qquad \sec A=\sqrt{6}+\sqrt{2},$$

$$\cos A=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\qquad \sin A=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{cosec} A=\sqrt{6}-\sqrt{2}。$$

證　法

(1)　先變化複雜的一邊，使它和另一邊相等。

例　試證明下式。

$$\tan^2 A+\cot^2 A-(\sin^2 A\tan^2 A+\cos^2 A\cot^2 A)=1。$$

（證）　左邊$=\tan^2 A-\sin^2 A\tan^2 A+\cot^2 A-\cos^2 A\cot^2 A$

$$=\tan^2 A(1-\sin^2 A)+\cot^2 A(1-\cos^2 A)$$

$$=\tan^2 A\cos^2 A+\cot^2 A\sin^2 A$$

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\cos^2 A+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\sin^2 A$$

$$=\sin^2 A+\cos^3 A$$

$$=1。$$

習　題

試證明下列各恆等式：

(1)　$\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\operatorname{cosec}\theta。$

*(2)　$\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{1+\sec x}{1+\operatorname{cosec} x}\right)=\tan x。$

*(3)　$\cot^2 A-\cos^2 A=\cos^2 A\cot^2 A。$

(4)　$(p\cos A+q\sin A)^2+(q\cos A-p\sin A)^2=p^2+q^2。$

(5)　$2(\sin^6 A+\cos^6 A)-3(\sin^4 A+\cos^4 A)+1=0。$

(6)　$\operatorname{cosec} a\sec^2 a+\sin a\tan^2 a-2\tan a\sec a=\operatorname{cosec} a-\sin a。$

(1) 左邊$=\dfrac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta\}}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2(2+2\sin\theta)}{2\sin\theta+2\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$。

*(2) 左邊$=\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{\cos x}}{1+\dfrac{1}{\sin x}}\right)$

$=\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}\right)\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\tan x$。

*(3) 左邊$=\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-\cos^2 A=\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$=\dfrac{\cos^2 A(1-\sin^2 A)}{\sin^2 A}=\dfrac{\cos^2 A\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$=\cos^2 A\cot^2 A$。

(4) 左邊$=p^2\cos^2 A+q^2\sin^2 A+q^2\cos^2 A+p^2\sin^2 A$

$=p^2(\cos^2 A+\sin^2 A)+q^2(\sin^2 A+\cos^2 A)$

$=p^2+q^2$。

(5) 左邊$=2(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^4 A-\sin^2 A\cos^2 A$

$+\cos^4 A)-3(\sin^4 A+\cos^4 A)+1$

$=2\{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-3\sin^2 A\cos^2 A\}$

$-3\{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A\}+1$

$=2(1-3\sin^2 A\cos^2 A)$

$-3(1-2\sin^2 A\cos^2 A)+1$

$=2-6\sin^2 A\cos^2 A-3+6\sin^2 A\cos^2 A+1$

$=3-3=0$。

(6) 左邊$=\dfrac{1}{\sin a\cos^2 a}+\dfrac{\sin a\sin^2 a}{\cos^2 a}-\dfrac{2\sin a}{\cos^2 a}$

$=\dfrac{1-2\sin^2 a+\sin^4 a}{\sin a\cos^2 a}=\dfrac{(1-\sin^2 a)^2}{\sin a\cos^2 a}$

$=\dfrac{\cos^4 a}{\sin a\cos^2 a}=\dfrac{\cos^2 a}{\sin a}=\dfrac{1-\sin^2 a}{\sin a}$

$=\dfrac{1}{\sin a}-\sin a=\operatorname{cosec} a-\sin a$。

證法	習題
(2) 分別變化兩邊的形式而比較它們的結果。	試證明下列各恆等式:

(2) 分別變化兩邊的形式而比較它們的結果。

例 $\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A$,

(證) $\sin^4 A+\cos^4 A=\sin^4 A+(\cos^2 A)^2$

$=\sin^4 A+(1-\sin^2 A)^2$

$=\sin^4 A+1-2\sin^2 A+\sin^4 A$

$=1-2\sin^2 A+2\sin^4 A$。

$1-2\sin^2 A\cos^2 A=1-2\sin^2 A(1-\sin^2 A)$

$=1-2\sin^2 A+2\sin^4 A$。

即原式的兩邊相等。

習題

試證明下列各恆等式:

*(1) $\sec A-\cos A=\sin A\tan A$。

(2) $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)$
$=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)$。

(3) $(\sin A+\cos A)(\tan A+\cot A)$
$=\sec A+\operatorname{cosec} A$。

(4) $(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$。

(5) $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)$
$=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)$。

*(1)　左邊$=\dfrac{1}{\cos A}-\cos A=\dfrac{1-\cos^2 A}{\cos A}$

$=\dfrac{\sin^2 A}{\cos A}$。

右邊$=\sin A\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}\right)=\dfrac{\sin^2 A}{\cos A}$。

所以原式的兩邊相等。

(2)　左邊$=(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)$

$=(2-\cos^2 A)\left(1+\dfrac{2\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)$

$=(1+\sin^2 A)\dfrac{\sin^2 A+2\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$=\dfrac{(1+\sin^2 A)(1+\cos^2 A)}{\sin^2 A}$。

右邊$=\left(2+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)(1+\cos^2 A)$

$=\dfrac{2\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin^2 A}(1+\cos^2 A)$

$=\dfrac{(1+\sin^2 A)(1+\cos^2 A)}{\sin^2 A}$。

所以原式的左右相等。

(3)　左邊$=(\sin A+\cos A)\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}\right)$

$=(\sin A+\cos A)\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}=\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}$

右邊$=\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}$。

∴　左邊=右邊。

(4)　左邊$=1+\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A+2\cos A+2\sin A\cos A$

$=1+1+2\sin A+2\cos A+2\sin A\cos A$

$=2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)$。

右邊$=2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)$。

∴　左邊=右邊。

(5)　左邊$=(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)$

$=(1+\sin^2 A)(2\operatorname{cosec}^2 A-1)=(1+\sin^2 A)\left(\dfrac{2}{\sin^2 A}-1\right)$

$=\dfrac{2}{\sin^2 A}+2-1-\sin^2 A=\dfrac{2}{\sin^2 A}+\cos^2 A$。

右邊$=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)=(1+\operatorname{cosec}^2 A)(1+\cos^2 A)$

$=1+\dfrac{1}{\sin^2 A}+\cos^2 A+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\dfrac{2}{\sin^2 A}+\cos^2 A$。

∴　左邊=右邊。

證法	習題

(3) 把公式變化成爲另一形式,再把這形式變成和已知的恆等式一樣,這是一種試探的方法。

例 1. 試證明: $1+\sec^4A-\tan^4A=2\sec^2A$,

(證) 公式 $1+\tan^2A=\sec^2A$。

$\therefore\ 1-\sec^2A=-\tan^2A$。

$\therefore\ 1-2\sec^2A+\sec^4A=\tan^4A$。

$\therefore\ 1+\sec^4A-\tan^4A=2\sec^2A$。

例 2. 試證明: $\operatorname{cosec}A-\cot A=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}A+\cot A}$。

(證) 要證明這恆等式,可先證明:

$$(\operatorname{cosec}A-\cot A)(\operatorname{cosec}A+\cot A)=1。$$

$$\operatorname{cosec}^2A-\cot^2A=1。$$

$$\operatorname{cosec}^2A=1+\cot^2A。$$

上列結果爲一公式,所以原式的兩邊恆等。

試證明下列恆等式:

(1) $\operatorname{cosec}^4A+\cot^4A$

$=1+2\operatorname{cosec}^2A\cot^2A$。

(2) $\tan^2x\sin^2x=\tan^2x-\sin^2x$。

(3) $\dfrac{\tan^2A-\cot^2A}{\sec A+\operatorname{cosec}A}=\sec A-\operatorname{cosec}A$。

(4) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$。

(1) $\operatorname{cosec}^4 A+\cot^4 A=1+2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A$。

可將上式移項改爲下式,再加以證明。

$\operatorname{cosec}^4 A+\cot^4 A-2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A=1$。

$$(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)^2=1。$$

$$(1+\cot^2 A-\cot^2 A)^2=1。$$

$$1=1。$$

這就可以斷定原式的左右相等。

(2) $\tan^2 x\sin^2 x=\tan^2 x-\sin^2 x$。

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x。$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x}。$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}。$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}。$$

∴ 原式爲恆等式。

(3) 將原式變形爲

$\tan^2 A-\cot^2 A=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A$。

$(1+\tan^2 A)-(1+\cot^2 A)=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A$。

$\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A$。

此足證明原式之左右相等。

(4) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$。

變其形爲

$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=(\tan\theta+\sec\theta)^2。$$

$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2。$$

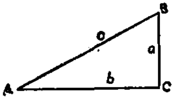
$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2。$$

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=(\sec\theta+\tan\theta)^2。$$

$$(\sec\theta+\tan\theta)^2=(\sec\theta+\tan\theta)^2。$$

∴ 原式爲恆等式。

餘角的公式



令　$C=90^\circ$，則
$B=90^\circ-A$，
$\sin B=\frac{b}{c}$。

$\therefore$　$\sin(90^\circ-A)=\frac{b}{c}$。

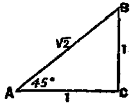
但　$\cos A=\frac{b}{c}$。

$\therefore$　$\sin(90^\circ-A)=\cos A$。

同理：

$\cos(90^\circ-A)=\sin A$。
$\tan(90^\circ-A)=\cot A$。
$\cot(90^\circ-A)=\tan A$。
$\sec(90^\circ-A)=\operatorname{cosec} A$。
$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\sec A$。

45°的三角函數



因爲：$\left.\begin{array}{l}C=90^\circ\\A=45^\circ\end{array}\right\}$

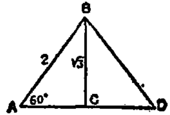
設　$AC=BC=1$，則
$AB=\sqrt{2}$

$\therefore \sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$\tan 45^\circ=1$。
$\cot 45^\circ=1$。
$\sec 45^\circ=\sqrt{2}$。
$\operatorname{cosec} 45^\circ=\sqrt{2}$。

60°、30°的三角函數



$\triangle ABD$ 爲正三角形，
令　$AC=CD=1$，則
$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$。
$\angle BAC=60^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$。

$\therefore$　$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$。

$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$。
$\tan 60^\circ=\sqrt{3}=\cot 30^\circ$。

$\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^\circ$。

$\sec 60^\circ=2=\operatorname{cosec} 30^\circ$。

$\operatorname{cosec} 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\sec 30^\circ$。

（注意）30°，45°，60°各角的正弦是 $\frac{\sqrt{1}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，這很便於記憶，而且必須記熟。

習　題

(1)　試求下式的數值：
$(\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)\times(\tan 60^\circ+\cot 30^\circ)-4\sec 45^\circ(\operatorname{cosec} 60^\circ-\sec 30^\circ)$。

(2)　試求下式的數值：
$\sin^2(A+45^\circ)\sin^2(45^\circ-A)$。

(3)　試證明下式：
$\cot 60^\circ(1+\cos 30^\circ+\sin 30^\circ)=\cos 60^\circ+\sin 60^\circ$。

(4)　試化簡下式：
$\sin(90^\circ-A)\cot(90^\circ-A)$。

(5)　試求下式中 x 的值．
$\sin 30^\circ=x\cot 60^\circ$。