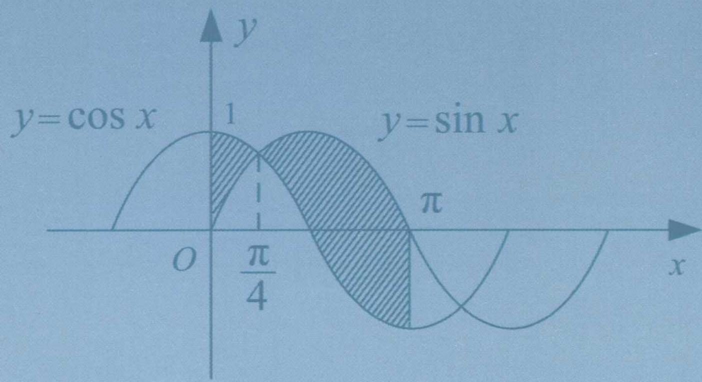
全国普通高等教育“十一五”规划教材

微积分

主 编 刘晓俊 李春萍



- 本书是编者根据多年的教学经验编写而成
- 结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂
- 教材适应时代要求、符合改革精神、同时又继承了传统教材的优点
- 每章、节中都配有丰富的习题，以便及时巩固和提高

天津科学技术出版社

微 积 分

主　编　刘晓俊　李春萍

天津科学技术出版社

内 容 提 要

微积分是现代数学的重要基础与起点，它不仅在物理学、化学和生物学等自然科学领域有着非常广泛的应用，而且也广泛地应用于社会学和经济学等人文学科领域，成为这些领域重要的研究工具，尤其是经济学，它与现代数学有着极为密切的关系。据统计，自1969年建立诺贝尔经济学奖以来，其得主有半数以上得益于有效地应用现代数学知识。可见，现代数学已成为经济学研究的强有力的工具。因此作为现代数学基础的微积分学，不仅是理工类专业，也是经济、管理类各专业的一门重要的基础课。

通过本课程的学习，学生可以系统地获得微积分学的基本知识，掌握必要的基础理论和常用的计算方法，培养抽象概括能力和逻辑推理能力，以及综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力，为学习后续课程和获得现代管理技术的有关知识奠定必要的数学基础。

本书可供大学经济类本科和高职高专院校各专业公共基础课使用。学好这门课程，对于培养社会所需要的高级经济技术和工程管理人才有着十分重要的意义。

图书在版编目（CIP）数据

微积分 / 刘晓俊等主编. —天津：天津科学技术出版社，2009.4

ISBN 978-7-5308-5120-3

Ⅰ.微… Ⅱ.刘… Ⅲ.微积分 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第052990号

责任编辑：刘丽燕

责任印制：白彦生

天津科学技术出版社出版

出版人：胡振泰

天津市西康路35号 邮编300051

电话（022）23332398（事业部） （022）23332697（发行）

网址：www.tjkjcbs.com.cn

新华书店经销

北京合众伟业印刷有限公司

开本787×1092 1/16 印张17.5 字数434 000

2009年8月第1版第1次印刷

定价：28.00元

编委会

主　任：池宇峰

副主任：池寒峰　张　剑　姜天鹏

委　员：（以下排名按姓氏拼音字母的先后顺序为序）

陈爱江　贾培佩　金　鑫　李春萍　李　瑜　刘晓俊
刘晓霞　刘泽云　马　鑫　任　玲　苏勇历　隽青龙
王宏艳　王洪梅　武　萌　尹亮亮　袁国强　展正然
张文良　张相红　张玉敏　张月岭

前　言

本书是依据教育部高教司颁发的《经济数学基础》大纲，根据普通高等教育的培养目标和经济金融类普通高等教育的特点，在广泛吸取同类教材优点的基础上，集编著者多年教学实践经验之所成编写而成。本书具有如下特点：

第一，充分注意体现高等教育的特点，以“实用为目的，以必需、够用为原则，把培养学生应用微积分学知识解决实际问题的能力与素养放在首位；淡化严格的数学论证，强化直观、形象的解说，让学生从烦琐的数学推导中解脱出来。同时考虑到学生的实际需要，又尽可能地注意了内容的系统性和完整性，力争做到深浅适中、难易适度。

第二，为适应高校素质教育、创新教育与创业教育的需要，本教材在注重实用性的同时，还致力于培养学生的科学素养，提高学生的逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力。

第三，微积分属经济应用数学的基础课程，因此，本书在相应章节中都专门设有经济应用的具体内容，尽可能突出经济金融类高等教育的特点，更能适应经济金融类高等教学的需要。同时让学生能切实掌握应用微积分学知识去理解、描述与处理实际问题的方法技巧，从而充分认识学好微积分学的重要性。

第四，书中的例题和习题都经过了严格的筛选，使之具有较强的典型性和代表性。同时，考虑到不同专业学生的学习需要，每部分内容都尽可能地增加了实际应用的例子，以使学生能够更直观、更形象、更简便地学习数学、运用数学。

本书由刘晓俊、李春萍教授担任主编，由张文良、陈爱江、王宏艳担任副主编，参加编写的还有尹亮亮、刘晓霞、贾培佩、武萌、袁国强、张玉敏、展正然、王洪梅、金鑫等。

由于作者水平所限，书中如有错谬之处，恳请读者批评指正。

编　者

2009 年 8 月

目　　录

第一章　函数 1
§1.1　函数 1
一、函数的概念 1
二、多值函数、分段函数和隐函数 4
§1.2　函数的简单性质 6
一、函数的奇偶性 6
二、函数的周期性 8
三、函数的单调增减性 8
四、函数的有界性 9
§1.3　初等函数 9
一、反函数 9
二、基本初等函数 11
三、复合函数 15
四、初等函数 17
习题一 18
自测题 20
第二章　极限与连续 22
§2.1　极限 22
一、数列与数列的极限 22
二、函数的极限 24
§2.2　无穷小量与无穷大量 30
一、无穷小量 30
二、无穷大量 31
三、无穷小量与无穷大量的关系 31
四、无穷小量的阶 32
§2.3　极限的运算法则 32
§2.4　两个重要极限 38
一、极限存在准则 38

二、两个重要极限 38
§2.5 函数的连续性 43
一、函数的改变量（函数的增量） 44
二、连续函数的概念 45
三、连续函数的运算性质 49
四、闭区间上连续函数的性质 50
习题二 51
自测题 56
第三章 导数与微分 59
§3.1 导数的概念 59
一、问题的提出 59
二、导数的定义 60
§3.2 导数的基本公式与运算法则 66
一、基本初等函数的导数公式 67
二、导数的四则运算法则 68
三、复合函数的求导法则 69
四、隐函数的导数 72
五、取对数求导法 72
六、综合例题 73
§3.3 高阶导数 75
一、高阶导数的概念 75
二、一些特殊函数的高阶导数 76
§3.4 函数的微分 76
一、微分的定义 76
二、微分运算法则及基本公式 78
三、微分的几何意义 80
四、微分形式的不变性 81
五、微分的应用——近似计算 81
习题三 83
自测题 86

第四章　中值定理与导数的应用 89

§4.1　中值定理 89

一、罗尔定理 89

二、拉格朗日中值定理 90

三、柯西中值定理 93

§4.2　未定式的定值法——洛必达法则 94

一、$\frac{0}{0}$ 型未定式 94

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 96

三、其他类型的未定式 97

§4.3　函数的单调性 99

§4.4　函数的极值 101

§4.5　最大值与最小值，极值的应用 104

一、最大值与最小值 104

二、极值的应用 106

§4.6　曲线的凹向与拐点 107

§4.7　变化率及相对变化率在经济中的应用 ——边际分析与弹性分析简介 109

一、函数的变化率——边际函数 109

二、几个常用的经济函数 109

三、函数的相对变化率——函数的弹性 111

习题四 114

自测题 116

第五章　不定积分 118

§5.1　不定积分的概念 118

一、原函数与不定积分 118

二、不定积分的几何意义 119

三、不定积分的性质 120

§5.2　基本积分公式 120

§5.3　换元积分法 123

一、第一类换元法（凑微分法） 123

二、第二类换元法 126
§5.4 分部积分法 131
习题五 133
自测题 136
第六章 定积分 138
§6.1 定积分的概念 138
一、曲边梯形的面积 138
二、定积分的定义 140
§6.2 定积分的基本性质 141
§6.3 微积分基本定理 144
§6.4 定积分的换元积分法及分部积分法 147
一、定积分的换元积分法 147
二、定积分的分部积分法 151
§6.5 定积分的应用 153
一、平面图形的面积 153
二、旋转体的体积 156
三、经济应用问题举例 159
§6.6 广义积分简介 161
一、无限区间的积分 161
二、无界函数的积分（瑕积分） 163
习题六 166
自测题 169
第七章 多元函数 171
§7.1 空间解析几何简介 171
一、空间直角坐标系 171
二、空间任意两点间的距离 172
三、曲面与方程 173
§7.2 多元函数的概念 176
一、多元函数的定义 176
二、二元函数的定义域 177

三、二元函数的几何意义 178
§7.3 二元函数的极限与连续 179
§7.4 偏导数 180
§7.5 全微分 184
§7.6 复合函数的微分法 186
§7.7 隐函数的微分法 189
§7.8 二元函数的极值 191
§7.9 二重积分 194
一、二重积分的概念 195
二、二重积分的性质 197
§7.10 二重积分的计算 198
习题七 201
自测题 203
第八章 无穷级数 206
§8.1 无穷级数的概念和性质 206
一、无穷级数的概念 206
二、无穷级数的基本性质 209
§8.2 正项级数 210
§8.3 任意项级数与绝对收敛 215
§8.4 幂级数 217
一、幂级数和幂级数的收敛域 217
二、幂级数的性质 222
§8.5 泰勒公式和泰勒级数 224
一、泰勒公式 224
二、泰勒级数 224
§8.6 函数展开成幂级数 225
一、直接展开法 225
二、间接展开法 228
习题八 230
自测题 232

第九章　微分方程简介........235
§9.1　微分方程的基本概念........235
§9.2　一阶微分方程........237
一、可分离变量的微分方程........238
二、齐次微分方程........240
三、一阶线性微分方程........243
§9.3　几种二阶微分方程........246
一、最简单的二阶微分方程........246
二、不显含未知函数 y 的二阶微分方程........246
三、不显含自变量 x 的二阶微分方程........247
习题九........249
自测题........251
习题参考答案........254

第一章　函　　数

17 世纪笛卡尔把变量引入了数学，使数学从研究常量进一步发展到研究变量，从而产生了微积分. 微积分研究经济问题离不开函数，而函数是微积分学中最重要的基本概念，是微积分学研究的对象. 本教材在实数范围内研究函数. 本章主要介绍函数的概念、性质和初等函数.

§1.1　函　　数

一、函数的概念

定义 1.1　若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应法则 f ，使对于每一个 $x \in D$ ，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数，或称变量 y 是 x 的一个函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中 x 称为自变量， y 称为因变量.

集合 D 称为函数的定义域，记作 $D(f)$ 或 D .

对于 $x_0 \in D(f)$ 所对应的 y 值，记作 y_0 ， $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$ ，称为当 $x = x_0$ 时，函数 $y = f(x)$ 的函数值.

全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域，记作 $Z(f)$ 或 Z .

函数 $f(x)$ 中的 f 反映自变量与因变量的对应法则. 对应法则也常常用 φ 、 h 、 g 、 F 等表示，那么函数也就记作 $\varphi(x)$ 、 $h(x)$ 、 $g(x)$ 、 $F(x)$ 等.

在平面直角坐标系中，取自变量在横轴上变化，因变量在纵轴上变化，则平面点集 $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ 即为定义在 $D(f)$ 上的函数 $y = f(x)$ 的图形，它表示一条曲线.

对于函数的概念应注意：

（1）$D(f)$ 非空；

（2）对应法则；

（3）值域.

例 1　判断 $y=\arcsin(3+x^2)$ 是否是函数.

解：对于任意实数 x，都没有按照给定的对应法则与之对应的 y 值. 函数的定义域不能是空集，因此它不是函数.

例 2　分析函数 $y=3x^2+2x-6$ 的对应法则.

解：这是一个二次函数，它表示抛物线. 在表达式中，x 可以取一切实数. 每取定一个 x 值，就可以找到一个 y 值，而且只有一个 y 值满足

$$y=3x^2+2x-6,$$

即对于每一个 x 值，通过对应法则

$$f(\quad)=3\times(\quad)^2+2\times(\quad)-6, \tag{1.1}$$

把 x 变成确定的 y 值.

如，将 $x=4$ 代入（1.1），有

$$y=3\times4^2+2\times4-6=50,$$

而且只有一个 $y=50$，点 $(4,\ 50)$ 使（1.1）式成立.

这里，变量 x 与变量 y 通过（1.1）式联系起来.

若把 $f(x)$ 括号内的 x 换成字母或某个数学式子，则对应法则 f 表示那个字母或那个数学式子的运算.

例如，设函数 $f(x)=x^2+1$，求 $f(a)$，$f(x+1)$，$f(-\frac{1}{x})$ 和 $f[f(x)]$.

由对应法则 f，则有

$f(a)=a^2+1$，

$f(x+1)=(x+1)^2+1=x^2+2x+2$，

$f(-\frac{1}{x})=(-\frac{1}{x})^2+1=\frac{1}{x^2}+1$，

$f[f(x)]=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$.

例 3　研究函数 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数.

解：函数 $y=x$ 的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$. 因此，$y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是两个不同的函数，如图 1-1 与图 1-2 所示.

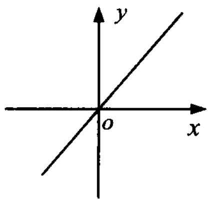


图 1-1

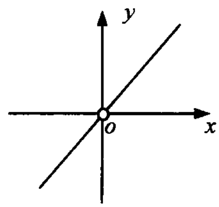


图 1-2

例 4　研究 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数.

解：因为 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 都是定义在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的函数，但是其对应法则不同. 对于函数 $y=x$ ，当 $x>0$ 时 $y>0$；当 $x<0$ 时 $y<0$，如图 1-1 所示. 而对于函数 $y=\sqrt{x^2}$ ，当 $x>0$ 时 $y>0$；当 $x<0$ 时 $y>0$，如图 1-3 所示. 因此，二者是两个不同的函数.

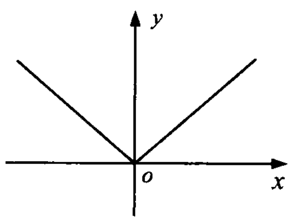


图 1-3

由以上例子可以看出，研究函数，必须知道自变量与因变量的对应法则以及函数的定义域. 但习惯上，我们常常只给出对应法则，而未指明其定义域，这时定义域是指按指定法则有一个确定实数 y 值与之对应的所有 x 值构成的集合.

例如，给定 $y=\sqrt{25-x^2}$ ，显然，对于每一个 $x\in[-5,\ 5]$ 都有一个确定的实数 y 与之对应，

因此，函数 $y=\sqrt{25-x^2}$ 的定义域为 $[-5,\ 5]$.

函数定义域的求法：

1．由实际意义确定

例如，圆的面积 $S=\pi r^2$，r 表示圆的半径，π 为常量，S 表示圆的面积．按实际意义，定义域为 $[0,\ +\infty)$.

2．由解析式求定义域

（1）若 $y=\dfrac{1}{f(x)}$，则 $f(x)\neq 0$；

（2）若 $y=\sqrt[2n]{f(x)}$，则 $f(x)\geqslant 0$；

（3）若 $y=\log_a f(x)$，则 $f(x)>0$;

（4）若 $y=\arcsin f(x)$ 或 $y=\arccos f(x)$，则 $|f(x)|\leqslant 1$.

例 5　求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ 的定义域.

解：$x-1\neq 0$，且 $x+2\geqslant 0$，即 $x\neq 1$，且 $x\geqslant -2$．因此，函数的定义域为 $[-2,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

例 6　求函数 $y=\dfrac{5}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

解：$3x-2>0$ 且 $3x-2\neq 1$，即 $x>\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq 1$．因此，函数的定义域为 $\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right)\cup(1,\ +\infty)$.

例 7　求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

解：$\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $25-x^2>0$，即 $|x-1|\leqslant 5$ 且 $|x|<5$，因此有，$-4\leqslant x<5$．于是，函数的定义域为 $[-4,\ 5)$.

二、多值函数、分段函数和隐函数

1．多值函数

在函数定义中要求对每一个 $x\in D$，都有唯一确定的 y 值与之对应．但我们也常常遇到另一种关系，例如 $y=\pm\sqrt{25-x^2}$，对于每一个 $x\in(-5,\ 5)$，都有两个 y 值与之对应，这就不符合

前面的函数定义了，按前面定义应该说它不是一个函数. 但为了方便，我们把对于非空集合 D 中的 x 值有多个 y 值与之对应的关系称为多值函数. 那么，前面函数定义中的函数可称为单值函数. 如果不做声明，本书中提到函数时均指单值函数.

例如，对于多值函数 $y=\pm\sqrt{25-x^2}$，可以把它分成两个单值函数 $y=\sqrt{25-x^2}$ 与 $y=-\sqrt{25-x^2}$，如图 1-4 所示. 在图形上它们分别表示在横轴以上与横轴以下的两个单值分支.

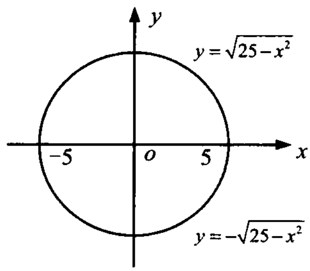


图 1-4

2. 分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 取不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数.

例如，

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases},\qquad y=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases},$$

都是定义在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的分段函数，其图形分别如图 1-5 与图 1-6 所示.

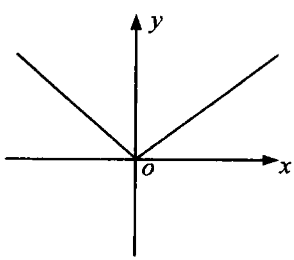


图 1-5

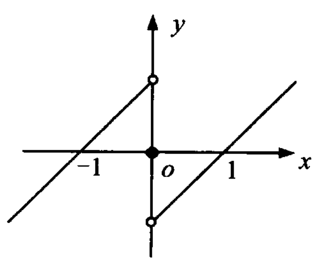


图 1-6

3. 隐函数

有些函数，它的因变量和自变量的对应法则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 表示的，称为隐函数．如 $Ax+By+C=0$， $xy=1$， $x^2+y^2=r^2$， $y\sin x+3^{xy}-x^2=0$ 等．

§1.2　函数的简单性质

一、函数的奇偶性

定义 1.2　给定函数 $y=f(x)$，

（1）若对所有的 $x\in D(f)$，有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数；

（2）若对所有的 $x\in D(f)$，有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数．

对于偶函数，因为 $f(-x)=f(x)$，所以点 $P(x,\ f(x))$ 如果在图形上，那么与它对称于 y 轴的点 $P'(-x,\ f(x))$ 也在图形上，因此偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-7 所示．

对于奇函数，因为 $f(-x)=-f(x)$，所以点 $Q(x,\ f(x))$ 如果在图形上，那么与它对称于原点的点 $Q'(-x,\ -f(x))$ 也在图形上，因此奇函数的图形关于原点对称，如图 1-8 所示．

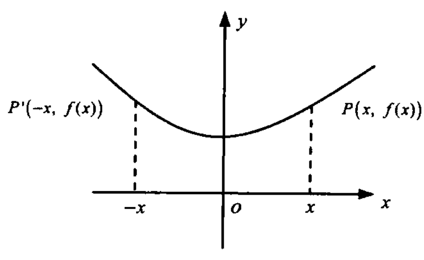


图 1-7

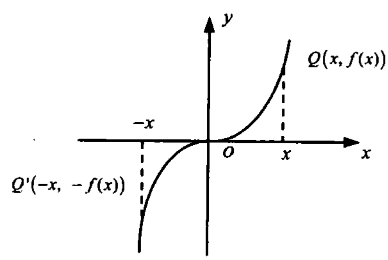


图 1-8

例 1　判断 $y=x^2-4$ 的奇偶性．

解：因为