普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学系列教材（第二版）

大学数学 2

湖南大学数学与计量经济学院　组编
主编　曹定华　孟益民

Mathematics

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材
大学数学系列教材(第二版)

大学数学

2

湖南大学数学与计量经济学院　组编
主　编　曹定华　孟益民

高等教育出版社

内容简介

本书是《大学数学》系列教材之一，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分及其应用、向量函数与场论、含参变量的积分、积分变换、偏微分方程等。各节后配有适量习题，书末附有常用积分变换表和习题解答。

本书结构严谨、内容丰富、重点突出、难点分散，概念、定理及理论叙述准确、精练，符号使用标准、规范，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性。

本书是为高等本科院校非数学类专业学生编写的“高等数学”（或“微积分”）课程教材，也适合各类需要提高数学素质和能力的人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学．2/曹定华，孟益民主编：湖南大学数学与计量经济学院组编．—2版．—北京：高等教育出版社，2009.2

（大学数学系列教材）

ISBN 978-7-04-025770-0

Ⅰ．大…　Ⅱ．①曹…②孟…③湖…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 005760 号

策划编辑 王　强　**责任编辑** 李华英　**封面设计** 刘晓翔　**责任绘图** 黄建英
版式设计 王　莹　**责任校对** 王效珍　**责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2003 年 1 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2009 年 2 月第 2 版
印　　张	25.75	印　　次	2009 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	480 000	定　　价	27.70 元

物料号　25770-00

大学数学系列教材
（第二版）

湖南大学数学与计量经济学院　组编

编委会主任　　黄立宏
编委会副主任　罗　汉
编委会成员　　黄立宏　马柏林　曹定华　孟益民　曾金平
　　　　　　　彭亚新　罗　汉　杨湘豫　李董辉　蒋月评

《大学数学1》　主编　黄立宏　马柏林
《大学数学2》　主编　曹定华　孟益民
《大学数学3》　主编　曾金平　彭亚新
《大学数学4》　主编　罗　汉　杨湘豫
《大学数学5》　主编　李董辉　蒋月评

前言

湖南大学数学与计量经济学院于2001年组织编写了《大学数学》(1~5)系列教材,由刘楚中任总主编,黄立宏任副总主编,其中,《大学数学1》由黄立宏和戴斌祥主编,刘楚中、杨湘豫、李亚琼、邓爱珍、孟益民、朱惠延参加编写;《大学数学2》由曾金平和李晓沛主编,彭亚新、邓爱珍、蒋月评参加编写;《大学数学3》由刘楚中和曹定华主编,杨冬莲、李建平、刘开宇、彭亚新、历亚、朱郁森参加编写;《大学数学4》由杨湘豫和邓爱珍主编,喻胜华、谭德俊、彭国强、晏木荣、刘先霞、胡春华参加编写;《大学数学5》由李董辉和曾金平主编,马传秀参加编写。该系列教材被列为"普通高等教育'十五'国家级规划教材",由高等教育出版社于2002年和2003年相继出版。教材出版后已历经湖南大学各非数学专业多届本科生使用,国内许多高校也将其选作一些本科专业的教材,得到师生的好评,同时我们也收集到了许多宝贵意见和修改建议。为了进一步提高教材质量,打造精品教材,学院决定组织人员对该系列教材进行修订,并于2005年底由黄立宏教授牵头将教材的修订申报了"普通高等教育'十一五'国家级规划教材",且顺利通过。现出版的此套教材就是在原《大学数学》(1~5)系列教材的基础上修订而成的。由于参加原系列教材编写的部分教师相继退休或调离,在此次修订工作中,我们新成立了编写委员会,委员会由黄立宏任主任,罗汉任副主任,修订版各分册的主编为成员。

本分册是在原系列教材之一的《大学数学3》的基础上修订而成的,由曹定华和孟益民任主编,付玉霞参加编写,内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分及其应用、向量函数与场论、积分变换、偏微分方程等。修订版在原教材的基础上对教材内容的取舍和叙述进行了进一步锤炼,调整了部分内容顺序,增加和改写了部分内容,使之更加清晰、易懂、便于教学,更切合理工科各非数学专业的实际要求,也删改和补充了部分例题和习题,修改了个别错误和不当之处。

本教材中难免会有不妥之处和有待进一步改进的地方,希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材的编写和出版得到湖南大学数学与计量经济学院各位教师和湖南大学教务处、高等教育出版社的大力支持,在此表示衷心感谢。

湖南大学数学与计量经济学院

2008年8月

目　录

第一章　向量代数与空间解析几何

向量是由力学、物理学发展需要而引入的数学概念，随着向量理论的深入研究，它已成为研究数学本身的许多问题的基础之一.

与平面解析几何类似，引进空间直角坐标系可把空间中的点与有序实数组及向量联系起来，运用数的代数运算来表示相应的向量运算. 还可运用向量运算解决空间中的几何问题.

第一节　向量的概念及向量的表示

一、向量的基本概念

1. 向量的概念

在日常生活中，我们常遇到两种量. 一种是只需用大小就能表示的量，如温度、质量、面积、功等等，这种量称之为数量（或标量）；另一种是既需要用大小表示，同时还要指明方向的量，如力、位移、速度等等，这种量称之为向量（或矢量）.

在几何上，用有向线段表示向量（见图 1－1）. 线段的长度表示向量的大小，箭头所指的方向即为向量的方向. 称点 A 为向量的起点，点 B 为向量的终点，记为 $\overrightarrow{AB}$. 向量也可用一个英文字母表示，如向量 $\boldsymbol{a}$，向量 $\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{F}$ 等等.

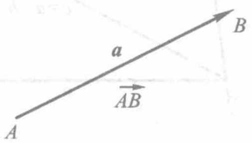

图 1－1

向量的大小（或长度）称为向量的模. 记为 $\|\boldsymbol{a}\|$，$\|\overrightarrow{AB}\|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$. 模等于零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$. 零向量的方向可看成是任意的.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同（即在同一直线上或在两平行直线上，且指向相同），且模相等，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 于是，一个向量与它经过平移以后所得的向量是相等的. 具有这种可在空间中任意平移性质的向量叫做自由向量. 因此，我们在讨论向量时只需考虑它的大小和方向，其起点位置可以任意选取.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量,称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记为 $-\boldsymbol{a}$.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互平行,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看作是任意的,故规定零向量平行于任何一个向量.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共起点必在同一条直线上. 因而,两向量平行,又称两向量共线.

当三个向量或三个以上的向量的起点放在同一点时,如果它们的终点和公共起点在同一平面上,就称这些向量共面.

2. 向量的加法与减法

由物理学的知识人们知道,可以用平行四边形法则或三角形法则求两个力的合力. 对速度、位移等的合成均可按这两种方法进行. 因此,我们规定:设有两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,在空间中任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,并由此作平行四边形 $ABCD$(图 1-2),则其对角线向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种求和方法称为平行四边形法则.

求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也可用下述的三角形法则:平移向量 $\boldsymbol{b}$ 使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,则以向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点,向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 1-3).

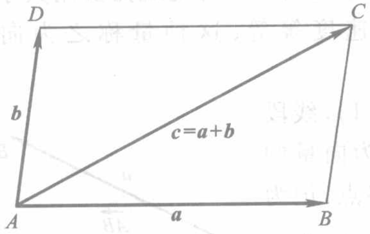

图 1-2

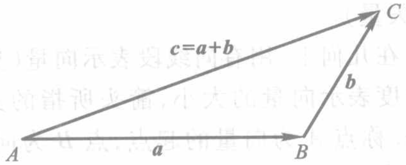

图 1-3

由图 1-4 和图 1-5 可以看出,向量的加法服从交换律和结合律:

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

对任意的向量 $\boldsymbol{a}$,下面的关系式成立:$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

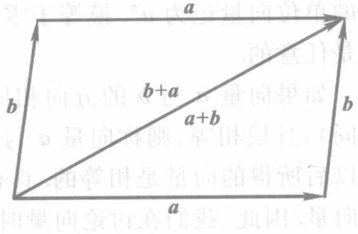

图 1-4

向量的减法是向量加法的逆运算. 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 之差,

记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，并有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

向量的减法同样有平行四边形法则和三角形法则，读者不难根据图 1－6 自行完成这两个法则的文字叙述.

3. 向量与数的乘法

数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是按下面规定所确定的一个向量：

（1）$\|\lambda\boldsymbol{a}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{a}\|$，即向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍.

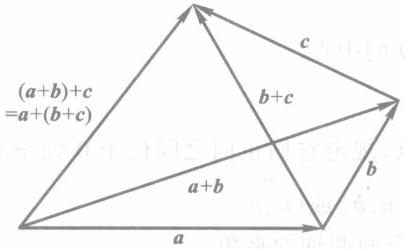

图 1－5

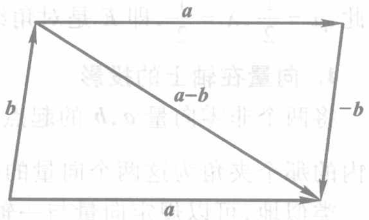

图 1－6

（2）当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

向量与数的乘法满足下面的运算规律：设 λ,μ 为实数，对向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 有

（1）结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（2）分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法和向量与数的乘法（简称数乘）运算统称为向量的线性运算.

由向量与数的乘积的定义可知下面定理成立.

定理 1　设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充要条件是存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

例 1　设 $\boldsymbol{a}^\circ$ 是与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，试用 $\boldsymbol{a}^\circ$ 表示 $\boldsymbol{a}$.

解　因为 $\boldsymbol{a}^\circ/\!/\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}^\circ$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，所以存在实数 $\lambda>0$，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}^\circ$. 因此，$\|\boldsymbol{a}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{a}^\circ\|=|\lambda|=\lambda$，即 $\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{a}^\circ$.

例 2　证明平行四边形的对角线互相平分.

证　如图 1－7 所示，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 设 E 为对角线 AC 与 BD 的交点. 则存在实数 λ,μ，使得

$$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{ED}=\mu\overrightarrow{BD}=\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

又因为

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED},$$

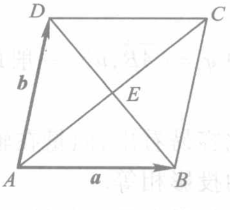

图 1－7

故

$$\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

即

$$(1-\lambda-\mu)\boldsymbol{b}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}.$$

因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 不平行,从而使上式成立的 λ 和 μ 要满足方程组

$$\begin{cases}1-\lambda-\mu=0,\\ \lambda-\mu=0.\end{cases}$$

因此,$\mu=\dfrac{1}{2}$,$\lambda=\dfrac{1}{2}$,即 E 是对角线 AC 与 BD 的中点.

4. 向量在轴上的投影

将两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点移至同一点,规定它们正向之间位于 0 到 π 范围内的那个夹角为这两个向量的夹角,记为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

类似地,可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角.

已知空间中一点 A 及一根轴 u,过点 A 作垂直于轴 u 的平面 π,则平面 π 与轴 u 的交点 A' 称为点 A 在轴 u 上的投影.

设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A' 和 B',则当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 u 同向时,向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影定义为 $\|\overrightarrow{A'B'}\|$;当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 u 反向时,向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影定义为 $-\|\overrightarrow{A'B'}\|$,记为 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$(图1-8),即

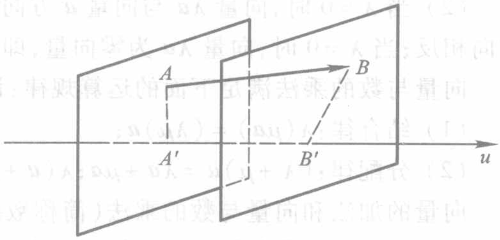

图 1-8

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\begin{cases}\|\overrightarrow{A'B'}\|, & \text{当 } A'B' \text{ 与轴 } u \text{ 同向时};\\ -\|\overrightarrow{A'B'}\|, & \text{当 } A'B' \text{ 与轴 } u \text{ 反向时}.\end{cases}$$

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影可以通过 $\overrightarrow{AB}$ 的模及 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 u 夹角的余弦值表示:

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|\cos\varphi, \tag{1}$$

其中 $\varphi=\langle\overrightarrow{AB},u\rangle$. 一般地有

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\cos\langle\boldsymbol{a},u\rangle.$$

由此容易看出,向量在轴上的投影是可正、可负的数量,且相等的向量在同一轴上的投影相等.

如果向量 $\boldsymbol{b}$ 与轴 u 同向,则规定 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$. 于是,由公式(1)有

$$\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

由向量在轴上投影的定义，便能看出下面关于向量在轴上的投影定理成立.

定理 2 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 及轴 u，则有

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}. \tag{2}$$

我们把定理的证明留给读者. 定理可以推广到有限个向量的和的情况，即

推论 1 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n$.

二、空间直角坐标系及向量的坐标表示式

我们在空间中引进空间直角坐标系，建立空间中点与实数的关系，并由此建立向量与有序实数组的关系.

1. 空间直角坐标系

过空间中一个定点 O 作三条两两相互垂直的数轴 Ox,Oy,Oz，它们均以点 O 为原点，且有相同的单位长度，这样就建立了一个空间直角坐标系. Ox,Oy,Oz 称为坐标轴，简称为 x 轴，y 轴，z 轴，点 O 称为坐标原点. 习惯上，我们将坐标轴 x 轴，y 轴，z 轴的正方向按右手规则排列：即以右手握住 z 轴，四个手指从 x 轴正方向转动$\dfrac{\pi}{2}$到 y 轴的正方向时，拇指所指的方向是 z 轴的正方向（图 1-9）. 以后我们所说的空间直角坐标系就是这种右手直角坐标系，通常记为坐标系 $Oxyz$.

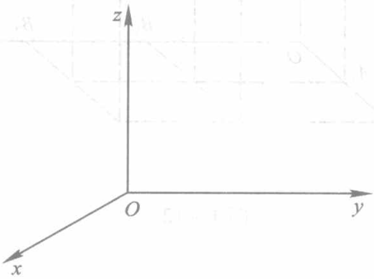

图 1-9

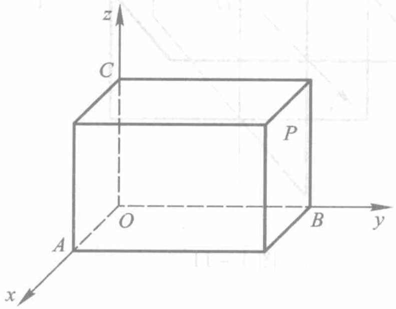

图 1-10

三条坐标轴中任意两条所确定的平面称为坐标面. 由 x 轴与 y 轴所确定的坐标面叫 xy 坐标面，类似还有 xz 坐标面，和 yz 坐标面.

设 P 为空间中任意一点，过点 P 作三个平面分别与三个坐标轴垂直，它们与三个坐标轴的交点依次为 A,B,C（图 1-10）. 点 A,B,C 在三个坐标轴上的坐标分别记为 x,y,z. 于是空间中的点 P 与三个有序实数 (x,y,z) 建立了一一对应关系，记为 $P(x,y,z)$. 通常称 x 为 P 的横坐标，y 为 P 的纵坐标，z 为 P 的竖

坐标.

三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 这八个卦限的次序规定如下(图 1－11)：

第Ⅰ卦限：$\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\}$；

第Ⅱ卦限：$\{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z>0\}$；

第Ⅲ卦限：$\{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z>0\}$；

第Ⅳ卦限：$\{(x,y,z)\mid x>0,y<0,z>0\}$；

第Ⅴ卦限：$\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z<0\}$；

第Ⅵ卦限：$\{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z<0\}$；

第Ⅶ卦限：$\{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z<0\}$；

第Ⅷ卦限：$\{(x,y,z)\mid x>0,y<0,z<0\}$.

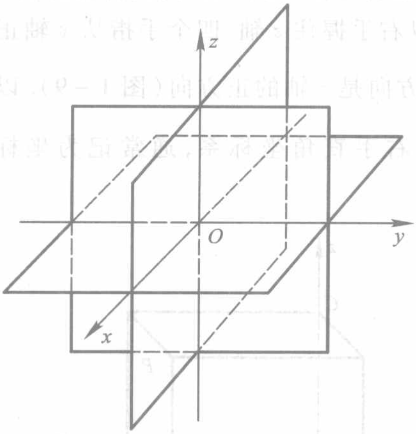

图 1－11

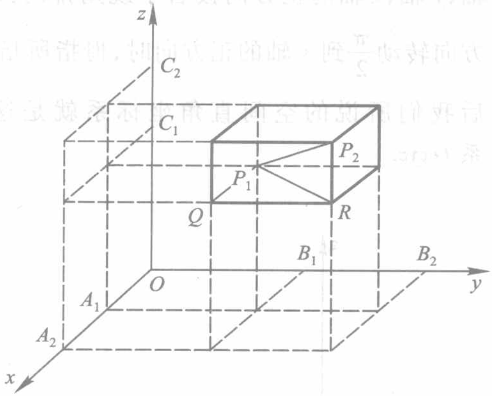

图 1－12

在空间中引入直角坐标系后，空间中的点与三元有序数组(x,y,z)一一对应，我们称三元有序数组(x,y,z)的全体为三维空间，记为 $\mathbf{R}^3$，从而 $\mathbf{R}^3$ 可看作是空间中一切点所组成的集合，即空间.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中的任意两点，由图 1－12 可知

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2&=|P_1R|^2+|P_2R|^2\\&=|P_1Q|^2+|QR|^2+|P_2R|^2\\&=|A_1A_2|^2+|B_1B_2|^2+|C_1C_2|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.\end{aligned}$$