21世纪大学数学创新教材

丛书主编 陈 化

拓扑学

周振荣 宋冰玉 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪大学数学创新教材

拓　扑　学

周振荣　宋冰玉　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书系统介绍了拓扑学的基础知识. 全书共11章，首先介绍集合论的一些基础知识，然后介绍了拓扑空间与连续映射的概念与基本性质，接着介绍了拓扑空间的一些重要的属性，包括收敛性、可数性、分离性、紧致性等，也介绍了拓扑空间的度量化和映射空间，最后介绍了基本群和覆盖空间的基本性质与应用.

本书适合作为高等院校数学类专业本科生及研究生教材，也可供相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑学/周振荣，宋冰玉编著. —北京：科学出版社，2009

21世纪大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-025405-4

Ⅰ.拓… Ⅱ.①周…②宋… Ⅲ.拓扑—高等学校—教材 Ⅳ.O189

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第151263号

责任编辑：杨瑰玉 冯桂层/责任校对：王望容

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009年8月第一次印刷 印张：12 1/2

印数：1—3 000 字数：230 000

定价：22.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《21 世纪大学数学创新教材》丛书编委会

丛　书　序

《21世纪大学数学创新教材》为大学本科数学系列教材，大致划分为公共数学类、专业数学类两大块，创新是其主要特色和要求．经组编委员会审定，列选科学出版社普通高等教育“十一五”规划教材．

一、组编机构

《21世纪大学数学创新教材》丛书由多所985和211大学联合组编：

丛书主编　陈　化

常务副主编　樊启斌

副　主　编　吴传生　何　穗　刘安平

丛书编委　（按姓氏笔画为序）

王卫华　王展青　严国政　李　星　杨瑞琰

肖海军　罗文强　赵东方　黄樟灿　梅全雄

彭　放　彭斯俊　曾祥金　谢民育

二、教材特色

创新是本套教材的主要特色和要求，创造双重品牌：

先进． 把握教改、课改动态和学科发展前沿，学科、课程的先进理念、知识和方法原则上都要写进教材或体现在教材结构及内容中．

知识与方法创新． 重点教材、高层次教材，应体现知识、方法、结构、内容等方面的创新，有所建树，有所创造，有所贡献．

教学实践创新． 教材适用，教师好教，学生好学，是教材的基本标准．应紧跟和引领教学实践，在教学方法、教材结构、知识组织、详略把握、内容安排上有独到之处．

继承与创新． 创新须与继承相结合，是继承基础上的创新；创新需转变为参编者、授课者的思想和行为，避免文化冲突．

三、指导思想

遵循国家教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于课程教学的基本要求，力求教材体系完整，结构严谨，层次分明，深入浅出，循序渐进，阐述精炼，富有启发性，让学生打下坚实的理论基础．除上述一般性要求外，还应具备下列特点：

（1）恰当融入现代数学的新思想、新观点、新结果，使学生有较新的学术视野．

（2）体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学软件的能力，使教材

真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到具体教学内容中的现代精品教材.

(3) 在内容取舍、材料组织、叙述方式等方面具有较高水准和自身特色.

(4) 数学专业教材要求同步给出重要概念的英文词汇，章末列出中文小结，布置若干道(少量)英文习题，并要求学生用英文解答. 章末列出习题和思考题，并列出可进一步深入阅读的文献. 书末给出中英文对照名词索引.

(5) 公共数学教材具有概括性和简易性，注重强化学生的实验训练和实际动手能力，加强内容的实用性，注重案例分析，提高学生应用数学知识和数学方法解决实际问题的能力.

四、主编职责

丛书组编委员会和出版社确定全套丛书的编写原则、指导思想和编写规范，在这一框架下，每本教材的主编对本书具有明确的责权利：

1. 拟定指导思想

按照丛书的指导思想和特色要求，拟出编写本书的指导思想和编写说明.

2. 明确创新点

教改、课改动态，学科发展前沿，先进理念、知识和方法，如何引入教材；知识和内容创新闪光点及其编写方法；教学实践创新的具体操作；创新与继承的关系把握及其主客体融合.

3. 把握教材质量

质量是图书的生命，保持和发扬科学出版社"三高"、"三严"的传统特色，创出品牌；适用性是教材的生命力所在，应明确读者对象，篇幅要结合大部分学校对课程学时数的要求.

4. 掌握教材编写环节

(1) 把握教材编写人员水平，原则上要求博士、副教授以上，有多年课程教学经历，熟悉课程和学科领域的发展状况，有教材编写经验，有扎实的文字功底.

(2) 充分注意著作权问题，不侵犯他人著作权.

(3) 讨论、拟定教材提纲，并负责编写组的编写分工、协调与组织.

(4) 拟就内容简介、前言、目录、样章，统稿、定稿，确定交稿时间.

(5) 负责出版事宜，敦促编写组成员使用本教材，并优先选用本系列教材.

《21世纪大学数学创新教材》组编委员会

2009年6月

前　言

众所周知，数学分析、高等代数、高等几何(包括空间解析几何和射影几何)是数学系本科生最重要的三门基础课程，被称之为“老三高”，而实变函数、抽象代数、拓扑学则是数学系本科生最重要的三门专业课程，被称之为“新三高”．由此可见拓扑学是一门非常重要的课程．

按照 Klein 的观点，拓扑学是一门几何学，是研究几何图形的拓扑性质(在连续形变下保持不变的性质)的学科，俗称“橡皮几何学”．另一方面，拓扑的概念起源于连续函数，因此拓扑学也可以看成是抽象的数学分析．拓扑学现在已经渗透到了数学的各个分支．

本书系统介绍了拓扑学的基础知识，包括集合论、拓扑空间、连续映射、收敛性、可数性、分离性、紧致性、度量化、映射空间、基本群、覆盖空间等内容，适合作为本科生的《拓扑学》必修课和选修课教材，也适合作为研究生的《拓扑学》教材．

本书的内容可分成三个部分：第一部分是点集拓扑基础知识(第 1～6 章)；第二部分是度量化和映射空间(第 7～9 章)；第三部分是代数拓扑基础(第 10、11 章)．

第 1 章介绍了集合论的一些基本概念，如集合与映射、关系、选择公理、良序集、超限归纳原理、基数与序数等，掌握这一部分内容是为学习拓扑学做准备的．

第 2 章介绍了拓扑空间、拓扑基与子基、闭包、内部和边界、拓扑空间的其他定义方法．

第 3 章介绍了连续映射、由函数诱导的拓扑、任意积拓扑、收敛性、商拓扑．

第 4 章介绍了连通性、路连通性及其应用．

第 5 章介绍了各种分离性质，包括用邻域分离和用连续函数分离．作为一个典型的例子，我们介绍了 Appert 空间．

第 6 章介绍了紧致空间、Lindelof 空间与可数紧致空间、紧致性与分离公理、局部紧致性与分离公理、序列紧致与聚点紧致、一点紧致化等内容．

第 7 章主要介绍了局部有限性、仿紧空间、单位分解定理、流形的嵌入定理．

第 8 章介绍了几种常见的度量化定理，包括 Urysohn 度量化、Nagata－Smirnov 度量化、Smirnov 度量化，还介绍了完备度量空间的有关概念和结论．

第 9 章介绍了一致拓扑、点开拓扑和紧致收敛拓扑以及 Ascoli 定理．

第 10 章介绍了映射同伦、同伦等价、道路同伦、基本群的性质、球面的基本群、圆周的基本群、基本群的应用．

第 11 章介绍了覆盖空间的基本性质、道路提升定理、同伦提升定理、映射的提升、覆盖空间的分类、覆盖空间的自同构群、轨道空间、覆盖空间的存在性．

本书是根据多年的教案编写而成的，力争用较小的篇幅介绍尽可能多的内容．由于水平的限制，难免会出现一些不足和错误，望读者不吝赐教！

编　者

2009 年 6 月

记　　号

$2^X, \mathscr{P}X$	X 的幂集,即 X 的所有子集构成的集族
$\aleph_0$	自然数集的基数
$\overline{d}$	度量 d 的标准有界度量
$\boldsymbol{B}(X,Y)$	从 X 到 Y 的有界映射的集合
$\boldsymbol{C}(X,Y)$	从 X 到 Y 的连续映射的集合
$\doteq$	道路同伦
$\varnothing$	空集合,空集族
$\hat{d}$	度量 d 的上确界度量
$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{R}^{\omega}$	R^{N}
$\mathbf{R}_u$	上限拓扑空间
$\mathbf{R}_l$	下限拓扑空间
U	集合类
$\mathbf{Z}_p$	模 p 整数加群
$\mathscr{B}$	拓扑基
$\mathscr{F}$	闭集族
$\mathscr{N}_x$	x 的邻域系
$\mathscr{O}_x$	x 的开邻域系
$\mathscr{S}$	拓扑子基
$\mathscr{T}$	拓扑,开集族
$\mathrm{Card}A$	集合 A 的基数
$\mathrm{diam}(A)$	集合 A 的直径
id_X	集合 X 上的恒等映射
$\mathrm{supp}f$	函数 f 的支集
Ω	最小不可数序数
ω	自然数集关于大小序的序数,也是最小无限序数
$\pi_1(X)$	X 的基本群

$\pi_1(X,x)$	X 的以 x 为基点的基本群
$\simeq$	同伦
$\sqcup$	分离并
$\tilde{d}$	度量 d 的一致有界度量
A^-, $\overline{A}$, $\mathrm{Cl}(A)$	集合 A 的闭包
A^b, $\mathrm{Bd}(A)$, ∂A	集合 A 的边界
A^d, A', $\mathrm{D}(A)$	集合 A 的导集，即聚点的集合
A^i, A°, $\mathrm{Int}(A)$	集合 A 的内部
$B(x,r)$	以 x 为中心、以 r 为半径的开球
c	实数集的基数
D^2	单位开圆盘
$f \simeq g \,\mathrm{rel} A$	f 与 g 相对于集合 A 的相对同伦
RP^n	n 维实射影空间
S^n	单位 n 维球面
T^n	n 维环面
$X\backslash A$, A^c, A_X^c	A 在 X 中的余集
X^Λ	从 Λ 到 X 的所有映射的集合
$\mathrm{Ord}A$	集合 A 的序数

目　　录

第 1 章 集合论

1.1 集合与映射

1.1.1 集合

我们将用大写英文字母表示集合,小写英文字母表示集合的元素,花体大写英文字母表示集合的子集族;$\varnothing$既表示空集,又表示空子集族(不含任何子集的子集族);集合 X 的子集 A 的补集用 $X\setminus A$ 或 A^c 表示;2^X 表示由集合 X 的所有子集构成的集族,称为 X 的幂集;X 的幂集有时也用 $\mathscr{P}X$ 表示.

定理 1.1.1 (De Morgan 定律) 设 $\mathscr{A}$ 是一集族,则

$$\Big(\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A\Big)^c=\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A^c,\ \Big(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\Big)^c=\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A^c. \tag{1.1}$$

注 我们规定,空子集族的并是空子集,空子集族的交是全集.

定义 1.1.1 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$叫 X,Y 的笛卡儿积.类似地可定义有限个集合的笛卡儿积.

例 1.1.1 设 $X=\{a,b\},Y=\{1,2,3\}$,则

$$X\times Y=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

平面 $\mathbf{R}^2$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 与自己的笛卡儿集,即 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$;三维空间是三个实数集的笛卡儿积,也可看成是平面与实数集的笛卡儿积,即 $\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}$.一般地,$\mathbf{R}^n=\overbrace{\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}^{n}$.

命题 1.1.1 关于集合的运算,我们有

(1) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

(2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

(3) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$;

(4) $(A\times B)\setminus(C\times D)=[(A\setminus C)\times B]\cup[A\times(B\setminus D)]$;

(5) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)=(A\times D)\cap(B\times C)$;

(6) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)\cup(A\times D)\cup(B\times C)$.

1.1.2 映射

命题 1.1.2 设 $f:X\to Y$,$\mathscr{A}$ 是 X 的一个子集族,$\mathscr{B}$ 是 Y 的一个子集族,则

(1) $f(\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A)\subseteq\bigcap_{A\in\mathscr{A}} f(A)$;

(2) $f(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A)=\bigcup_{A\in\mathscr{A}} f(A)$;

(3) $f^{-1}(\bigcap_{B\in\mathscr{B}} B)=\bigcap_{B\in\mathscr{B}} f^{-1}(B)$;

(4) $f^{-1}(\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B)=\bigcup_{B\in\mathscr{B}} f^{-1}(B)$.

我们还有：

命题 1.1.3 设 $f:X\to Y, A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

(1) $f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$;

(2) 若 f 是单射，则 $f(A^c)\subseteq[f(A)]^c$；若 f 是满射，则 $[f(A)]^c\subseteq f(A^c)$;

(3) $A\subseteq f^{-1}[f(A)]$，当 f 是单射时，$A=f^{-1}[f(A)]$;

(4) $f[f^{-1}(B)]\subseteq B$，当 f 是满射时，$f[f^{-1}(B)]=B$;

(5) $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$;

(6) $f(A\setminus f^{-1}(B))=f(A)\setminus B$;

(7) $(f|_A)^{-1}(B)=A\cap f^{-1}(B)$.

注意，命题 1.1.2(1)的等式一般不成立. 例如 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=\sin x$ 把 $A=[0,2\pi]$ 和 $B=[4\pi,6\pi]$ 都映成 $[-1,1]$，但 $f(A\cap B)=\varnothing$，$f(A)\cap f(B)=[-1,1]$.

1.2 关　系

1.2.1 等价关系

定义 1.2.1 设 X 是一个集合，$R\subseteq X\times X$ 叫 X 的一个关系. 如果 $(x,y)\in R$，称 x,y 有关系 R，记为 xRy. 如果关系 R 满足以下三个条件，则称此关系为等价关系：

(1) 自反性：$\forall x\in X, xRx$;

(2) 对称性：若 xRy，则 yRx;

(3) 传递性：若 xRy, yRz，则 xRz.

等价关系一般用 $\sim$ 表示.

例 1.2.1 设 $X=\{1,2,3\}$，$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$，则 R 是 X 上的一个关系，并且是等价关系.

设 X 是一个集合，$\sim$ 是 X 上的一个等价关系，$x\in X$. 称 $[x]=\{y\in X\mid x\sim y\}$ 为一个等价类. 等价类与代表元的选取无关，即：$\forall y\in[x]$，则 $[x]=[y]$；X 的等价类构成 X 的一个划分，即：X 的任意两个等价类要么恒等，要么不相交，而且 $X=$

$\bigcup_{x\in X}[x]$.

定义 1.2.2 等价类的集合 $X/\sim\equiv\{[x]\mid x\in X\}$称为 X 关于等价关系$\sim$的商集,映射 $p:X\to X/\sim,x\mapsto[x]$叫自然投影.

例 1.2.2 设 X,R 如例 1.2.1,则 X 被等价关系 R 分成两个等价类$[1]=\{1,3\}$和$[2]=\{2\}$,商集为 $X/R=\{[1],[2]\}$,自然投影 p 为 $p(1)=p(3)=[1],p(2)=[2]$.

1.2.2 偏序集

定义 1.2.3 设 R 是集合 X 上的一个关系.若 xRy 和 yRx 同时成立必有 $x=y$,则称 R 是反对称的.X 上的一个偏序 R 是 X 上的一个自反、传递和反对称的关系.给定偏序关系的集合称为偏序集.

例 1.2.3 设

$$X=\{1,2,3\},R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(1,2),(3,2)\},$$

则 R 是 X 上的偏序关系,

$$R'=\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1)\}$$

也是偏序关系,(X,R)和(X,R')是两个不同的偏序集.

下面我们一般用$\leqslant$表示偏序关系,$(X,\leqslant)$表示偏序集.在偏序关系自明的情况下,可用 X 表示偏序集而省掉偏序关系$\leqslant$.对 $x,y\in X,x\leqslant y$ 读作 x 小于等于 y 或 y 大于等于 x;$x<y$ 表示 $x\leqslant y$ 但 $x\neq y$,读作 x 小于 y 或 y 大于 x;$x\nleqslant y$ 表示 $x\leqslant y$不成立.注意,$x\leqslant y$ 不成立并不表示 x 大于 y.在例 1.2.3 中,如果记$\leqslant$为 R',则 $1\leqslant 2$ 不成立,但同时 $1>2$ 也不成立,因为 $1>2$ 的意思是“$2\leqslant 1$ 且 $2\neq 1$”,但 $(2,1)\notin R'$.

设$(X,\leqslant)$是偏序集,$A\subseteq X$,则$\leqslant_A=(A\times A)\cap\leqslant$是 A 上的一个偏序,称$(A,\leqslant_A)$为$(X,\leqslant)$的偏序子集.如实数集合 $\mathbf{R}$ 关于通常的大小关系是一个偏序集,有理数集 $\mathbf{Q}$ 关于通常的大小关系就是 $\mathbf{R}$ 的偏序子集.

设$\leqslant$是 X 上的一个偏序,则$\leqslant^{-1}=\{(x,y)\mid(y,x)\in\leqslant\}$也是一个偏序,称为$\leqslant$的逆偏序或对偶偏序,常记为$\geqslant$.

设$(X_i,\leqslant_i)$ $(i=1,2)$是两个非空偏序集,$\leqslant$是 $X=X_1\times X_2$ 上的关系,定义如下:

$$(x_1,x_2)\leqslant(y_1,y_2)\Leftrightarrow x_1\leqslant_1 y_1,x_2\leqslant_2 y_2,$$

则$\leqslant$是 X 上的一个偏序关系,常记为$\leqslant_1\times\leqslant_2$,称为积偏序,偏序集$(X_1\times X_2,\leqslant_1\times\leqslant_2)$称为偏序集$(X_1,\leqslant_1)$与$(X_2,\leqslant_2)$的积.

定义 1.2.4 对于一个偏序集 $X,x,y\in X$,如果 $x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$,则称 x 与 y 可比较,否则称 x 和 y 不可比较.如果一个偏序集的任意两个元都可比较,则称该偏序集是全序集或线性序集.

显然，实数集 $\mathbf{R}$、有理数集 $\mathbf{Q}$ 和自然数集 $\mathbf{N}$ 关于通常的大小偏序关系都是全序集，而 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 关于 $\mathbf{R}$ 的通常偏序的积偏序则不是全序集.

例 1.2.4 (1)设 $\mathscr{A}$ 是集合 X 的一个子集族，则 $\mathscr{A}$ 关于集合的包含关系"$A\leqslant B\Leftrightarrow A\subseteq B$"是一个偏序集，记为$(\mathscr{A},\subseteq)$. 特别地，$(\mathscr{P}X,\subseteq)$是一个偏序集. 当 X 至少含两个点时，$(\mathscr{P}X,\subseteq)$不是全序集.

(2) 正整数集 $\mathbf{N}$ 关于整除偏序"$\leqslant=\{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}: m\mid n\}$"也是一个偏序集，但不是全序集.

(3) 全序集的逆偏序集是全序集.

简单的偏序集往往可用直观图表示出来，可比较的元用线段连接，线段上端的元大于下端的元. 如例 1.2.3 中的偏序关系 R 与 R' 分别可用图 1.1 的前两个图来表示. 逆序集$(X,\geqslant)$的图形恰好是原偏序集$(X,\leqslant)$的图形上下颠倒而得到的.

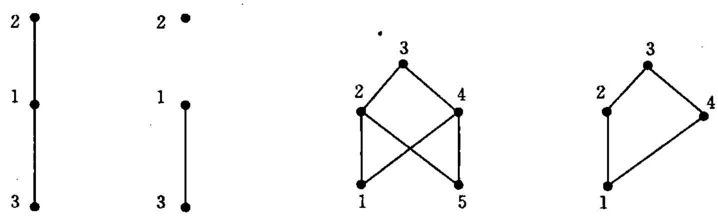

图 1.1 偏序图

思考：试写出由图 1.1 中后面两个图表示的偏序集.

定义 1.2.5 设 X 是一个偏序集，$A\subseteq X$，$a\in X$.

(1) a 是 A 的最大元$\Leftrightarrow a\in A$ 且 $\forall x\in A$ 有 $x\leqslant a$；

(2) a 是 A 的极大元$\Leftrightarrow a\in A$ 且 $\forall x\in A$，若 $a\leqslant x$，则 $a=x$；

(3) a 是 A 的一个上界$\Leftrightarrow \forall x\in A$，$x\leqslant a$；

(4) a 是 A 的上确界(记为 $\sup A$)$\Leftrightarrow a$ 是 A 的上界，且对 A 的任意上界 b，有 $a\leqslant b$，即 a 是 A 的最小上界.

对偶地可给出最小元、极小元、下界以及下确界(记为 $\inf A$)的定义，请读者自己写出这些定义.

思考：上述概念在逆序集中是怎样的？

例 1.2.5 (1) 对任一集 X，偏序集$(\mathscr{P}X,\subseteq)$有最大元 X，最小元$\varnothing$. 对 $\mathscr{P}X$ 的每个子族 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 的上确界 $\sup\mathscr{A}=\bigcup\mathscr{A}$，下确界 $\inf\mathscr{A}=\bigcap\mathscr{A}$. 若 X 至少含有两个元，则 $\mathscr{P}X$ 的子族 $\mathscr{B}=\mathscr{P}X\setminus\{X,\varnothing\}$无最大元，也无最小元；对每个 $x\in X$，$\{x\}$是 $\mathscr{B}$ 的极小元，$X\setminus\{x\}$是 $\mathscr{B}$ 的极大元.

(2) 自然数集 $\mathbf{N}$ 关于整除偏序构成偏序集$(\mathbf{N},|)$. 设 $A\subseteq\mathbf{N}$ 的任意非空有限子集，则 A 在偏序集$(\mathbf{N},|)$中的上确界 $\sup A$ 是 A 的最小公倍数，下确界 $\inf A$ 是 A 的最大公约数. 若 A 是 $\mathbf{N}$ 的无限子集，则 A 无上确界.