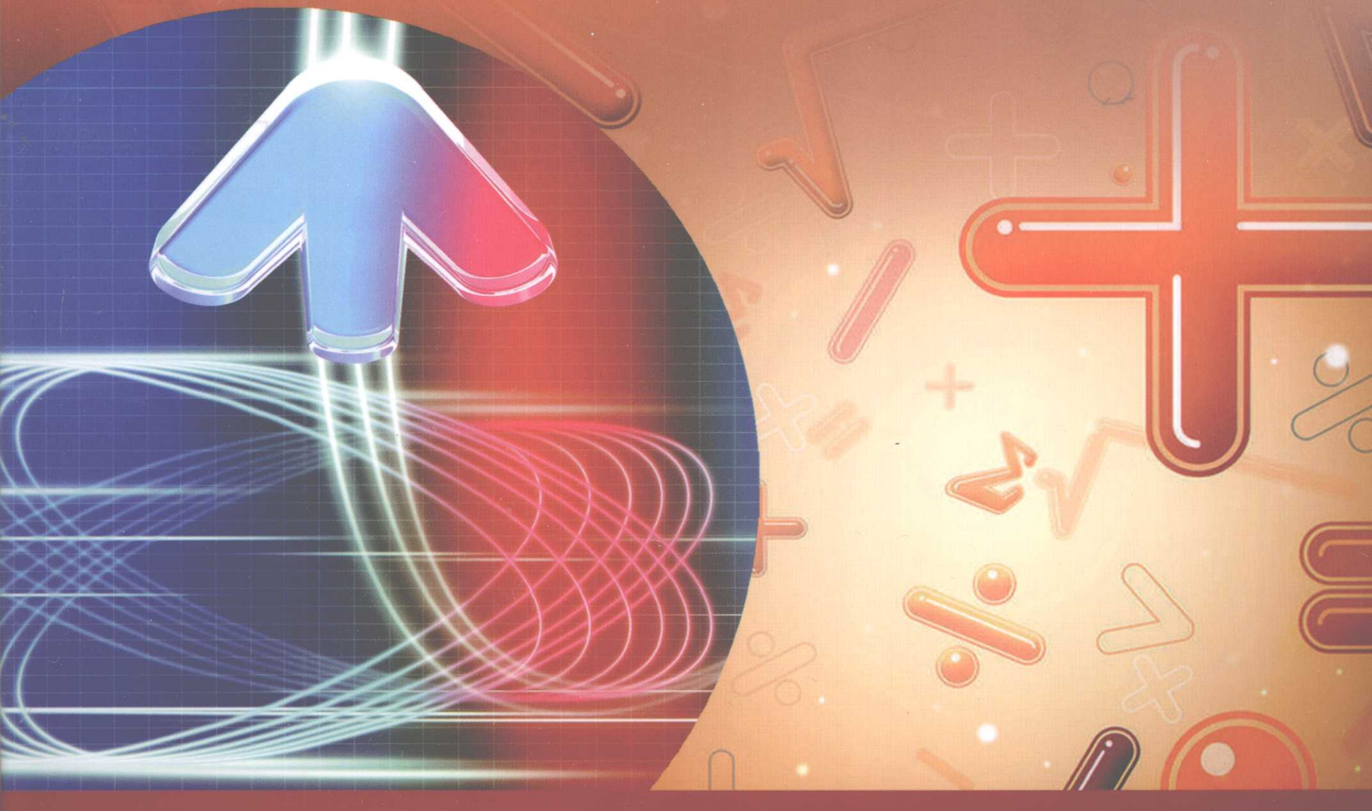
中国科学院教材建设专家委员会规划教材

全国高等中医药院校规划教材

医药高等数学

第3版

周永治　严云良　主编



科学出版社

www.sciencep.com

中国科学院教材建设专家委员会规划教材
全国高等中医药院校规划教材

医药高等数学

第 3 版

周永治　严云良　主编

科　学　出　版　社
北　京

●版权所有　侵权必究●
举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303(打假办)

内　容　简　介

本书为中国科学院教材建设专家委员会规划教材,由全国18所中医院校长期从事数学教学工作的教师联合编写.全书分10章,包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、微分方程与无穷级数等.编写中既注意了数学学科本身的科学性与系统性,同时又注意了它在中医药学科里的应用.全书文字简洁、内容精炼、由浅入深,章后有习题,书后附有答案.

本书可供医药院校各专业、各层次的学生使用,也可作为医药工作者学习高等数学的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

医药高等数学/周永治,严云良主编.—3版.—北京:科学出版社,2009
中国科学院教材建设专家委员会规划教材·全国高等中医药院校规划教材
ISBN 978-7-03-025097-1

Ⅰ.医…　Ⅱ.①周…②严…　Ⅲ.医用数学:高等数学－医学院校－教材　Ⅳ.R311　013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第128815号

策划编辑:方　霞/责任编辑:杨　扬　曹丽英/责任校对:刘亚琦
责任印制:刘士平/封面设计:黄　超

版权所有,违者必究。未经本社许可,数字图书馆不得使用

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
駿杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2001年6月第　一　版　　开本:787×1092　1/16
2004年8月第　二　版　　印张:17 1/2
2009年7月第　三　版　　字数:490 000
2009年7月第十八次印刷
印数:110 001—118 000
定价:29.80元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

《医药高等数学》(第3版)编写人员

主　　编　周永治　严云良

副主编　汪旭升　曹　敏　封　峰　邵建华　郑洁刚
　　　　　杜国文　武京君　李　新　高敏艳　黄　浩

编　　委　(以姓氏笔画为序)

王蕴华	天津中医药大学	邓　超	南京中医药大学
邓红勇	贵阳中医学院	朱予民	天津中医药大学
孙　键	长春中医药大学	严云良	浙江中医药大学
杜国文	安徽中医学院	杨文国	南京中医药大学
李　新	辽宁中医药大学	李晓红	浙江中医药大学
汪旭升	广西中医学院	陈瑞祥	北京中医药大学
陈丽君	湖北中医学院	邵建华	上海中医药大学
武京君	山东中医药大学	周永治	南京中医药大学
郑洁刚	湖南中医药大学	封　峰	南京中医药大学
赵　莹	上海中医药大学	赵文峰	河南中医学院
胡灵芝	陕西中医学院	莫修明	北京城市学院
高敏艳	天津中医药大学	黄　浩	福建中医学院
黄爱武	湖南中医药大学	黄益群	江西中医学院
曹　敏	贵阳中医学院	覃　洁	广西中医学院
傅　爽	山东中医药大学	路远芳	安徽中医学院
魏国强	福建中医学院		

第 3 版编写说明

《医药高等数学》、《医药数理统计》、《医药高等数学学习辅导》、《医药数理统计学习辅导》是全国 18 所中医院校联合编写的数学系列教材，于 2004 年 8 月由科学出版社出版. 该套教材发行面广，发行量大，在中医院校受到广大师生的欢迎. 为了进一步提高该套教材的质量，编写组根据教育部对高等中医院校数学等课程精品教材的要求，由中国科学院教材建设专家委员会指导，听取了多方意见，对教材再次作了修改、补充，编写了第 3 版的《医药高等数学》、《医药数理统计》与第 2 版的《医药高等数学学习辅导》、《医药数理统计学习辅导》. 该配套教材适合医药院校的医药类、管理类、信息类、人文类等专业的学生使用. 将于 2009 年 7 月正式出版.

本教材共 10 章，包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、微分方程、无穷级数等内容. 在不影响数学学科本身的系统性、完整性前提下，各章列举了一定数量的医药学科的例题，使其更具有医药院校教材的特色. 本教材每章后有习题，书后有习题解答，另外还配有辅导教材《医药高等数学学习辅导》. 考虑到上版教材中理论部分内容有一定的深广度，为此在本版中对理论部分内容只作小的修改，而对习题部分内容进行了重新编组，重组后的习题更紧密配合理论部分内容，更利于教学. 本教材授课需 90 ~ 100 学时，不同专业根据需要可对加“ * ”号的内容、第七章内容、第十章内容有所选择. 课时偏少的专业还可重点讲授前五章的一元函数微积分与第九章的微分方程的内容.

参加本版教材编写的有以下 18 所院校：长春中医药大学、辽宁中医药大学、天津中医药大学、北京中医药大学、北京城市学院、河南中医学院、陕西中医学院、山东中医药大学、安徽中医学院、南京中医药大学、上海中医药大学、浙江中医药大学、江西中医学院、福建中医学院、湖北中医学院、湖南中医药大学、广西中医学院、贵阳中医学院. 本教材编写过程中得到许多同行专家的关心与支持，在此一并表示感谢.

本教材尚有不少不足之处，恳请读者与同行批评指正.

编　者

2009 年 5 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目 录

第四章 不定积分

第五章 定积分及其应用

第六章 空间解析几何

第七章 多元函数微分学

第八章 多元函数积分学

第九章 微 分 方 程

第十章 无穷级数

第一章

函数与极限

高等数学是研究变量的一门科学，它的主要研究对象是函数. 极限方法是高等数学的基础，它从方法论上突出地表现了高等数学不同于初等数学的特点. 本章将介绍函数和极限的基本概念，建立极限的运算法则，给出函数连续性的定义及性质.

§1－1　函　　数

1－1.1　函数的概念

一、常量与变量

在观察和研究某一变化过程时，会遇到各种各样的量，如温度、时间、路程、重量、体积、血压、物价、利率等. 其中有的量在过程中不变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做**常量**；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做**变量**.

常量与变量的划分是相对的，它依赖于研究问题的场合，同一个量在某种场合下是常量，在另一种场合下则可能为变量. 例如，重力加速度在地球表面一个不大的范围内是常量，在一个广大的范围内就是变量.

也有这种情况，某些量在整个过程中是变化的，但在过程的某一阶段可以看做常量. 例如，人的身高在一天内看成常量，商品的价格在短期内看成是常量.

二、函数的概念

在自然现象和现实生活中，在某一变化过程中同时牵涉到几个变量，它们通常不是孤立的，而是遵循一定的规律相互依赖又相互制约地变化的，如下面的例子.

例 1　球的体积 V 与半径 R 之间有关系式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，当 R 取 $(0,+\infty)$ 中的任一个值时，按照这个关系可以唯一地确定 V 的一个值与之对应.

例 2　气象台气温记录仪所记下的某一天24小时内的气温曲线如图 1－1 所示，横坐标 t 表示时刻，纵坐标 T 表示气温. 这条曲线表示了时间 t 和气温 T 之间的关系. 对于 $[0,24]$ 上的任一个值 t_0，通过图像可以唯一地确定该时刻的气温 T_0.

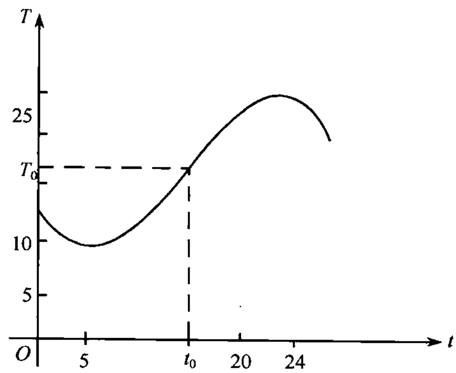


图 1－1

上面的两个例子，虽然实际意义各有不同，变量间的对应关系也是用不同方式表达的，但它们都表达了两

个变量之间的相依关系. 当其中一个变量在某范围内每取一个数值时,按照一定的规律(对应的法则),另一变量就有唯一确定的值与之对应. 由此,可以抽象出函数的定义.

定义 1 设有两个变量 x 和 y,D 为一非空数集,如果对于 D 内每个数 x,变量 y 按一定的法则 f 总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数. 记作

$$y = f(x)$$

数集 D 称为该函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量,自变量取 x_0 时的函数值记成 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$,全体函数值的集合

$$M = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \tag{1-1}$$

称为函数的值域.

函数的定义中,涉及定义域、对应法则和值域三个因素. 很明显,只要定义域和对应法则确定了,值域也就随之确定. 因此,定义域和对应法则是确定函数的两个要素. 例如,$y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$,两要素都相同,所以是同一函数;而 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$,因定义域不同,不是同一函数.

三、函数的表示法

常用的函数表示法有:解析法(公式法)、列表法、图像法.

1. 解析法

用数学运算式子来表示变量间关系的方法,称为解析法(公式法), 如例 1 是用解析法表示的函数. 用解析法表示函数便于计算和理论分析,在高等数学中讨论的函数,大都用这种方法表示.

2. 列表法

列表法即把一系列自变量的值及其对应的函数值列成一个表格来表示函数关系, 如对数表、三角函数表等. 列表法使用方便,可以不用计算直接从表上读出函数值.

3. 图像法

图像法用坐标平面内的图形(一般是曲线)表示变量间的函数关系, 如例 2 中的函数关系. 图像法的优点是直观、形象、函数特征一目了然,对研究有一定的启发性.

在实际问题中,上述三种方法常结合应用.

四、函数的基本性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若存在一个正数 M,使得当 $x \in I$ 时,恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界,如果这样的正数 M 不存在,则称 $f(x)$ 在 I 上无界. 如果函数 $f(x)$ 在其定义域内有界,则称 $f(x)$ 为有界函数.

例如,$y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的,因而是有界函数. 而 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的.

显然,如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界,则它的图形在 I 上必介于平行线 $y=\pm M$ 之间.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为对称区间 $(-L,L)$ (也可以是 $[-L,L]$,$(-\infty, +\infty)$),如对于定义

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

域的任一 x 都满足

$$f(-x)=-f(x)\quad(\text{或}f(-x)=f(x))$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数(或偶函数),否则称为非奇非偶函数.

例如,函数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 为偶函数,$f(x)=x^3+\sin x$ 为奇函数,而 $f(x)=e^x$ 是非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

3. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或}f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少).

例如,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少,而在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

4. 函数的周期性

设有函数 $f(x)$,如果存在一个不为零的数 T,使得对于定义域的任一实数 x,都有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数,T 为函数的周期,通常我们说周期函数的周期指的是最小正周期.

例如,函数 $\sin x,\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数,而 $\tan x,\cot x$ 的周期为 π.

1-1.2　分段函数、反函数、复合函数

一、分段函数

在实际问题中,经常会遇到一个函数在其定义域内的不同区间上用不同解析式表示的情形. 例如,脉冲发生器产生一个如图 1-2 所示的三角波,它的电压 u 与时间 t 的关系为

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}t, & 0\leqslant t<10\\ -\dfrac{3}{2}(t-20), & 10\leqslant t\leqslant 20\end{cases}$$

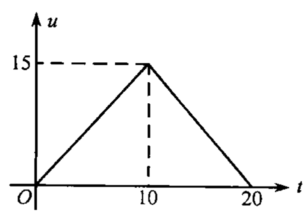


图 1-2

它表示了在不同时间区间内电压变化的不同规律.

如果一个函数在其定义域的不同区间上用不同的解析式表示,则称这种形式的函数为分段函数,必须注意,虽然分段函数在其自变量变化的不同范围内有不同的表达式,但它只是一个函数.

例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ 1-x, & x<0\end{cases}$$

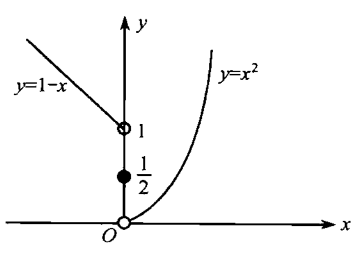


图 1-3

的图形如图 1-3 所示. 它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,当自变量取 $(0,+\infty)$ 内的数值时,对应的函数值由 $y=x^2$ 确定,当自变量取 $(-\infty,0)$ 内的数值时,函数值由 $y=1-x$ 确定,如 $f(-1)=2,f(1)=1,f(0)=\dfrac{1}{2}$.

分段函数的分段点有其特殊意义，讨论函数在分段点上的极限、连续性、可导性时务请注意.

二、反函数

在研究两个变量间的关系时，常根据实际问题的需要选定其中一个变量为自变量，另一个就是因变量. 例如，自由落体运动中，如考虑下落距离 S 随下落时间 t 的变化规律，则有 $S=\frac{1}{2}gt^2$. 有时需反过来考虑问题，已知下落距离，求下落时间 t，则从 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 解出 t，得 $t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$. 此时，t 是 S 的函数，称前者为直接函数，后者为反函数. 一般地，有如下定义.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如对于任意的 $y\in M$，有唯一的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，则变量 x 是变量 y 的函数，其对应规则记作 f^{-1}. 这个定义在 M 上的函数 $x=f^{-1}(y)$，称它为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

函数取决它的定义域和对应规则，与用什么字母表示自变量与因变量无关，而习惯上，常以 x 表示自变量，y 表示因变量，于是 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也可写成 $y=f^{-1}(x)$.

不难发现，函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别是它反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域和定义域.

可以证明：单调函数存在反函数.

例 3 求函数 $y=x^2, x\in[0,+\infty)$ 的反函数.

解 由 $y=x^2, x\in[0,+\infty)$ 解得 $x=\sqrt{y}, y\geqslant 0$. 于是 $y=x^2, x\in[0,+\infty)$ 的反函数为 $y=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$.

应当注意，函数 $y=x^2, x\in(-\infty,+\infty)$ 不存在反函数.

一般地，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在同一坐标系内的图像关于直线 $y=x$ 对称.

三、复合函数

在实际问题中，经常遇到两个变量之间的联系不是直接的，即因变量不直接依赖于自变量，而是通过另一个变量联系起来.

例如，有质量为 m 的物体，以初速度 v_0 竖直上抛，由物理学知其动能 E 是速度 v 的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

而速度 v 在不计空气阻力时又为 $v=v_0-gt$，g 是重力加速度，因此 E 通过 v 成为 t 的函数

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$$

它是由函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-gt$ 复合而成的复合函数. 一般地，有

定义 3 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或其一部分上取值时，对应的 u 值使 $y=f(u)$ 有定义，则 y 通过 u 和 x 建立了函数关系

$$y=f(u)=f(\varphi(x))$$

称为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，并把 u 叫做**中间变量**，$f(u)$ 叫**外层函数**，$\varphi(x)$ 叫**内层函数**.

例 4 求下列函数的复合函数：

(1) $y=1-u^2$ 与 $u=\log_a x$；

(2) $y=\sqrt{1-u^2}$与 $u=2^x$;

(3) $y=\arcsin u$ 与 $u=\sqrt{2+x^2}$;

(4) $f(x)=\dfrac{x}{1-2x}$,求$f(f(x))$.

解 (1) 因对于任意 $x>0$,$u=\log_a x\in(-\infty,\infty)$,它对于 $y=1-u^2$ 有意义,所以复合函数为 $y=1-\log_a{}^2x, x\in(0,\infty)$.

(2) 因当 x 在$(-\infty,0]$上变化时,$u=2^x\in(0,1]$,它对于 $y=\sqrt{1-u^2}$有意义,所以复合函数为 $y=\sqrt{1-4^x}, x\in(-\infty,0]$.

(3) 无论 x 取什么值,$u=\sqrt{2+x^2}\geqslant\sqrt{2}$,此时 u 值对 $y=\arcsin u$ 没有意义($u=\sqrt{2+x^2}$的值域与 $y=\arcsin u$ 的定义域的交集是空集),故 $y=\arcsin u$ 与 $u=\sqrt{2+x^2}$不能复合成复合函数.

(4) 因

$$f(x)=\frac{x}{1-2x}$$

所以

$$f(f(x))=\frac{f(x)}{1-2f(x)}=\frac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-2\dfrac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-4x},\quad x\neq\frac{1}{2},\frac{1}{4}$$

从上面的例子可看出,两个函数的复合是有条件的,当且仅当 $u=\varphi(x)$的值域与 $y=f(u)$的定义域有非空的交集,如例4(1)、(2)、(4)中 $y=f(u)$的定义域与 $u=\varphi(x)$的值域的交集非空,可以复合,而(3)中,交集是空集,故不能复合. 一般来讲,$y=f(\varphi(x))$的定义域比 $u=\varphi(x)$的定义域要小.

上面讲的是两个函数的复合,也可以是三个及三个以上函数的复合,设有 $y=f(u)$,$u=\varphi(v)$,$v=\psi(x)$三个函数,如满足复合的条件,则可得复合函数 $y=f(\varphi(\psi(x)))$.

我们不仅要学会把若干个简单的函数"复合"成一个复合函数,还要善于把一个复合函数"分解"为若干个简单函数. 这种分解技术在后面微积分运算中经常用到. "分解"过程与"复合"过程正好相反,它是一个从外到里的分解过程.

例5 写出下列函数的复合过程:

(1) $y=\sqrt{1-x}$;　　(2) $y=\sqrt[3]{\cos(x^2+1)}$;

(3) $y=\sin(e^{x-1})$;　　(4) $y=\left(\ln\tan\dfrac{x}{2}\right)^2$.

解 (1) $y=\sqrt{1-x}$可看成由 $y=\sqrt{u}$,$u=1-x$ 复合而成.

(2) $y=\sqrt[3]{\cos(x^2+1)}$可看成由 $y=\sqrt[3]{u}$,$u=\cos v$,$v=x^2+1$ 复合而成.

(3) $y=\sin(e^{x-1})$可看成由 $y=\sin u$,$u=e^v$,$v=x-1$ 复合而成.

(4) $y=\left(\ln\tan\dfrac{x}{2}\right)^2$ 可看成由 $y=u^2$,$u=\ln v$,$v=\tan w$,$w=\dfrac{x}{2}$复合而成.

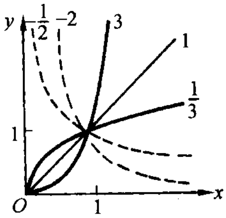
1-1.3　初等函数

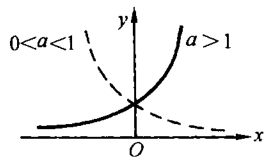
一、基本初等函数

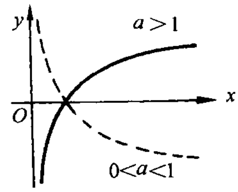
在中学已学过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数,这些函数统称为基本初等函数,为复习和应用的方便,将其归纳成表 1-1.

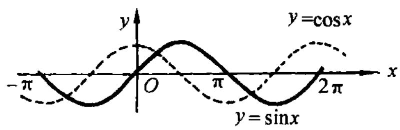
表 1－1

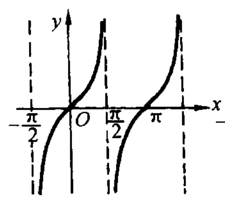
类别及解析式		定义域	值域	图形
幂函数 $y=x^{\alpha}$	$\alpha>0$ α 次抛物线	因 α 而异， 但$[0,+\infty)$ 是公共定义域	因 α 而异， 但$[0,+\infty)$ 是公共值域	(在第一象限内)
	$\alpha<0$ 令 $\alpha=-m(m>0)$ $y=x^{-m}=\frac{1}{x^{m}}$， m 次双曲线	公共定义域为 $(0,+\infty)$	公共值域为 $(0,+\infty)$	
指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	
三角函数 正弦函数 $y=\sin x$ 余弦函数 $y=\cos x$ 正切函数 $y=\tan x$ 余切函数 $y=\cot x$		$(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$ $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ $x\neq n\pi$ $(n=0,\pm1,\cdots)$	$[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$	$y=\tan x$ $y=\cot x$
反三角函数 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 反余弦函数 $y=\arccos x$ 反正切函数 $y=\arctan x$ 反余切函数 $y=\text{arccot}\,x$		$[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $[0,\pi]$ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $(0,\pi)$	$y=\arcsin x$ $y=\arccos x$ $y=\arctan x$ $y=\text{arccot}\,x$

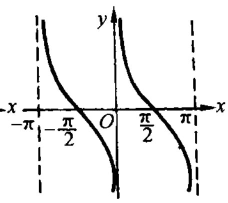


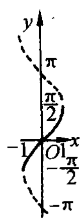


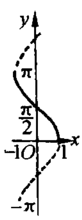


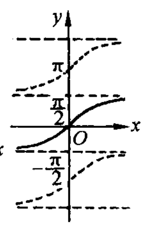


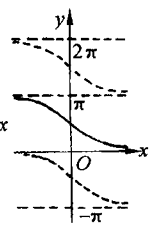












二、初等函数

定义 4　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合运算所构成的能用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

例如,$y=x^2+e^x-\ln 4$,$y=\arcsin\dfrac{1}{x^2}+5$,$y=\tan x-\sqrt{x}\cdot\sin x^2$,$s=\sqrt[3]{\cos t^2}$,…都是初等函数,而

$$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}},\quad y=\begin{cases}x+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$$

$$y=\arcsin(2+e^x),\quad y=1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots+\frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots$$

都不是初等函数. 因为 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}+\cdots}}$ 是经无数次加法、开方运算得到的,

$$y=\begin{cases}x+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$$

不是由一个式子表示的,$y=\arcsin(2+e^x)$ 不是函数,$y=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\cdots+\dfrac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots$ 是经无数次四则运算得到的. 今后讨论的函数绝大多数是初等函数.

§1－2　函数的极限

函数是高等数学研究的主要对象,而极限则是高等数学的重要工具. 极限是研究当自变量按某种方式变化时,相应地因变量将按怎样的方式变化的问题的. 高等数学中许多重要概念都与极限有关,如连续、导数、定积分、二重积分、曲线积分、级数等.

下面先介绍数列和函数极限的概念,再介绍极限的计算.

1－2.1　数列的极限

按自然数的顺序编号而排成一列的无穷多个数

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots$$

称为数列,记作 $\{x_n\}$,其中每一个数称为数列的项,第 n 项 x_n 称为数列的通项或一般项,下面举几个数列的例子.

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdots \tag{1－2}$$

$$0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^n}{n},\cdots \tag{1－3}$$

$$0.3,0.33,0.333,\cdots,0.\overbrace{33\cdots3}^{n个},\cdots \tag{1－4}$$

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots \tag{1－5}$$

$$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots \tag{1－6}$$

都是数列的例子,它们的通项分别为

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\quad \frac{n+(-1)^n}{n},\quad 0.\overbrace{33\cdots3}^{n个},\quad (-1)^{n+1},\quad 2^n$$

考查数列当 n 变化时,x_n 的变化情况,容易看出,当 n 无限增大(记作 $n\to\infty$)时,不同数列

的变化情况是有所不同的，当 $n\to\infty$ 时，其中有的数列的 x_n 能与某一个常数 a 无限接近，如数列(1-2)，当 $n\to\infty$ 时，x_n 和 0 无限接近；同样，对于数列(1-3)，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{n+(-1)^n}{n}$无限接近于 1；还有数列(1-4)，当 $n\to\infty$ 时，$0.\overbrace{33\cdots3}^{n个}$无限接近于$\frac{1}{3}$；而数列(1-5)，当 n 增大时，x_n 在 1 和 -1 间无限次跳动，既不趋向于 1，也不趋向于 -1；数列(1-6)，随 n 增大，x_n 也不断增大，但不和任何一个常数接近．数列(1-2)、(1-3)、(1-4)反映了一类数列的某种共同特性，即对于数列$\{x_n\}$，存在一个常数 a，随着 n 的无限增大，x_n 无限地接近 a．这也就是说要使得 x_n 与 a 的差的绝对值任意地小，只要 n 充分地大便可．因此，给出数列极限的定义如下：

定义 1　若对于预先给定的任意小的正数 ε，总存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon \quad (a\text{ 是一个确定常数})$$

成立，则称 a 为数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad \text{或 } x_n\to a(n\to\infty)$$

这时我们说数列是**收敛**的．否则数列是**发散**的．

定义 1 中的正整数 N 是与预先给定的正数 ε 有关的，当 ε 减小时，一般地说，N 将会相应地增大．

例 1　证明数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的极限是 1．

证

$$|x_n-a|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$$

对于预先给的任意小的正数 ε，为使 $|x_n-a|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，只需

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

若取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$（不超过$\frac{1}{\varepsilon}-1$ 的最大整数），则当 $n>N$ 时，必有

$$|x_n-a|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

于是由数列极限的定义知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$．

下面是收敛数列的两个基本定理．

定理 1（唯一性）　收敛数列只有一个极限．

证　用反证法，设数列$\{x_n\}$存在两个相异的极限 a,b（不妨设 $a<b$）．因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，故对正数 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$，存在正数 N_1，使得当 $n>N_1$ 时，恒有不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立．

同理，因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，对于上述的正数 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$，总存在正整数 N_2，使得当 $n>N_2$ 时，恒有不等式$|x_n-b|<\varepsilon$ 成立．

现在取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|a-b|=|(a-x_n)-(b-x_n)|\leqslant|x_n-a|+|x_n-b|<2\varepsilon=|a-b|$．这是不可能的．证毕．

定理 2（有界性）　收敛数列$\{x_n\}$一定有界．

证　设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由定义知，若取 $\varepsilon=1$，则存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有$|x_n-a|<1$，即

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com