高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编 李延敏

经济数学

——微积分

◎ 主　编　何英凯　金淑华

◎ 副主编　孙　波　彭　轩

高等教育出版社

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编　李延敏

经济数学——微积分

主　编　何英凯　金淑华
副主编　孙　波　彭　轩

高等教育出版社

内容提要

本书是教育科学“十一五”国家规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题项目研究成果之一。

内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程简介，书后附有习题（A）、（B）的参考答案。

本书可作为经济管理类专业本科教材，也可作为报考研究生的数学复习参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学．微积分/何英凯．金淑华主编．—北京：高等教育出版社，2009.8

ISBN 978-7-04-027245-1

Ⅰ.经… Ⅱ.①何…②金… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 112657 号

策划编辑 宋瑞才 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 郝 林
版式设计 马敬茹 **责任校对** 王 超 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	版　　次	2009年8月第1版
印　　张	24	印　　次	2009年8月第1次印刷
字　　数	440 000	定　　价	28.30元

物料号 27245-00

前　言

本书是教育科学“十一五”国家规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题项目研究成果之一。

本套高等学校经济管理学科经济数学基础系列教材由《经济数学——微积分》、《经济数学——线性代数》、《经济数学——概率论与数理统计》三本教材组成。

“经济数学——微积分”是高等学校经济与管理专业的必修基础课。为适应高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革的总目标，培养具有创新能力的高素质人才，我们在多年的微积分教学实践的基础上，经过统一策划、集体研究编写了本教材。为了保证本教材的科学性、实用性，在制定编写方针、确定教材体系、安排框架结构、习题合理搭配等方面对国内外近年来出版的同类教材进行了认真研究，对各教材的特点进行了详细的分析和比较，充分吸收了它们的优点。此外，我们还认真参考了最新颁布的《2009年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，力争使本书的内容既能满足经济类、管理类本科微积分教学的要求，又能兼顾一部分报考硕士研究生学生的需要。

根据经济类、管理类高等数学的总体要求，本书在编写过程中主要注意了以下几个问题：

1. 在符合教学大纲规定的内容和学分要求的前提下，尽可能多地介绍经济类、管理类专业所必需的数学知识，为此，教材对传统内容进行了适当取舍、结构安排稍有改动。

2. 既考虑到经济类、管理类专业对数学知识的直接或间接需要，又考虑到微积分对培养学生空间想象能力、抽象思维能力、逻辑推理能力的重要性，本教材除了详细介绍微积分的基本原理、基本方法、基本技巧之外，对于一些较少使用的公式及方法也进行了简单介绍，并对大多数定理都给出了较严格的证明。

3. 为了适应目前经济类、管理类微积分教学的实际情况，习题分成了(A)、(B)两类，(A)类习题属于基本题型，(B)类习题属于难度较大的综合题型。

本教材内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程简介，书后附有习题(A)、(B)的参考答案。

本书共有十章，分别由王慧敏(第一章，第二章)、彭轩(第三章，第四章)、金

淑华(第五章,第九章)、宋文晶(第六章,第七章)、何英凯(第八章,第十章的微分方程部分)、孙波(第十章差分方程部分)编写,全书的编写思想、结构安排、统稿定稿由何英凯承担。

本教材的出版得到了高等教育出版社的大力支持,尤其是宋瑞才策划编辑为本教材的出版做了大量的工作,在此表示衷心感谢。本教材也得到了长春税务学院、北华大学等高校的大力支持,在此一并表示衷心感谢。

虽然我们希望编写出一套质量较高、适合当前高等财经类学校数学教学实际需要的教材,但限于水平,本书仍可能存在疏漏之处,敬请广大读者批评指正。

编者

2009 年 4 月

目　　录

第一章　函　　数

函数是微积分学中最重要的基本概念之一，是现实世界中各种变量之间相互依赖关系的一种抽象，是微积分学研究的主要对象. 在本章中，我们将介绍函数的概念及其基本性质，总结在中学已学过的一些函数，并介绍一些经济学中的常用函数.

§1.1　实数集合

由于微积分学主要是在实数范围内研究问题，故本节先介绍一下与实数有关的基本知识和理论.

一、实数与实数的绝对值

1. 实数与实数轴

我们知道，实数由有理数与无理数两部分组成. 有理数包括零、正负整数和正负分数. 有理数可以写成 p/q 的形式（其中 p、q 为整数，且 $q\neq 0$），也可表示为整数、有限小数或无限循环小数，而无理数只能表示成无限不循环小数.

数轴是定义了原点、正方向与单位长度的直线，通常取水平直线的右方向为正方向（如图 1.1）.

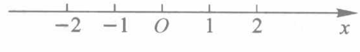

图 1.1

数轴上的每个点表示一个确定的实数，每个实数可以看成数轴上一个确定的点. 这样，就建立了数轴上的点与实数间的一一对应. 为了简便起见，我们常用同一个字母或数字既表示某个实数又表示以此实数为坐标的数轴上的对应点. 比如，数 a 与点 a，数$\sqrt{3}$与点$\sqrt{3}$…….

数轴上表示有理数的点称为**有理点**，表示无理数的点称为**无理点**. 有理数具有稠密性，即数轴上任意两个不同的有理点之间一定存在无穷多个有理点. 同样地，无理数也具有稠密性.

有理数经过四则运算（除数不为零），其结果仍为有理数；而无理数经过四则运算，其运算结果可能为无理数也可能为有理数.

2. 实数的绝对值

定义 1.1 设 a 为一个实数，定义 a 的绝对值（记为 $|a|$）为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

若 a,b 为两个实数，则由定义 1.1 可知

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, a \geqslant b, \\ b-a, a < b. \end{cases}$$

绝对值的几何意义是：$|a|$ 表示点 a 与原点 O 的距离；$|a-b|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离.

例 1.1 求解不等式 $|x-5| < |x+1|$.

解 由绝对值的几何意义可知，待解不等式表示，x 与点 5 的距离小于 x 与点 -1 的距离. 因此，从数轴上直接观察，可得待解不等式的解为（见图 1.2）

$$x > 2.$$

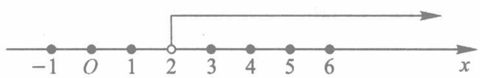

图 1.2

由此例解法可知，熟悉绝对值的几何意义是很有益的.

绝对值有下列**基本性质**：

(1) $|a| \geqslant 0$, $|a| = |-a|$, $|a| = \sqrt{a^2}$.

(2) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

(3) 不等式 $|a| \leqslant k(k \geqslant 0)$ 与不等式 $-k \leqslant a \leqslant k$ 等价.

(4) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

证 由性质(2)可知

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

于是

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant (|a| + |b|).$$

若将性质(3)中的 k 取为 $|a| + |b|$，则有

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

一般地，由数学归纳法有

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

(5) $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$.

证 由性质(4)有

$$|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b|+|b|,$$

即

$$|a|-|b| \leqslant |a-b|.$$

类似地,有

$$|b|-|a| \leqslant |b-a| = |a-b|.$$

于是有

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|.$$

(6) $|ab| = |a|\cdot|b|$.

一般地,有

$$|a_1a_2\cdots a_n| = |a_1|\cdot|a_2|\cdot\cdots\cdot|a_n|.$$

(7) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b\neq0.$

二、实数集合的表示方法

人们对数的认识是逐步发展的,首先是正整数 1,2,…. 由正整数构成的集合叫做**正整数集**,记为 $\mathbf{N}^*$. 其后发展到有理数,我们把有理数构成的集合叫做**有理数集**,记为 $\mathbf{Q}$. 无理数构成的集合叫做**无理数集**,记为 $\mathbf{I}$. 全体实数构成的集合叫做**实数集**,记为 $\mathbf{R}$. 由一些实数构成的数集是 $\mathbf{R}$ 的**子集**,区间是最常见的子集. 其定义如下:

定义 1.2 设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,定义:

(1) **闭区间** $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

(2) **开区间** $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

(3) **半开区间** $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$,

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$;

(4) **无穷区间**

$$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\},$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\},$$

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},$$

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\},$$
$$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty).$$

在今后的讨论中,有时需要考虑由某点 x_0 附近的所有点构成的集合. 为此,需引入邻域的概念.

定义 1.3 设 δ 为某个正数,称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的**邻域**,记作 $U(x_0,\delta)$. x_0 为该**邻域的中心**,δ 为该邻域的**半径**.

点 x_0 的邻域去掉中心 x_0 后的集合 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ 称为点 x_0 的**空心邻域**(或**去心邻域**),其中 $(x_0-\delta,x_0]$ 称为点 x_0 的**左邻域**,$[x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的**右邻域**,$(x_0-\delta,x_0)$ 称为点 x_0 的**空心左邻域**,$(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的**空心右邻域**.

§1.2 函 数 关 系

一、常量与变量

在日常活动、生产活动和经济活动中,经常会涉及一些量,例如时间、温度、产量、销量、成本、收入、利润等. 通常可将量分为常量与变量两类. 所谓变量就是指在某一过程中不断变化的量. 另外,有些量在某一过程中始终保持不变,称这种量为常量.

如果将变量看成是可以在一个非空数集内任意取值的量,则常量可看成是在单元素集合中取值的变量,因而常量可看成是变量的特例.

常量在数轴上表示为一个定点,变量在数轴上则表示为一个动点.

二、函数概念及其表示方法

在研究实际问题时,经常遇到的不是一个变量,而是多个变量,而且这些变量一般不是孤立地存在的,所涉及的几个变量之间常会具有某种相互依赖的变化关系,下面我们用几个实际例子来说明变量间的这种相互依赖的变化关系.

例 1.2 某气象站记录了某地某日从 0 点到 23 点的气温变化情况,其气温曲线如图 1.3 所示.

图 1.3 的气温曲线图,显示了温度 T 与时间 t 之间的依赖关系. 对于任意 $t\in[0,23]$,按照图示中的对应规则,都可以唯一确定对应的气温值 T.

例 1.3 表 1.1 给出了某个地区某个月份上半个月住宅市场整体销售统计情况,将销售量 y(单位:套)和日期 t 的关系列表表示如下:

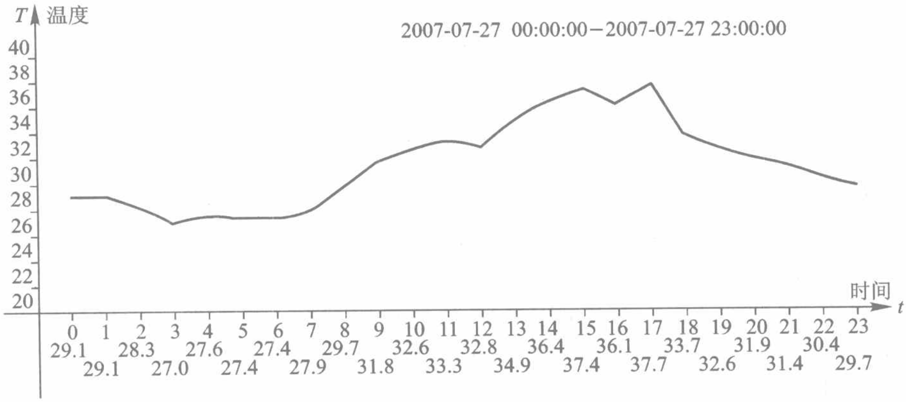

图 1.3

表 1.1

日期 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
销售量 y	58	17	16	20	32	36	80	15	34	90	127	136	100	126	157

显然，当 t 在日期集合任取一个值（如 $t=12$）时，均可按表 1.1 所示的对应规则（日期下方的数字为当日的销售量）唯一地确定一个销售量 y 的值（$y=136$）与之对应.

例 1.4 设某商店购进鸡蛋 1000 kg，按每 kg 4 元的价格出售，当售出的数量为 x kg 时，收入 R 可按公式

$$R = 4x, \quad x \in [0,1000]$$

算出唯一确定的数值.

在以上的例子中，它们各自研究的对象不同，变量之间的表达形式也不同，但是它们的本质是相同的，即在某个过程中的两个变量是相互联系的，当其中一个变量在某一范围内每取一个值时，另一个变量就按照一定的对应规则，有唯一确定的值与之对应. 将变量之间的这种相互依赖关系加以抽象概括，就得到下面的定义.

定义 1.4 D 为一个非空的实数集合，如果存在一个对应规则 f，使得对任一 $x \in D$，都能由 f 唯一地确定一个实数 y，则称对应规则 f 为定义在实数集合 D 上的**函数**. 称 D 为函数 f 的**定义域**，x 为**自变量**，y 为**因变量**.

函数 f 的定义域 D 通常记为 $D(f)$，当 D 为区间时，称 D 为**定义区间**. 如果 $x_0 \in D(f)$ 时，则称函数 f 在点 x_0 **有定义**，否则称 f 在点 x_0 **无定义**. 当函数 f 在 x_0 处有定义时，称因变量 y 的对应取值 y_0 为 x_0 所对应的**函数值**，记为 $f(x_0)$ 或

$y\big|_{x=x_0}$. 因此,对应于任一自变量 $x \in D(f)$ 的函数值 y 可记为

$$y = f(x), \quad x \in D(f).$$

全体函数值所构成的集合,称为函数的**值域**,记为 Z 或 $Z(f)$,即

$$Z = Z(f) = \{y \mid y = f(x), \quad x \in D(f)\}.$$

注意 根据定义,定义域 D 上的对应规则 f 是函数,而 $f(x)$ 是函数值. 由于我们通常是通过函数值 $f(x)$ 的变化来研究函数 f 的性质的,故习惯上,直接称 $f(x)$ 是 x 的函数或 y 是 x 的函数.

另外,根据定义可以看出,定义域 D 和对应规则 f 是构成一个函数的两个基本要素,当定义域与对应规则确定后,函数就完全确定了,而与自变量、因变量和函数符号用什么字母表示无关. 因此,如果两个函数的定义域与对应规则都分别相同,则称两个**函数相同**. 例如,函数 $y = 1 + 2x$ 与 $s = 1 + 2t$ 的定义域都是 $D = \mathbf{R}$,且对任一 $a \in \mathbf{R}$,两个函数都有相同的实数 $1 + 2a$ 与 a 对应,即有相同的对应规则,故它们是两个相同的函数. 但对于函数 $y = x + 1$ 与函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$,$y = x + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,$y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$,由于定义域不同,因此是两个不同的函数.

常用的函数表示方法有三种:**图式法**,**表格法**与**解析法(公式法)**.

图式法是一个用图形来表示变量之间对应关系的方法,如例 1.2. 图式法使函数的变化看起来直观明了.

表格法是一个用表格来表示变量之间对应关系的方法,如例 1.3. 表格法(如经济统计表、各种函数表等)便于求出函数的函数值.

解析法是一个用数学式子来表示变量之间对应关系的方法,也称为公式法,如例 1.4. 解析法便于分析和运算,故用得最多.

以上三种函数表示方法各有优缺点,在研究具体问题时,常常是将三种方法结合起来使用.

注意 前面我们用解析法表示的函数 $y = f(x)$,都是以自变量 x 的某一个解析式明显表达因变量 y,这种形式的函数称为**显函数**. 然而,表示变量间对应关系的函数形式有多种,其中的一种函数表示形式,其自变量 x 与因变量 y 之间的对应规则并不像显函数中所表示的那样明显,而是隐含于一个方程

$$F(x, y) = 0$$

之中,即对于某一集合 D 内的每一个 x,均有由上述方程唯一确定的 y 与之对应. 这时称由此方程确定的函数 $y = y(x)$ 为**隐函数**. 例如,

方程 $x + \sqrt{y} - 1 = 0$ 可确定一个隐函数

$$y=(1-x)^2,\quad x\in(-\infty,1].$$

注意 由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数，一般不像上例那样，能从方程中解出 y，并用自变量 x 的显函数形式表示. 例如，由方程 $e^{xy}+x+y=0$ 能确定 $x\in(0,+\infty)$ 内的隐函数 $y=f(x)$，使得 $e^{xf(x)}+x+f(x)=0$ 恒成立，但是 $f(x)$ 却无法用 x 的显函数形式来表达.

另外，在用解析法表示函数的时候，我们经常会遇到这样的情况：在函数定义域的不同部分，函数分别用不同的表达式表示，这种函数称为**分段函数**. 比较常见的分段函数如

绝对值函数：

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

见图 1.4.

符号函数：

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

见图 1.5.

对于任意实数 x，都有 $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$.

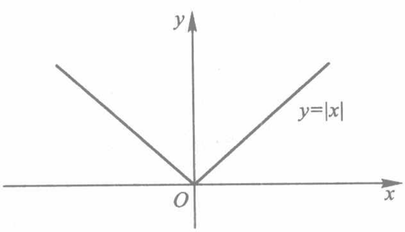

图 1.4

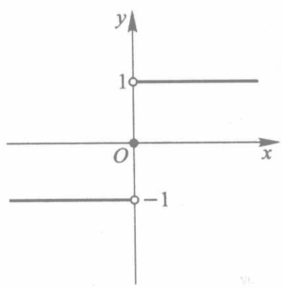

图 1.5

取整函数：

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，称为 x 的**整数部分**（见图 1.6）. 如 $[2.6]=2$，$[\pi]=3$，$\left[\dfrac{2}{3}\right]=0$，$[-2.6]=-3$.

可以证明，对任意实数 x，有不等式 $[x]\leqslant x<[x]+1$ 成立.

分段函数在其整个定义域上是一个函数，不是多个函数. 用几个式子来表示

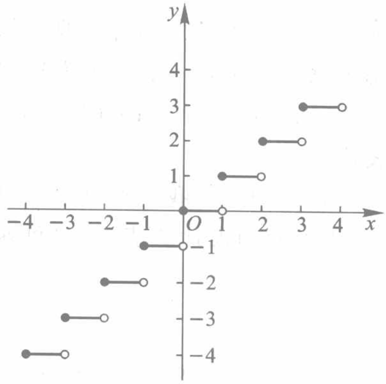

图 1.6

一个函数,不仅与函数的定义不矛盾,而且在现实问题,特别是经济学中,经常会遇到这种情形.

三、函数定义域的求法

我们知道,一个函数 $y=f(x)$ 的确定需要两个要素,定义域 $D(f)$ 和对应规则 f,二者缺一不可. 因此,在给定一个函数时,事先要给定函数的定义域. 一般情况下,函数的定义域是指使该函数表达式有意义的自变量取值的全体,这种定义域称为函数的**自然定义域**,简称为定义域. 由解析法表示的函数,通常函数的自然定义域不会写出,因此需要我们去求出函数的定义域.

为确定函数的定义域,我们必须掌握一些常用函数有意义的条件. 例如,分式的分母不能为零,对负数不能开偶次方根,对数的真数必须为正等. 在确定所给函数的定义域时,把不满足这些条件的点去掉即可得到要求的定义域. 如果一个函数是由有限个函数表达式经过四则运算得到的,那么其定义域是这有限个函数定义域的交集,并去掉使分母为零的点. 分段函数的定义域是各分段定义域的并集. 如果某个函数是从实际问题中得到的,其自变量有实际的含义,此时定义域的确定需根据问题的实际意义来确定. 例如圆面积公式 $S=\pi r^2$ 中,r 表示圆的半径,它必须是非负的数,故此函数的定义域为$[0,+\infty)$,而如果不考虑实际意义,此函数的自然定义域为$(-\infty,+\infty)$.

下面给出几个求函数定义域的例子.

例 1.5 求 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解 由 $x+1>0$,$x-1\geqslant 0$ 且 $x-1\neq 0$ 可得函数的定义域为$(1,+\infty)$.

例 1.6 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & -5\leqslant x<0,\\ x^2-1, & 0\leqslant x<2.\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求 $f(-3)$ 和 $f(1)$.

解 (1) 根据 $f(x)$ 的表达式可知,该函数的定义域为 $[-5,0)$ 和 $[0,2)$ 的并 $[-5,2)$.

(2) $f(-3)=-1, f(1)=0$.

注意求分段函数的函数值时,先要弄清自变量在哪个区间内取值,然后再用该区间上的解析式来计算相应的函数值.

§1.3 函数的基本特性

本节将介绍函数的单调性、有界性、奇偶性及周期性等几何特性.

一、单调性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在实数集 D 上有定义,对于 D 内的任意两数 x_1, $x_2(x_1<x_2)$,若总有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 在 D 内是**单调增加**的;若总有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 在 D 内是**单调减少**的. 当 $f(x)$ 在 D 内是单调增加(单调减少)时,又称 $f(x)$ 是 D 内的单调增加(单调减少)函数. 单调增加和单调减少函数统称为**单调函数**.

在几何上,单调增加的函数,其图形是随着 x 的增加而上升的曲线(如图 1.7(a));单调减少的函数,其图形是随着 x 的增加而下降的曲线(如图 1.7(b)).

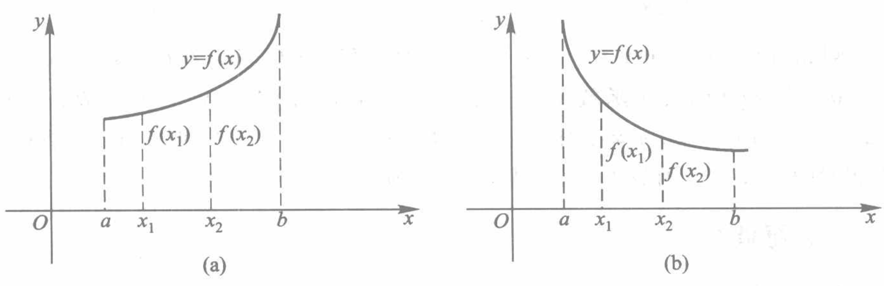

图 1.7

例 1.7 函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

证 因为