普通高等教育"十一五"国家级规划教材

线性代数与解析几何教程（上册）

樊 辉 刘宏伟 编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数与解析几何教程

(上册)

樊　恽　刘宏伟　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书讲述了高等院校线性代数与解析几何课程的基本内容，既突出了线性代数作为各专业公共课程的工具性和操作性，也反映了线性代数与解析几何、多项式知识的思想性以及它们之间的内在联系. 本书在内容处理上力求翔实流畅、易学易教. 本书分上、下两册. 上册内容包括空间向量、直线与平面、行列式、矩阵与向量、多项式、矩阵的特征系与相似对角化等6章. 每节后配备了一定数量的练习题, 章后配备有综合性较强的习题. 上、下册均有符号说明、部分习题答案与提示, 并附有名词索引, 便于阅读查找.

本书为板块结构, 遵循按需选取. 本书既可作为数学各专业学生的教学用书, 也可作为非数学专业学生的教学用书, 对其他课程的教师也具有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何教程. 上册/樊恽, 刘宏伟编. —北京: 科学出版社, 2009

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-03-025044-5

I. 线… II. ① 樊… ② 刘… III. ① 线性代数-高等学校-教材 ② 解析几何-高等学校-教材 IV. O151.2 O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第122512号

责任编辑: 李鹏奇 王 静 房 阳 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2009年8月第一次印刷 印张: 17

印数: 1—3 500 字数: 333 000

定价: 27.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

高等代数、解析几何是大学数学课程中最基础的几门课程中的两门. 它们是大部分专业的公修课, 对数学各专业、师范类数学专业更具基础性和重要性. 高等代数通常包括线性代数和少量多项式内容, 解析几何则主要是以代数方法研究直线、平面、曲线、曲面. 线性代数和多项式也有广泛几何背景. 作者多年来从事这两门课程的合并教学. 在实践基础上, 5 年前曾出版了《线性代数与几何引论》, 在涵盖高等代数与解析几何的标准内容的基础上, 适当考虑了考研等需求, 处理方式上也下了一番功夫, 不足之处主要是操作性差了一点: 编排比较浓缩, 讲述过于简练. 在近几年教学实践的基础上, 作者希望重新编写一部学生比较容易阅读、教师比较容易使用的教材. 本书就是这种努力的产物.

本书内容比较丰富, 共 12 章, 上、下册各 6 章. 选取材料涵盖了高等代数与解析几何的标准内容, 而且不论是正文还是习题都有更广的适应性, 如可作考研复习参考等. 全书基本是板块式结构, 有利于教学安排.

第 1, 2 章和第 8, 9 章是两个解析几何板块. 前者基本是线性部分, 也是线性代数的几何背景; 后者是曲线曲面部分, 二次曲线曲面分类的关键步骤是主轴化, 所以放在第 7 章二次型之后.

第 3, 4 章和第 5, 6 章是两个高等代数基础板块. 前者是最基础的部分; 后者是多项式、特征系和对角化, 特征系需要较多的多项式知识.

第 7 章二次型, 也是高等代数的基础板块.

第 10~12 章则是数学专业的线性代数板块.

可见, 第 3, 4, 6 章相当于一般理工科线性代数课程, 加上第 7 章则可适应较高要求.

四个高等代数板块则构成数学专业高等代数两学期课程.

全书作为数学各专业、师范类数学专业教材, 适合三学期课程: 第 1~4 章 (约 90 课时)、第 5~9 章 (约 90 课时)、第 10~12 章 (约 72 课时), 这个进度是与专业整体课程安排和谐共进的.

考虑教学方便, 本书尽量设计为一个教材节可供一次课 (两课时) 讲授再辅以适当习题课时. 标以 † 的章节是可以不讲授的内容.

尽管编排带有板块性质, 但从上面各板块的介绍已可看出各章之间思想内容的交叉、转换融合. 而且, 章节材料的处理也尽量体现思想的转换融合和提炼, 如最基础的第 4 章, 以线性方程组为导引, 以解析几何向量为实例, 导入数序列向量空间

和矩阵概念; 以消去法即矩阵的初等变换为基本思想技巧, 推导出矩阵的秩等基本定理; 再作为应用得出关于线性方程组的基本理论. 这样, 线性方程组与矩阵内容融为一体; 思想渊源、基本理论、操作技巧融为一体.

本书包含三个应用实例: 里昂捷夫经济模型、列斯里群体模型、极小平方逼近.

本书习题量较大. 对初学者可适当布置练习, 稍难的习题如每章补充习题可供复习选讲、考研训练等. 书后附有部分习题答案与提示.

书中附有符号说明和名词索引, 方便阅读查找.

基础教学任重道远, 诚盼斧正.

樊　恽　刘宏伟

2008 年 11 月

于武昌桂子山

符 号 说 明

下面对全书使用符号的惯例和在较多地方出现的符号做一简短说明.

$A := B$　表示用 A 记 B

$B =: A$　表示 B 记作 A

$\forall$　表示 "对所有"

$\exists$　表示 "存在"

$\square$　表示证明完毕, 或证明省略

$\sum\limits_{i=1}^{n}$　表示跑动标识 i 从 1 跑到 n 的和

$\prod\limits_{i=1}^{n}$　表示跑动标识 i 从 1 跑到 n 的积

$f: A \to B$　从集 A 到集 B 的映射

$a \mapsto b$　表示元素 a 映射为元素 b

id　表示恒等映射 (恒等变换)

$\mathrm{Im}(f)$　映射 $f: A \to B$ 的象

$\varnothing$　表示空集

板书黑体 $\mathbb{F}$　表示一个数域, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 分别表示有理数域、实数域、复数域

i　表示虚数单位, 即 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$(数学斜体 i, j 等常用来表示跑动标号)

小写英文字母 a, b, c 等　常表示数

大写英文字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 等　常表示矩阵

单位矩阵 (亦称恒等矩阵) 记作 $\boldsymbol{E}$, 零矩阵记作 $\boldsymbol{O}$

大写英文字母 V, U, W 等　常表示向量空间; $W \leqslant V$　表示 W 是 V 的子空间

小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 等　常表示向量 (很多地方, 多项式的变元 (不定元) 用 λ 表示)

零向量记作 $\mathbf{0}$

花写英文字母 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ 等　常表示线性变换

$\overrightarrow{AB}$　表示以 A 为起点以 B 为终点的向量

$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$　表示从 n 个东西选取 k 个的组合数

$\deg f(x)$　表示多项式 $f(x)$ 的次数

$\gcd(f(x), g(x))$　表示多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式

$\gcd(m, n)$　表示整数 m, n 的最大公因数

$\mathrm{lcm}(f(x), g(x))$　表示多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的最小公倍式

$\mathrm{lcm}(m, n)$　表示整数 m, n 的最小公倍数

$\min\{a, b, \cdots\}$ 表示 $a, b, \cdots$ 中最小的数

$\max\{a, b, \cdots\}$ 表示 $a, b, \cdots$ 中最大的数

$\mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ 表示对角线元为 $d_1, \cdots, d_n$ 的对角矩阵

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵, $(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 表示列向量

$\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置共轭矩阵

$\boldsymbol{A}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_l \\ j_1, \cdots, j_m \end{pmatrix}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1, \cdots, i_l$ 行, 第 $j_1, \cdots, j_m$ 列决定的子矩阵

$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹

$\det \boldsymbol{A}$ 或 $|\boldsymbol{A}|$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

$\Delta_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式

$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k)$ 表示由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 生成的子空间

$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$ 表示欧氏空间的内积

$\mathbb{F}[\lambda]$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有多项式的集合

$M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $m \times n$ 矩阵的集合

$M_n(\mathbb{F})$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶方阵的集合

$GL_n(\mathbb{F})$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶可逆方阵的集合

目 录

第1章　空间向量

解析几何用代数方法研究几何问题. 空间的基本几何对象是点与向量. 在空间建立坐标系, 点与向量就转化为坐标, 几何对象和代数形式之间就有了自由地相互转换的桥梁: 几何问题有了代数表达, 代数问题有了几何形象.

本章讨论空间向量及其运算. 它们是讨论直线和平面的主要工具, 也是线性代数的极好思想模型.

恒以 $\mathbb{R}$ 记所有实数的集合, $\mathbb{R}$ 与实数轴上的点一一对应.

1.1　空间向量及其线性运算

物理学提供了空间向量的典型模型, 如力、速度、加速度、力矩等. 它们的共同特点是具有三要素: 大小、方向、作用点 (也就是向量的起点). 从某种意义来说, "作用点" 这个要素是力和速度等物理向量在具体实现时的要素. 例如, 如果两个力大小相等、方向相同, 那么它们实际上就是相等的力, 见图 1.1.1, 只是在这个力作用在具体物体上时 "作用点" 这个要素才起作用. 所以暂不考虑 "作用点" 这个要素. 因此, 在解析几何中, 称有大小、有方向的量为**向量**.

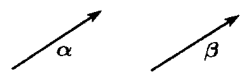


图 1.1.1

本书中, 通常用小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 等来标记向量, 用像图 1.1.1 那样的有向线段来图示向量.

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的大小称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**绝对值**, 或称**长度**, 或称**模**, 记作 $|\boldsymbol{\alpha}|$.

如果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 大小相等、方向相同, 则称为相等的向量, 记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

三点说明: (1) 如上所述, 没有考虑物理中的物理向量具体作用时的 "作用点" 这个要素, 所以我们说的向量也称为**自由向量**. 注意, 本书中的 "向量" 一词在没有特别说明时都是指这种自由向量.

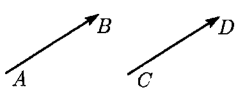


图 1.1.2

(2) 空间两点 A, B, 以 A 为起点以 B 为终点决定的向量可记作 $\overrightarrow{AB}$. 这种表示向量的方式在某些场合有方便之处, 但是要注意, 按照上面说的向量的意义, 如果向量 $\overrightarrow{CD}$ 经过平移后可重合于 $\overrightarrow{AB}$, 则作为向量有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (图 1.1.2).

(3) 长度为零的向量称为**零向量**. 为简便, 零向量记作 $\mathbf{0}$. 大小、方向是向量的两要素, 但注意: 零向量 $\mathbf{0}$ 是唯一的例外, 它无方向, 也可以说它具任意方向.

从物理和几何的背景, 有几种关于向量的运算. 本节先定义两种基本运算, 称为向量的**线性运算**.

向量的线性运算　(1) **向量加法**. 把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共起点放置, 以它们为一对邻边构成平行四边形, 以公共起点为起点的对角线指向的向量称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和, 记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$, 见图 1.1.3(a), 这称为向量加法的**平行四边形法则**.

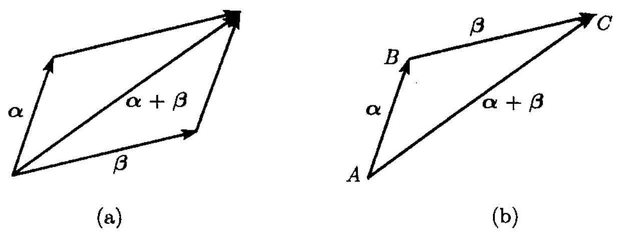


图 1.1.3

等价地, 还可以把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 首尾相接放置 (即把 $\boldsymbol{\beta}$ 的起点置于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点), 如图 1.1.3(b) 所示, 那么从 $\boldsymbol{\alpha}$ 的起点到 $\boldsymbol{\beta}$ 的终点的向量就是它们的和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 所以, 用起点终点的方式来表示向量, 向量加法可简单表写为

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

这称为向量加法的**三角形法则**.

(2) **实数乘向量**. 设 k 为实数, $\boldsymbol{\alpha}$ 为向量. 向量 $k\cdot\boldsymbol{\alpha}$(简记为 $k\boldsymbol{\alpha}$) 定义为

$$\text{大小: } |k\cdot\boldsymbol{\alpha}|=|k|\cdot|\boldsymbol{\alpha}|;\quad \text{方向: }\begin{cases}\text{与 }\boldsymbol{\alpha}\text{ 同向}, & k>0,\\ \text{与 }\boldsymbol{\alpha}\text{ 反向}, & k<0,\\ \text{任意方向}, & k=0,\end{cases}$$

称 $k\boldsymbol{\alpha}$ 为实数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**纯量积**, k 称为**系数**. 这个运算也称为 “数乘向量”.

图 1.1.4 是实数乘向量的几个图示.

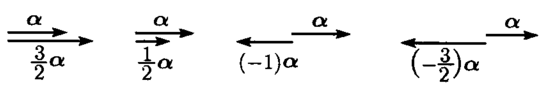


图 1.1.4

向量线性运算的基本性质　对任向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 和任实数 k, l 以下成立:

(V1) 加法交换律　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

(V2) 加法结合律 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$.

(V3) 零向量特征 $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}$.

(V4) 负向量 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 大小相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量, 记作 $-\boldsymbol{\alpha}$, 它满足 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}=(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}$.

(V5) 数乘结合律 $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$.

(V6) 数乘对向量加法分配律 $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

(V7) 数乘对实数加法分配律 $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

(V8) 数乘幺模律 $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

证 (V1) 由向量加法的平行四边形法则可知 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

(V2) 图 1.1.5(a) 是按三角形法则计算 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$, 图 1.1.5(b) 则是按三角形法则计算 $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$, 结果都是将向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 首尾相接后从 $\boldsymbol{\alpha}$ 的起点到 $\boldsymbol{\gamma}$ 的终点的向量, 所以 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$.

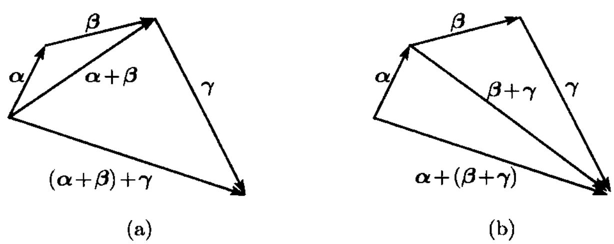


图 1.1.5

按向量加法的平行四边形法则, (V3), (V4) 都是显然的.

(V5) 按实数乘以向量的定义, 有

$$|(kl)\boldsymbol{\alpha}|=|kl|\cdot|\boldsymbol{\alpha}|=|k|\cdot|l|\cdot|\boldsymbol{\alpha}|=|k|\cdot(|l|\cdot|\boldsymbol{\alpha}|)=|k|\cdot|l\boldsymbol{\alpha}|=|k(l\boldsymbol{\alpha})|,$$

就是说, 向量 $(kl)\boldsymbol{\alpha}$ 与 $k(l\boldsymbol{\alpha})$ 大小相等, 然后确定方向.

$$\text{向量 } k(l\boldsymbol{\alpha}) \text{ 的方向:}\begin{cases}\text{与 } l\boldsymbol{\alpha} \text{ 同向}, & k>0,\\ \text{与 } l\boldsymbol{\alpha} \text{ 反向}, & k<0,\\ \text{任意方向}, & k=0,\end{cases}$$

但 $l\boldsymbol{\alpha}$ 的方向在 $l>0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相同, 而在 $l<0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相反, 所以得

$$\text{向量 } k(l\boldsymbol{\alpha}) \text{ 的方向:}\begin{cases}\text{与 } \boldsymbol{\alpha} \text{ 同向}, & k>0 \text{ 且 } l>0, \text{ 或 } k<0 \text{ 且 } l<0,\\ \text{与 } \boldsymbol{\alpha} \text{ 反向}, & k<0 \text{ 且 } l>0, \text{ 或 } k>0 \text{ 且 } l<0,\\ \text{任意方向}, & k=0, \text{ 或 } l=0.\end{cases}$$

另一方面, 马上可以得到

$$\text{向量 } (kl)\boldsymbol{\alpha} \text{ 的方向：} \begin{cases} \text{与 } \boldsymbol{\alpha} \text{ 同向}, & kl > 0, \\ \text{与 } \boldsymbol{\alpha} \text{ 反向}, & kl < 0, \\ \text{任意方向}, & kl = 0. \end{cases}$$

比较两个结果, 就可以断言向量 $(kl)\boldsymbol{\alpha}$ 与向量 $k(l\boldsymbol{\alpha})$ 的方向相同. 按向量相等的规定, 得 $(kl)\boldsymbol{\alpha} = k(l\boldsymbol{\alpha})$.

(V6) 和 (V7) 的证明留作习题.

(V8) 从实数乘向量的定义, $|1\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}|$, $1\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同, 即 $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$. □

这些性质将是以后进一步抽象研究的出发点, 所以列为基本性质.

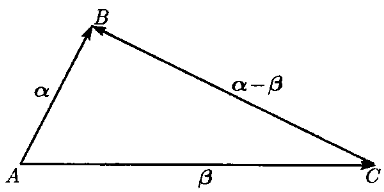


图 1.1.6

从基本运算可产生一个导出运算: **向量减法**, 定义为 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta})$. 这与数的减法定义类似, 也类似地读作 "减去一个向量等于加上它的相反的向量".

用起点终点的方式来表示向量, 向量减法可简单表写为 (图 1.1.6)

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}\ .$$

关于向量线性运算的几个进一步的性质如下:

(V9) $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $k = 0$ 或者 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

(V10) 符号法则　$-(-\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$; $(-k)\boldsymbol{\alpha} = -k\boldsymbol{\alpha} = k(-\boldsymbol{\alpha})$; 特别地, $(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$.

(V11) 减法符号法则　$\boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma}$;

$$\boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}.$$

证　(V9) $|k\boldsymbol{\alpha}| = 0$ 当且仅当 $|k| \cdot |\boldsymbol{\alpha}| = 0$, 当且仅当或者 $|k| = 0$ 或者 $|\boldsymbol{\alpha}| = 0$, 当且仅当或者 $k = 0$ 或者 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

(V10) $-(-\boldsymbol{\alpha})$ 是与 $-\boldsymbol{\alpha}$ 大小相等方向相反的向量, 所以就是 $\boldsymbol{\alpha}$. 按实数乘向量的定义, $|(-1)\boldsymbol{\alpha}| = |-1| \cdot |\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}|$, $(-1)\boldsymbol{\alpha}$ 方向与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相反, 所以 $(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$. 因而, $(-k)\boldsymbol{\alpha} = \big((-1)k\big)\boldsymbol{\alpha} = (-1)(k\boldsymbol{\alpha}) = -k\boldsymbol{\alpha}$. 类似地, $-k\boldsymbol{\alpha} = k(-\boldsymbol{\alpha})$.

(V11) $\boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha} + (-1)\big(\boldsymbol{\beta} + (-1)\boldsymbol{\gamma}\big) = \boldsymbol{\alpha} + (-1)\boldsymbol{\beta} + (-1)(-1)\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$. 类似地证明另一等式. □

以上性质也可以从基本性质按纯逻辑方式推导出来 (在 10.1 节中将这样做), 所以称为导出性质.

以上概念与性质及其推导都有相对具体的物理和几何背景, 相对容易理解, 故没有列举具体例子.

现在以一个具体应用例题结束本节.

例 1 设 M 是三角形 ABC 的重心, O 是空间中任意一点. 证明:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\cdot\overrightarrow{OM}.$$

证 如图 1.1.7 所示, 取边 BC 的中点 D, 则 $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$, $\overrightarrow{MA}+2\cdot\overrightarrow{MD}=\mathbf{0}$, 故

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\=&\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC})\\=&\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OD}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})\\=&(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA})+2\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD})\\=&3\cdot\overrightarrow{OM}+(\overrightarrow{MA}+2\cdot\overrightarrow{MD})\\=&3\cdot\overrightarrow{OM}.\end{aligned}$$

□

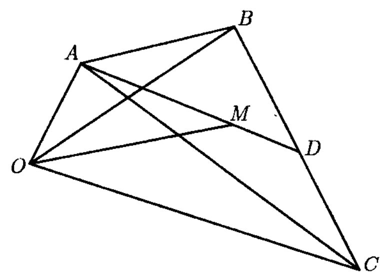


图 1.1.7

习 题 1.1

1. 证明: 向量线性运算基本性质 (V6), (V7).

2^+. 设 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 证明: $\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向的单位长的向量.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是向量, k, a_i, b_i 是实数, 其中 $i=1,2,3$. 如果

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_3\boldsymbol{\varepsilon}_3,\quad \boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+b_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+b_3\boldsymbol{\varepsilon}_3,$$

试用 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 把 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 和 $k\boldsymbol{\alpha}$ 表示出来.

4. 证明下列不等式并指出等号成立的条件:

(1) $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$;

(2) $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|-|\boldsymbol{\beta}|$.

5. 在三角形 ABC 中, 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\beta}$. 试作出下列向量:

(1) $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$; (2) $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$; (3) $\boldsymbol{\alpha}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\beta}$.

6. 在三角形 ABC 中, D 是边 BC 上的点使得 $|\overrightarrow{BD}|:|\overrightarrow{DC}|=m:n$. 试用向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 来表示向量 $\overrightarrow{AD}$.

7. 在三角形 ABC 中求一点 O, 使得 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

1.2 向量的共线与共面

定义 1.2.1 称几个向量**共线**, 如果把它们的起点重合时它们在一条直线上. 称几个向量**共面**, 如果把它们的起点重合时它们在一个平面上.

可见, 向量的共线共面就是它们的起点重合时它们决定的直线的共线共面. 因此, 一个向量一定共线, 两个向量一定共面. 以下结论也都是显然的:

(1) 零向量与任一向量共线. 零向量与任一向量共面.

(2) 共线的向量也可作为共面的向量, 因为直线可以放在一个平面中. 反之不然, 因为平面上的相交两条直线不一定重合为一条直线.

(3) 如果几个向量共面, 那么它们的一部分当然也共面.

例如, 在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中易见: 向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ 共面, 但是, 向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ 不共面.

命题 1.2.1　设向量 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, 则以下两断言等价:

(i) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线.

(ii) 存在实数 k 使得 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}$.

证　首先由 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, 得知 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向的单位长的向量, 见习题 1.1 的第 2 题.

(i) $\Rightarrow$ (ii). 设 (i) 成立, 即向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线, 那么 $\boldsymbol{\beta}$ 与单位长的向量 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 同向或反向. 而 $\boldsymbol{\beta}$ 长度为 $|\boldsymbol{\beta}|$, 所以

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{cases} \dfrac{|\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\beta}\text{与}\boldsymbol{\alpha}\text{同向}, \\ -\dfrac{|\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\beta}\text{与}\boldsymbol{\alpha}\text{反向}, \\ 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

即存在实数 k 使得 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}$, 得 (ii) 成立.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 设 (ii) 成立, 即 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}$. 按实数乘向量的定义, $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向或反向, 那么把它们共起点放置时它们在一条直线上, 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线, 得 (i) 成立. □

命题 1.2.1 也可以简单地陈述为

设向量 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, 则向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线的充分必要条件是存在实数 k 使得 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}$.

这样陈述时, 上面的 "(ii) $\Rightarrow$ (i)" 就是充分性, "(i) $\Rightarrow$ (ii)" 就是必要性.

"充分必要条件" 还可以更简单地表述为 "当且仅当", 就是说命题 1.2.1 还可以更简单地陈述为

设向量 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, 则向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线当且仅当存在实数 k 使得 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}$.

以后将较多地使用这种 "当且仅当" 的陈述方式.

推论 1.2.1　两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线当且仅当存在不全为零的实数 k, l 使得

$$k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0} .$$

证　必要性 (即 "仅当"). 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 共线. 若 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则 $1\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, 其中系数 1, 0 不全为零. 再设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 由命题 1.2.1, 存在实数 k 使得 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}$, 即 $k\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, 其中系数 k, -1 不全为零.

充分性 (即 "当"). 设 $k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, 其中系数 k,l 不全为零. 若 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线. 下设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. 那么可肯定 $l \neq 0$, 否则 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 但 $k \neq 0$, 于是 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 这与已设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 相矛盾, 所以 $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{-k}{l}\boldsymbol{\alpha}$. 仍由命题 1.2.1, $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线. □

将这个推论与命题 1.2.1 相比, 这里推论说了两个断言 "两个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 共线" 与 "存在不全为零的实数 k, l 使得 $k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$" 是等价的, 但是没有附加任何前提条件. 反观命题 1.2.1, 那里的两断言等价是在前提条件 "向量 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$" 之下的等价! 读者可看出: 如果没有这个前提条件, 命题 1.2.1 中的断言 (i) 与断言 (ii) 是不等价的. 因为当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时, 断言 (i) 总是成立的, 但 (ii) 却仅在 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ 时成立, 只要 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ 断言 (ii) 就不成立, 所以这时断言 (i) 与断言 (ii) 不等价!

按定义, 向量的共线就是把它们共起点放置时它们的起点终点的共线问题.

引理 1.2.1　设 O, A, B, C 是空间四点且 $A \neq B$, 设 $k \in \mathbb{R}$, 那么

$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

当且仅当

$$\overrightarrow{OC} = (1-k) \cdot \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}.$$

证　因为 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, 所以

$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

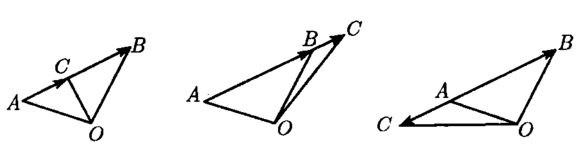
当且仅当

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = k \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

当且仅当

$$\overrightarrow{OC} = (1-k) \cdot \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}.$$ □

注　如果 $A \neq B$, 则 $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ 就是说 C 在 A 与 B 的连线上 (图 1.2.1), 而且



$0<k<1$　　　$1<k$　　　$k<0$

图 1.2.1

(1) $0 < k < 1$ 时, C 在线段 AB 内 (即不含端点 A,B); $k = 0$ 时, $C = A$; $k = 1$ 时, $C = B$.

(2) $k > 1$ 则表明 C 在直线 AB 上 B 点一侧以外.

(3) $k < 0$ 则表明 C 在直线 AB 上 A 点一侧以外.

但是, 如果 $A = B$, 则 $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ 只能在 $C = A = B$ 时成立; 另一方面, 等式 $\overrightarrow{OC} = (1-k) \cdot \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}$ 也表明 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$, 即只能在 $C = A$ 时成立.

下面讨论向量共面的条件.

命题 1.2.2　设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 不共线, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共面当且仅当存在实数 k, l 使得

$$\boldsymbol{\gamma} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta}\ .$$

注　形如 $k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta}$ 的向量称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的**线性组合**, 其中 k, l 称为**组合系数**. 如果 $\boldsymbol{\gamma} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta}$, 则说 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的线性组合, 或说 $\boldsymbol{\gamma}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 通过系数 k, l **线性表出**.

证　必要性. 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共面. 把三个向量的起点重合, 由于 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 不共线, 它们决定的直线 L,M 相交于它们的共同起点 (即它们决定一个**斜坐标系**), 见图 1.2.2. 从 $\boldsymbol{\gamma}$ 的终点分别作平行于直线 M, L 的线与直线 L,M 分别相交, 就得到 $\boldsymbol{\gamma}$ 在直线 L,M 上的 (斜) 投影. 由命题 1.2.1, $\boldsymbol{\gamma}$ 在 L 上的斜投影可以写为 $k\boldsymbol{\alpha}$, 而 $\boldsymbol{\gamma}$ 在 M 上的斜投影可以写为 $l\boldsymbol{\beta}$. 由平行四边形法则, 得 $\boldsymbol{\gamma} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta}$.

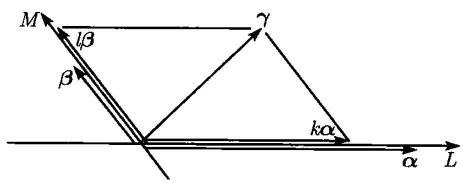


图 1.2.2

充分性. 由 $\boldsymbol{\gamma} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta}$ 按向量加法平行四边形法则即知 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共面. □

推论 1.2.2　三向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面当且仅当存在不全为零的实数 k, l, m 使得

$$k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} + m\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}\ .$$

证　必要性. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面. 如果 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线, 由推论 1.2.1, 有不全为零的实数 k, l 使得 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, 从而 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}+0\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, 其中的系数 $k, l, 0$ 不全为零. 下设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 不共线. 由命题 1.2.2, 有实数 k, l 使得 $\boldsymbol{\gamma} = k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}$, 于是 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}+(-1)\cdot\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, 其中的系数 $k, l, -1$ 不全为零.

充分性. 设 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}+m\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, 其中 k, l, m 不全为零. 如果 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 共线, 则 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 当然共面. 下设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 不共线. 首先可肯定 $m \neq 0$, 因为若 $m = 0$, 则 $k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, 但 k, l 不全为零, 于是由命题 1.2.1 的推论知 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线, 这与已设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 不共线相