21世纪高等院校教材

高等数学

（下 册）

常迎香 主编

栗永安 李 秦 刘海忠 张仲荣 刘 旭 编

褚衍东 主审

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

高等数学

（下册）

常迎香 主 编

栗永安 李 秦 刘海忠 张仲荣 刘 旭 编

褚衍东 主 审

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是在高等教育大众化的新形势下，根据编者多年的教学实践，并结合工科院校《高等数学课程教学基本要求》而编写的. 全书分上、下两册. 上册内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学及微分方程，下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数. 每节之后配有习题，每章后配有自测题，书后附有部分习题答案与提示、几种常用的曲线. 全书力求结构严谨，逻辑清晰，通俗易懂.

本书可供高等院校工科各专业学生使用，也可供广大教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/常迎香主编；栗永安等编. —北京：科学出版社，2009
21世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-025162-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①常…②栗… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 134889 号

责任编辑：赵 靖 李鹏奇 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009年8月第一次印刷 印张：13 1/2
印数：1—4 000 字数：257 000

定价：42.00 元(上、下册)
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

随着我国高等学校办学规模逐年扩大,高等教育已从精英教育逐渐走向了大众化教育,因材施教就成了当前教学改革和课程建设的重要内容之一.因材施教首先是教学手段的改革和教材的更新,而根据学生自身情况和教学目的实行分层次教学是目前大众化教育下因材施教所采用的一种教学手段.编写适应分层次教学的教材是完成分层次教学必不可少的工具.本书正是针对这种情况为适应分层次教学而编写的.

在这一指导思想下,本书遵循的编写原则是:在教学内容的深度和广度方面达到工科院校《高等数学课程教学基本要求》的前提下,依据学生的实际情况,强调对学生应用能力的培养,力求做到由浅入深,循序渐进,强化基本概念与基本理论,淡化某些计算技巧与抽象理论的证明,配备精选的难度适中、适量的习题,使教师易用、易教,学生易学、易懂.

本书的编写具有以下特点:

(1) 本书是为我国工科院校本科编写的,考虑到使用本书学生的特点,在注重对数学思想方法和应用能力的培养训练的同时,对于验算技巧和逻辑推理的要求相对降低了一些.例如,在函数部分减少了学生比较熟悉的集合的有关概念,增加了学生不太了解的极坐标系及极坐标系下函数表示法;在极限的定义部分,先给出直观的通俗定义,再给出严格的数学定义;在定积分应用中,将旋转体体积作为平行截面面积已知的立体的特例;微分方程一章,先介绍有关微分方程的解法,再介绍微分方程的建立和解法;在空间解析几何与向量代数中增加了曲面围成的立体图形的描绘;在多元函数微分学中,给出多元复合函数的结构图,便于学生计算多元函数的偏导数.

(2) 突出平台思想,重直观性和实用性.对于有些证明较难、较烦的定理或不加证明直接作为平台应用,或用直观方法归纳得出,使概念讲述平易直观,逻辑推理展开迅速简明,教学方法通用有力,力求让学生学得容易一些、生动一些、实用一些.

本书分为上、下两册.上册内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学及微分方程.下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分

学、多元函数积分学、无穷级数. 每节之后配有习题，每章后配有自测题，书末附有部分习题答案与提示、几种常用的曲线.

本书由常迎香教授制定编写框架；第 1、2、5 章由李秦副教授完成；第 3、4 章由张仲荣副教授完成；第 6、7、12 章由栗永安副教授完成；第 8 章由刘旭副教授完成；第 9～11 章由刘海忠副教授完成；全书由常迎香教授统稿，本书上册由俞建宁教授主审，下册由褚衍东教授主审.

由于作者水平有限，加上时间仓促，书中难免有不妥之处，疏漏也在所难免，希望专家、同行及读者批评指正.

编 者

2009 年 5 月

目　　录

第 8 章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何与平面解析几何类似，其基本思想是首先建立空间直角坐标系，用有序数组表示点的位置，用代数方程表示几何图形，这样便可用代数方法来研究几何问题.

本章首先建立空间直角坐标系，并引进在力学、物理及其他应用科学中用途很广泛的向量，然后以此为工具来讨论空间中的平面与直线，最后介绍了空间曲线与空间曲面的部分内容.

8.1　空间直角坐标系

为了把几何与代数沟通起来，需要建立空间的点与有序数组之间的联系. 这种联系是通过坐标来实现的，为此先引进空间直角坐标系.

8.1.1　空间直角坐标系

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且具有相同的长度单位，这三条轴分别叫做 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)，z 轴(竖轴)，统称坐标轴，它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系，点 O 叫做坐标原点. 通常把 x 轴，y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即如果用右手握住 z 轴，使右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转到 y 轴正向时，拇指恰指向 z 轴的正向.

任意两条坐标轴可以确定一个平面，如 x 轴和 y 轴确定 xOy 面，依此类推 y 轴和 z 轴确定 yOz 面，x 轴和 z 轴确定 xOz 面，这三个面统称为坐标面. 三个坐标面把空间分为 8 个部分，每一部分称为一个卦限. 以三个坐标轴正半轴为棱的那个卦限称为第Ⅰ卦限，在 xOy 平面的上部其他三个卦限依逆时针顺序依次称为第Ⅱ，第Ⅲ，第Ⅳ卦限，在 xOy 平面下方与第Ⅰ卦限相对的为第Ⅴ卦限，然后依逆时针方向依次得第Ⅵ，第Ⅶ，第Ⅷ卦限(图 8.1).

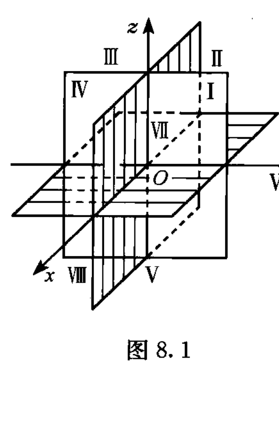

图 8.1

8.1.2　空间点的坐标

取定了空间直角坐标系后，就可以建立空间的点与有序数组之间的对应关系. 设 M 为空间任意一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴，这三个平面与 x 轴，y 轴和 z 轴的交点依次为 P，Q 和 R，它们在三条坐标轴上的坐标分别为 x，y 和 z，于是空间的点 M 就唯一确定了一个有序数组 x,y,z.

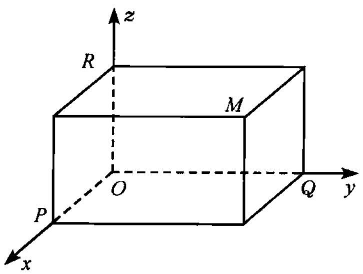

图 8.2

反过来，如果已知一个有序数组 x,y,z，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，通过 P、Q 和 R，分别作垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴的垂直平面，这三个平面有唯一的交点 M(图 8.2).

这样我们就建立了空间的点 M 和有序数组 x,y,z 之间的一一对应关系，有序数组 x,y,z 叫做点 M 的坐标，x,y,z 分别称为点 M 的横坐标，纵坐标和竖坐标，坐标为 x,y,z 的点 M 通常记作 $M(x,y,z)$.

易知，原点的坐标为 $(0,0,0)$；在 x 轴，y 轴，z 轴上的点的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；坐标平面 xOy，yOz，xOz 上的点的坐标分别为 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$.

8.1.3　两点间的距离

定理 1　若 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中两点，则 M_1 与 M_2 之间的距离

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}. \qquad (8.1.1)$$

证　过 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这 6 个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 8.3)，则

$$\begin{aligned}&|M_1M_2|^2\\=&|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2\\=&|P_1P_2|^2+|Q_1Q_2|^2+|R_1R_2|^2\\=&|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2+|z_1-z_2|^2,\end{aligned}$$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

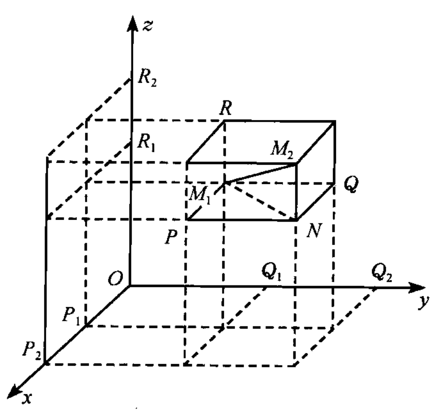

图 8.3

式(8.1.1)就是空间两点间距离公式.

特殊地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点

$O(0,0,0)$的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 求证以 $A(3,3,2)$,$B(6,1,1)$,$C(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证 因为

$$|AB| = \sqrt{(3-6)^2+(3-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{14},$$
$$|BC| = \sqrt{(6-5)^2+(1-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{6},$$
$$|AC| = \sqrt{(3-5)^2+(3-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{6},$$

所以$|BC|=|AC|$,即$\triangle ABC$为等腰三角形.

例 2 已知两点 $A(1,2,3)$与 $B(4,5,6)$,求与 A,B 两点距离相等的点的轨迹方程.

解 设所求轨迹上动点 P 的坐标为(x,y,z),由条件$|PA|=|PB|$知

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2},$$

两边平方,化简得

$$2x+2y+2z-21=0.$$

习 题 8.1

1. 空间直角坐标系的 8 个卦限中点的坐标的符号有什么特点?
2. 求下列各对点之间的距离:

(1) $(0,0,0)$与$(2,3,4)$;

(2) $(4,-2,3)$与$(-2,1,3)$.

3. 求点 $P(1,-2,3)$与原点及各坐标轴之间的距离.
4. 自点 $P(1,-2,3)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的点的坐标.
5. 试证以 $A(4,3,1)$,$B(7,1,2)$,$C(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.
6. 求点 $M(a,b,c)$关于各坐标面、坐标轴、坐标原点的对称点的坐标.
7. 求到 xOz 平面和 yOz 平面距离相等的点的轨迹方程.
8. 求到 z 轴与到 xOy 平面的距离之比为 2 的点的轨迹方程.

8.2 向量及其线性运算

8.2.1 向量的概念

我们经常遇到的量有两种,一种量叫做数量(或标量),如质量、体积、面积、时间、温度等,它们均是只有大小没有方向的量;另一种量,如力、速度、位移等,既有大小又有方向,叫做向量(或矢量).在数学上,可以用有向线段来表示向量,线段的

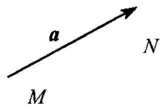

图 8.4

长度表示向量的大小，它的方向表示向量的方向. 以 M 为起点，N 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{MN}$（图 8.4）. 有时也用粗体字 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 或上面有箭头的字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 来表示向量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的模（或长度），记为 $|\boldsymbol{a}|$，模等于 1 的向量叫做单位向量，模等于零的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，规定零向量的方向是任意的.

在实际问题中，有些向量与其起点的位置有关，有些与其起点的位置无关. 与起点位置无关的向量称为自由向量（简称为向量）. 今后除非特别声明，我们仅讨论自由向量，在自由向量中，如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，且方向相同，就称这两个向量相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

由于我们所讨论的是自由向量，平行向量可平行移动而位于同一直线上，故平行的向量又称共线向量（或称它们共线）. 平行同一平面的向量也可以平行移动到同一平面上，因此，平行于同一平面的向量，称为共面向量（或称它们共面）.

8.2.2　向量的加减法

1. *加法*

定义 1　设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个向量，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，并以这两个向量为邻边作平行四边形 $OACB$，其对角线 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}. \tag{8.2.1}$$

这种利用平行四边形的对角线来规定两向量和的方法，称为平行四边形法则（图 8.5）.

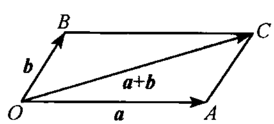

图 8.5

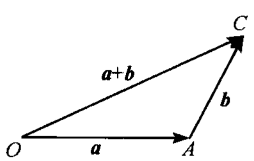

图 8.6

由于平行四边形对边平行且相等，所以从图 8.5 可以看出，我们也可以如此作出两个向量的和：如图 8.6 所示，取定一点 O，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 为起点作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接 OC 就得

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}.$$

这一方法叫做向量加法的三角形法则.

容易验证向量的加法遵循以下运算规则：

(1) 交换律　$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

2. 减法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负向量之和称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差(图 8.7),记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

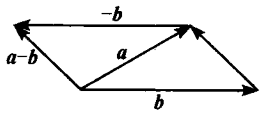

图 8.7

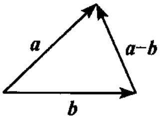

图 8.8

根据向量加法的三角形法则易知,若将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,则以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量就是向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 8.8).

由三角形两边之和大于第三边的原理知

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

8.2.3 向量与数的乘法

定义 2 向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积称为向量的数乘,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向是:当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

特殊地,当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,其方向是任意的.

向量与数的乘积满足下列运算规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,

其中 λ,μ 为数量.

向量的加法、减法及向量的数乘统称为向量的线性运算.

由定义 2 可得出以下两个结论.

(1) 向量的单位向量.

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则模为 1 且方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,常记作 $\boldsymbol{a}_0$. 显然有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0,\quad \boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

(2) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，其中 λ 为数量，它由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 唯一确定.

8.2.4　向量在轴上的投影

1. 向量间的夹角

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 8.9)，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

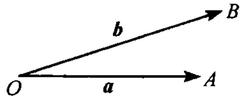

图 8.9

类似地，可以规定向量与轴的夹角或轴与轴的夹角.

2. 空间点与向量在数轴上的投影

(1) 设 A 为空间中的一点，过点 A 作一垂直于数轴 l 的平面 α，则 α 与数轴 l 的交点 A' 称为点 A 在数轴 l 上的投影(图 8.10).

(2) 若已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 l 上的投影分别为点 A' 和 B'(图 8.11)，则轴 l 上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 值 $A'B'$，叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投影，记作

$$\mathrm{Prj}_l\,\overrightarrow{AB} = A'B'.$$

注：轴上有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的值，是指这样一个数，它的绝对值等于 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，它的符号由 $\overrightarrow{AB}$ 的方向决定：如果 $\overrightarrow{AB}$ 的方向和轴的正向相同，就取正号；如果 $\overrightarrow{AB}$ 的方向和轴的正向相反，就取负号. $\overrightarrow{AB}$ 的值我们用 AB 表示.

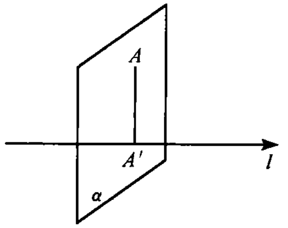

图 8.10

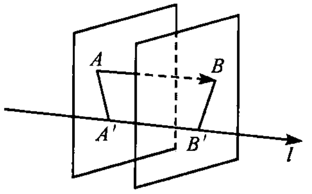

图 8.11

关于向量在轴上的投影有以下两个结论：

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投影等于向量的模乘以轴与向量夹角 φ 的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_l\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi;$$

(2) 有限个向量的和在轴上的投影等于各个向量在该轴上的投影之和，即

$$\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n) = \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_n.$$

8.2.5　向量的坐标表示

前面我们定义了向量及其线性运算，为了把代数运算引入到几何中来，需要建

立向量与有序数组之间的对应,也就是要引进向量的坐标的概念.

在空间建立直角坐标系,分别沿 x 轴,y 轴,z 轴正方向取三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,称为该坐标系的基本向量.设空间任一向量,将其平移,使其起点在坐标原点 O,终点在点 $P(x,y,z)$,并设点 P 在 x,y,z 轴上的投影分别为 A,B,C,在 xOy 平面上的投影为点 M(图 8.12),根据向量的加法,得

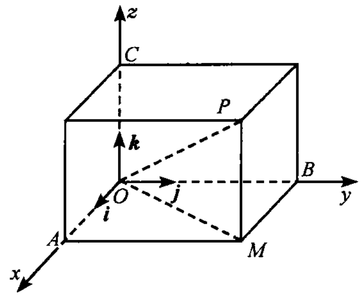

图 8.12

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

由两个向量共线知

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k},$$

于是得到

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{8.2.2}$$

式(8.2.2)右端称为向量$\overrightarrow{OP}$的坐标分解式或坐标表示式,它也可写成

$$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

其中 x,y,z 称为向量$\overrightarrow{OP}$的分量,向量$\overrightarrow{OP}$称为点 P 的向径.

例 1 设有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标.

解 由式(8.2.2)知

$$\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1),\quad \overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2),$$

从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),\end{aligned}$$

即起点不在原点的向量的坐标等于终点坐标减去起点坐标.

若令 $x_2-x_1=a_x,y_2-y_1=a_y,z_2-z_1=a_z$,则$\overrightarrow{M_1M_2}=(a_x,a_y,a_z)$.

在引进了向量的坐标后,向量的线性运算均可用向量的坐标来进行.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,$\lambda$ 为数量,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},\\\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 2 求证向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$与向量 $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)\neq\boldsymbol{0}$ 平行的充要条件是

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \tag{8.2.3}$$

证 设$\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}=\lambda$,则

$$a_x=\lambda b_x,\quad a_y=\lambda b_y,\quad a_z=\lambda b_z,$$