

高等學校教學用書

學何幾析解

第一卷 第一分冊

Б. Н. ДЕЛОНЕ, Д. А. РАЙКОВ 著
裘光明 吳祖基 吳光磊 林建祥合譯

高等教育出版社

高等學校教學用書



學 何 幾 析 解

第一卷 第一分冊

Б. Н. 狄隆涅, Д. А. 拉伊可夫著
裘光明 吳祖基 吳光磊 林建祥合譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的狄隆涅（В. Н. Делоне）和拉伊可夫（Д. А. Райков）合著“解析幾何學”第一卷（Аналитическая Геометрия I）1948年版譯出。在蘇聯高等教育部1952年批准的大學數學力學系數學和力學專業一年級解析幾何學大綱裏，本書是主要參考書之一。

本書（第一卷）中譯本分第一、二分冊出版。第一分冊是全書的緒論，內容包括向量，笛卡兒坐標，仿射映射和交映射等。第二分冊講平面上的解析幾何，內容包括平面上的直線，橢圓、雙曲線、拋物線，二階曲線的一般理論。

本書（第一卷）由北京大學袁光明、吳祖基、吳光磊、林建祥等四人合譯。

本書原由商務印書館出版，自1953年10月起改由本社出版。

解 析 幾 何 學

第一卷 第一分冊

В. Н. 狄隆涅, Д. А. 拉伊可夫著

袁光明 吳祖基 吳光磊 林建祥合譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7號

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054號）

上海奎託印刷廠印刷 新華書店發行

統一書號 13010·327 開本 850×1168 1/32 印張 56/16

字數 153,000 印數 1—1,000 定價（8） 0.65

1953年11月商務初版（共印14,700）

1958年10月新1版 1958年10月上海第1次印刷

序 言

這本解析幾何學教科書所依據的是本書作者之一 B. H. 狄隆涅在國立莫斯科大學數學力學系多次講授過的教程的見解，而且與莫斯科大學所採用的新的解析幾何學教學大綱相適應。

解析幾何學教程的構成可以有三種不同的原則。可以完全不運用變換的理論來編作教程。也可以在預備知識性質的前幾章以後，立刻引向射影幾何，而仿射幾何和量度幾何則作為射影幾何依次的特殊形式來研究。最後，也可以先作仿射幾何和量度幾何完全的敘述，直到最後才提出射影幾何。最後這一種構成有兩點有利之處：一是容易被接受，二是可以廣泛地發揮具有獨立特性的仿射幾何的觀點，而不僅把它當作射影幾何的特殊形式來處理。這一點特別重要，因為解析幾何與數學的那些主要部分例如分析（特別是泛函數分析）和代數的所有關係，主要是通過仿射和度量理論，而不是通過射影理論來實現的。在這本教程裏就採用這第三種構成原則。

本書的這一卷（第一卷）分成兩部分。第一部分有緒論的性質，它包含着平面和空間的情形裏所用到的關於坐標、向量和線性（仿射和正交）變換的一般的知識。第二部分講授平面上的度量的和仿射的解析幾何。第二卷（即將付印）將包含：第三部分，這是講授空間中的度量的和仿射的解析幾何，和第四部分，在那兒將敘述射影平面上和射影空間中的解析幾何。

大學的教科書不應該限制在必要的最小份量和過分束縛教員的能动性。所以除掉用大號字排印的包含教學大綱裏所採用的全部材料以外，還給了充分多的用小號字排印的材料。這些材料的一部分是關於基本問題的（例如，關於對偶的坐標系統、也就是關於反變和共變坐標的一節，關於非直角坐標情形的不變量的一節，等等）。別的部分講授

各種的補充知識,有時甚至是非常專門的(例如,平面面積計的理論,雙曲函數的理論,等等)。除此以外,在用大號字排印但是加上星號的各節裏,發揮了正交和仿射變換的純幾何的理論,並講述它在得出橢圓、雙曲線和拋物線的仿射和度量性質上的應用。同時,這本解析幾何學教程有充分長的篇幅充滿的不是解析幾何的而是綜合幾何的見解。然而,學過了這些東西的讀者,對正交和仿射變換的幾何本質以及二階曲線的仿射性質就會有更深入的認識。當然,敘述是這樣進行的,用大號字排印的材料完全不依賴用小號字排印的,而沒有星號的各節則完全不依賴有星號的各節。

解析幾何學教程材料進行的順序可以有各種的變化。我們所採用的各章排列的順序是有系統的,但是並不與國定教學大綱所採用的順序完全相符。例如,講述線性變換的第二章,它的幾何部分最早也得到第四章加星號的各節裏才是必要的,而它的解析部分甚至直到第五章裏才需要。所以第三章可以(和被建議)直接在第一章後面就讀。爲了讀者閱讀的方便,在好多地方都指出了所敘述的材料在那兒用到。

狄隆涅(В. Н. Делоне)

拉伊可夫(Л. А. Райков)

1947年6月27日於莫斯科

第一分冊目次*

序言

第一部分 笛卡兒坐標、向量、線性變換 1

第一章 平面上和空間中的笛卡兒坐標和向量。二階和三階矩陣的幾何 1

第一篇 笛卡兒坐標和向量：仿射關係 1

§ 1 坐標軸、平面上和空間中的笛卡兒坐標 1

1. 坐標軸 (1) 2. 平面上的笛卡兒坐標 (2) 3. 平面上的右和左坐標系統 (3) 4. 空間中的笛卡兒坐標 (4) 5. 空間中的右和左坐標系統 (6) 6. 一般的笛卡兒坐標、斜角坐標和直角坐標 (6)

§ 2 向量，它們的加法、減法和乘上數量的乘法 7

1. 向量，作為有順序的點偶或者有方向的線段 (7) 2. 向量的相等 (7) 3. 自由向量 (8) 4. 共線和共面向量 (9) 5. 向量乘上數量的乘法 (9) 6. 向量的加法和減法 (10) 7. 向量的線性組合 (11)

§ 3 笛卡兒坐標的向量引進法 11

1. 直線上向量的坐標和笛卡兒坐標的向量引進法 (12) 2. 平面上向量的坐標和笛卡兒坐標的向量引進法 (12) 3. 空間中向量的坐標和笛卡兒坐標的向量引進法 (14) 4. 一般的笛卡兒坐標，斜角坐標和直角坐標。基本的坐標平行四邊形和基本的坐標平行六面體 (15)

§ 4 直線上的向量 16

1. 直線上向量乘上數量的乘積的坐標 (16) 2. 直線上向量的和以及差的坐標 (16) 3. 直線上向量的任意線性組合的坐標 (17) 4. 直線上向量的代數系統和實數的代數系統的同構 (18)

§ 5 平面上和空間中的射影，向量的線性組合的射影 18

1. 到直線上的正射影 (18) 2. 到直線上平行於任意直線或者平面的射影 (18) 3. 到平面上的射影 (19) 4. 關於向量射影的引理 (19) 5. 向量的任意線性組合的射影 (20)

§ 6 向量的線性組合的坐標，向量加法和向量乘上數量的乘法的基本法則 21

1. 向量在坐標軸上射影的數值 (21) 2. 向量的線性組合的坐標 (21) 3. 平面上或者空間中向量的代數系統和有順序的實數偶或者實三數組的代數系統的同構 (22) 4. 向量加法和向量乘上數量的乘法的基本法則 (22) 5.

*加兩個星號的各節各段是用小號字排印的，至於加一個星號的各節，請看序言。

附言(23)	6. 兩個向量共線和三個點共線的檢驗法(23)	
§ 7	變成新的笛卡兒坐標的變換	24
1.	任意笛卡兒坐標的變換公式(25)	
2.	平面上直角坐標的變換公式(26)	
第二篇	笛卡兒坐標和向量: 度量關係	27
§ 8	向量在軸線上的正射影	28
1.	兩個方向中間的角(28)	
2.	向量在軸線上的正射影的數值(28)	
§ 9	數量乘積	29
1.	數量乘積的定義和基本的幾何性質(29)	
2.	數量乘積和向量在軸線上的正射影(30)	
3.	數量乘積的基本的代數性質(31)	
§ 10	標架的度量規定法	32
1.	參數(32)	
2.	在結晶學裏所採用的標架的度量參數(32)	
3.	標架的基本的度量參數(33)	
4.	標架的度量矩陣(34)	
**5.	標架參數的必要和充分的條件(35)	
§ 11	基本的度量公式	36
1.	平面上標架的雙線性度量形式(36)	
2.	空間中標架的雙線性度量形式(37)	
3.	標架的二次度量形式(38)	
4.	向量長度和兩個向量中間的角利用標架的二次形式和雙線性形式表示的式子(39)	
5.	在直角坐標裏關於數量乘積、向量長度和兩個向量中間的角的公式(40)	
6.	方向餘弦(41)	
**§ 12	對偶標架、反變和共變坐標	41
1.	平面上和空間中的對偶標架(42)	
2.	給了兩個向量對於對偶的兩個標架的坐標,求它們的數量乘積的公式(43)	
3.	反變和共變坐標(44)	
第三篇	關於坐標的基本問題	45
§ 13	兩個點中間的距離	45
1.	坐標軸上兩個點中間的距離(45)	
2.	在直角坐標裏,平面或者空間的兩個點中間的距離(45)	
3.	在一般的笛卡兒坐標裏,平面或者空間的兩個點中間的距離(46)	
§ 14	分線段成已知比值	47
1.	分線段成內分和外分比值(47)	
2.	分線段成已知比值的點,關於它的坐標的公式(48)	
3.	線段中點的坐標(50)	
4.	附言(50)	
**§ 15	重心	51
1.	平行力組的合力所作用的點(51)	
2.	質點組的重心(52)	
§ 16	三角形和多角形的面積	53
1.	在直角坐標裏三角形的面積(53)	
2.	平面上有向多角形的概念(55)	
3.	關於面積遮蓋的引理(55)	
4.	在直角坐標裏多角形的面積(58)	
5.	在一般的笛卡兒坐標裏多角形的面積(59)	
**§ 17	平面面積計	60
第四篇	二階和三階矩陣的幾何	61
§ 18	二階和三階行列式的幾何意義	61

1. 平面上作在有序向量偶上的平行四邊形的面積和空間中作在有序向量三 位上的平行六面體的體積(61)	2. 記號 (a, b) 和 (a, b, c) 的主要性質(62)
3. 二階行列式, 作為平面上作在有序向量偶上的平行四邊形面積的比值(64)	
4. 三階行列式, 作為作在有序向量組上的平行六面體體積的比值(65)	
**5. 在直角坐標裏三角形的面積和四面體的體積(68)	**6. 三個點在一 條直線上和四個點在一個平面上的必要和充分的條件(68)
§ 19 行列式運算的法則	69
1. 矩陣, 按行和列作為向量組(69)	2. 行列式的基本性質(69)
3. 行列 式元素的代數補餘式, 按一排的元素展開行列式(71)	
**§ 20 張在向量上的空間, 向量的線性相關, 矩陣的秩數	72
1. 張在向量上的空間(72)	2. 向量的線性相關(73)
3. 空間的維數和線 性無關向量的個數(73)	4. 張在向量上的空間的維數和向量矩陣的秩數(74)
§ 21 線性方程組	76
1. 有三個未知數的一組三個一次方程, 作為沿着三個向量去分解向量的問題 (76)	2. 克拉磨公式(78)
**3. 有三個未知數的一組三個齊次一次方程, 作為求與三個已知向量正交的向量的問題(80)	4. 有三個未知數的一組兩 個齊次一次方程(80)
§ 22 向量乘積	81
1. 空間中的有向平面段·二重向量(81)	2. 自由二重向量(82)
3. 向量 乘積(83)	4. 三個向量的混合乘積(83)
5. 向量乘積的直角坐標(85)	6. 向 量乘積的基本性質(86)
**7 空間中三角形的面積(87)	**8. 關於對偶 標架的向量的公式(88)
第二章 正交映射和仿射映射	89
§ 23 引言	89
1. 變換在幾何學中的意義(89)	2. 映射(90)
3. 變換的乘法(91)	4. 變 換的乘積對於因子次序的依賴性(91)
5. 羣的概念(92)	6. 關於變換 羣(93)
*第一篇 正交映射的幾何理論	93
*§ 24 正交映射的定義和最簡單的性質	93
1. 運動(93)	2. 反射(94)
3. 正交映射(94)	4. 關於正交映射的基本 引理(95)
*§ 25 關於正交映射的第一基本定理	93
**§ 26 關於正交變換的第二基本定理	99
1. 第一種和第二種正交變換(99)	2. 關於正交變換的第二基本定理(101)
3. 正交變換幾何的若干進一步的結果(102)	
*第二篇 仿射映射的幾何理論	103
*§ 27 仿射映射的定義和最簡單的性質	103
1. 仿射映射(103)	2. 壓縮(104)
3. 關於仿射映射的引理(106)	

*§ 28 a 簡單比值作為仿射映射的不變量(第一種講法).....	107
1. 關於線段中點的引理(107) 2. 達布引理(108) 3. 簡單比值的不變性(110)	
**§ 28 b 簡單比值作為仿射映射的不變量(第二種講法)	111
1. 函數方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (111) 2. 實數域的一個代數性質(113)	
3. 簡單比值的不變性(115)	
*§ 29 關於仿射映射的第一基本定理.....	117
*§ 30 關於仿射映射的第二基本定理.....	119
1. 關於仿射映射的第二基本定理(119) 2. 在平面仿射映射下面積的改變和在空間仿射變換下體積的改變(122) **3. 在仿射映射下長度的改變(122)	
*§ 31 若干特殊的仿射映射.....	123
1. 同位相似(123) 2. 相似(124) 3. 錯切(125)	
第三篇 線性變換	126
§ 32 仿射映射.....	126
1. 仿射映射的定義(126) 2. 仿射映射的基本性質(128) 3. 變積係數,第一種和第二種的仿射變換(129) **4. 在仿射映射下,任意平面圖形的面積和任意空間體的體積的改變(131) 5. 仿射變換乘積的變積係數(132)	
6. 正交映射(132) 7. 仿射變換羣和它的若干子羣(133)	
§ 33 仿射變換,作為行列式不等於零的線性變換	135
1. 仿射變換的公式(135) 2. 仿射變換作為行列式不等於零的線性變換(136) 3. 退化的線性變換(138) 4. 非退化的線性變換的兩重解釋(139)	
§ 34 齊次線性變換,行列式不等於零的正方矩陣的羣	140
1. 齊次線性變換(140) 2. 行列式不等於零的正方矩陣的幾何意義(141)	
3. 齊次線性變換的乘法和正方矩陣的乘法(141) 4. 行列式不等於零的正方矩陣的羣(143) 5. 矩陣乘積的行列式(144) 6. 矩陣的轉置和它與矩陣相乘的關係(145) **7. 對於原標架逐次的像而言,仿射變換乘積的矩陣(146) **8. 在變到新的坐標標架時,仿射變換矩陣的改變(147) **9. 帶三個未知數的三個線性方程的組,作為求在有已知矩陣的仿射變換下變成已知向量的向量的問題(149)	
§ 35 正交矩陣.....	149
1. 正交矩陣的定義(149) 2. 正交關係(150) **3. 正交矩陣,作為保留變數的平方和不變的齊次線性變換的矩陣(152)	
**§ 36 歐拉角.....	154
索引.....	157

第一部分 笛卡兒坐標、向量、線性變換

第一章 平面上和空間中的笛卡兒坐標和 向量。二階和三階矩陣的幾何

第一篇 笛卡兒坐標和向量：仿射關係

§ 1 坐標軸、平面上和空間中的笛卡兒坐標

1. 坐標軸 實數可以幾何地用直線上的點來表示。這需要在(通常畫成水平的)直線上取定兩個點：一個表示數目 0，另一個(通常在第一個的右側)表示數目 1。線段 01 採用作為直線上長度測量的尺度單位。尺度單位的選擇是任意的。但是在作了這個選擇以後，每個實數就由直線上的這樣一個點來表示，這個點和點 0 共同決定的線段用所取的尺度量得的長度等於這個數目的絕對值，而且當數目是正的時候它對於點 0 說落在點 1 所在的一側(右側)，當數目是負的時候它落在相反的一側(左側)。從點 0 到點 1 的方向叫做正方向，相反的方向叫做負方向(正方向通常用箭頭表出)。

取定了兩種可能方向之一作為正方向的直線，叫做有向直線或者軸線。這樣一來，為了表示實數用到軸線，在它上面取定點 0 (“計算起點”或者坐標原點)和尺度單位；這樣的軸線叫做坐標軸(或者數目直線)。從點 0 引向正方向的半直線叫做正半軸；從點 0 引向負方向的半直線叫做負半軸。連結坐標原點與坐標軸的點的線段，叫做這個點的坐標線段。

坐標軸的每個點在所說的意義下都表示一個實數。這個數目叫做

點的坐標。這樣一來，點的坐標就等於它的坐標線段的（在所取的尺度裏量得的）長度，當點在正半軸上時取正號，當點在負半軸上時取負號。坐標原點的坐標是零。坐標軸上每個點的位置在它的坐標給定後就完全決定。

這樣一來，在直線上所有點的集合和所有實數的集合中間建立了一一對應：與每個實數對應的是直線上一個而且只一個表示它的點，而且與直線上每個點對應的是一個而且只一個實數——它的坐標。幾何上用直線的點表示數目的方法同時也就造成用數目來確定直線上點的位置的方法。

2. 平面上的笛卡兒坐標 要用數目來確定平面的點的位置，人們在平面上取相交成任意角度（自然不等於 0° 和 180° ）的兩條坐標軸。在這兩條軸線上可以取不同的尺度單位。除此以外，要在平面上測量長度，則需要選取公共的“絕對尺度單位”，特別說來，兩條軸線上的尺度

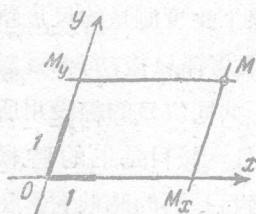


圖 1

單位也是用它來量的。在這兩條軸線上都取它們的交點 O 作為計算起點（坐標原點）。坐標軸一條叫做橫軸（ x 軸），另一條叫做縱軸（ y 軸）。設 M 是平面上的點。通過 M 引平行於坐標軸的直線（圖 1）。平行於縱軸的直線與橫軸相交在一個點 M_x ；平行於橫軸的直線與縱軸相交在一個點 M_y 。設 x 是點 M_x 在橫軸上的坐標， y 是點 M_y 在縱軸上的坐標，並且線段 OM_x 和 OM_y 分別用在對應的軸線上所採用的尺度單位來量。明顯地，點 M 在平面上的位置由點 M_x 和 M_y 在坐標軸上的位置，也就是數目 x 和 y ，完全決定。這兩個數目叫做點 M 的笛卡兒坐標，這時 x 叫做橫坐標， y 叫做縱坐標。以坐標軸和通過點 M 與它們平行的直線為界的平行四邊形 OM_xMM_y ，叫做點 M 的坐標平行四邊形；它的邊（特別是線段 OM_x ， OM_y ）叫做點 M 的坐標線段。

要說明點 M 有坐標 x 和 y ，就寫成： $M(x, y)$ ；這時橫坐標佔第一

個位置，縱坐標佔第二個位置。例如，寫法 $M\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ 就表示點 M 的橫坐標等於 2，縱坐標等於 $-\frac{1}{3}$ (圖 2)。有橫坐標 x 和縱坐標 y 的點也寫成記號 (x, y) 。要作出點 (x, y) ，應該在橫軸上取坐標 x 的點，而且通過它引平行於縱軸的直線，然後在縱軸上取坐標 y 的點，而且通過它引平行於橫軸的直線；這兩條直線的交點就是點 (x, y) 。這樣一來，與平面的每個點對應的是完全確定的有序實數偶 ① (標明其中一個是第一個，那一個是第二個)；反之，與每個有序實數偶對應的是平面上完全確定的點。換句話說，在平面的所有點的集合和所有有序實數偶的集合中間建立了一一對應。

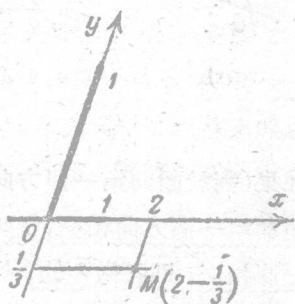


圖 2

坐標原點有坐標 $0, 0$ 。落在橫軸上的所有點的縱坐標等於零，落在縱軸上的所有點的橫坐標等於零；前一些點有形狀 $(x, 0)$ ，後一些點

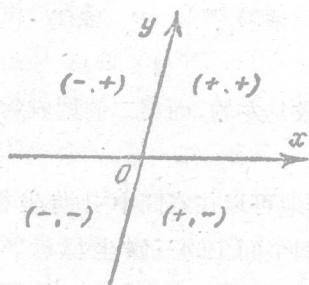


圖 3

有形狀 $(0, y)$ 。夾在正的 x 半軸和正的 y 半軸中間的角叫做第一坐標角 ②；夾在正的 y 半軸和負的 x 半軸中間的角叫做第二坐標角；夾在負的 x 半軸和負的 y 半軸中間的角叫做第三坐標角；夾在負的 y 半軸和正的 x 半軸中間的角叫做第四坐標角。在各個坐標角裏點坐標的正負號在圖 3 上有所說明。

3. 平面上的右和左坐標系統 在圖 4 上畫着平面上坐標軸相互

①“偶”是一對的意思。物理上“力偶”是指一對力，這裏實數偶是指一對實數。——譯者。

②或者叫做象限。——譯者。

位置的兩種類型。如果我們是站在原點而且面向正的 x 半軸那一側的

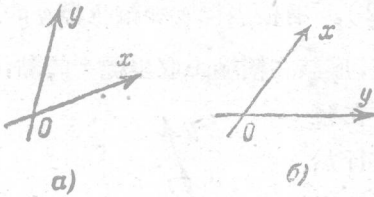


圖 4

觀察者，則在情形 a) 裏 y 軸從右引向左，而在情形 b) 裏 y 軸則從左引向右。在第一種情形裏坐標系統叫做右坐標系統，第二種情形裏叫做左坐標系統。一般說來，平面上有順序的相交方向偶，

如果(對於面向第一個方向那一側的觀察者說來)第二個方向從右到左地與第一個方向相交，就叫做右的，而如果第二個方向從左到右地與第一個相交，則叫做左的。要想旋轉最小的角，使第一個方向與第二個重合，應該在右方向偶的情形裏作反時針方向的旋轉，而在左方向偶的情形則作順時針方向的旋轉(圖 5)。我們要注意，在圖 4 上比較軸線方向時，我們是處在平面上圖形所在的那一面。而如果我们翻過書頁在光線下察看圖 4，坐標系統的定向就變成相反的了：第一個成為左的，而第二個則成為右的。

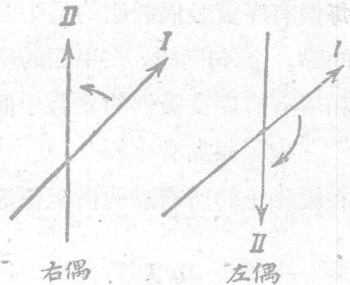


圖 5

4. 空間中的笛卡兒坐標 完全同樣地可以在空間中引進坐標。那就是說，取相交在一個點而且不落在一個平面上的三條坐標軸。軸線上的尺度單位一般地可以取不同的。除此以外，要在空間中測量所有的長度，則需要選取公共的“絕對尺度單位”，特別說來，三條軸線上的尺度單位也是用它來量的。在所有三條軸線上都取它們的交點 O 作為計算起點(坐標原點)。坐標軸一條叫做橫軸(x 軸)，另一條叫做縱軸(y 軸)，第三條叫做立軸(z 軸)。通過 x 軸和 y 軸的平面叫做坐標平面 xy ，通過 y 軸和 z 軸的平面叫做坐標平面 yz ，通過 x 軸和 z 軸的平面

叫做坐標平面 xz 。要在空間中用數目來確定點 M 的位置，需要通過這個點引平行於坐標平面的平面。平行於坐標平面 yz 的平面，與橫軸相交在一個點 M_x ；平行於坐標平面 xz 的平面，與縱軸相交在一個點 M_y ；平行於坐標平面 xy 的平面，與立軸相交在一個點 M_z (圖 6)。設 x, y, z 是點 M_x, M_y, M_z 在對應的軸線上的坐標。點 M 的位置在給定數目 x, y, z 後就完全決定。這些數目叫做點 M 的笛卡兒坐標，這時 x 叫做橫坐標， y 叫做縱坐標， z 叫做立坐標。由坐標平面和通過點 M 與它們平行的平面相交截而成的平行六面體 $OM_xM_yM_zABCM$ 叫做點 M 的坐標平行六面體；它的稜（特別是線段 OM_x, OM_y, OM_z ）叫做點 M 的坐標線段。

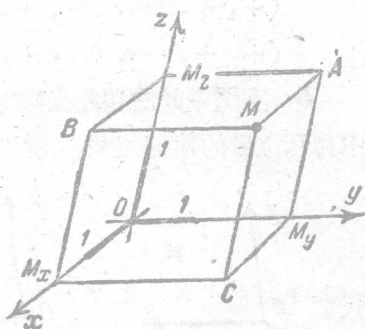


圖 6

爲了說明點 M 有坐標 x, y 和 z ，寫成： $M(x, y, z)$ ；這時橫坐標佔第一個位置，縱坐標佔第二個位置，立坐標佔第三個位置。有橫坐標 x 、縱坐標 y 和立坐標 z 的點，也可以寫成記號 (x, y, z) 。這樣一來，與空間的每個點對應的是完全確定的有序實三數組；反之，與每個有序實數三位對應的是空間中完全確定的點。換句話說，在空間的所有點的集合和所有有序實數三位的集合中間建立了一一對應。

坐標原點 O 有坐標 $0, 0, 0$ 。橫軸上的點有形狀 $(x, 0, 0)$ ，縱軸上的點有形狀 $(0, y, 0)$ ，立軸上的點有形狀 $(0, 0, z)$ 。坐標平面 xy 的點有形狀 $(x, y, 0)$ ；坐標平面 yz 的點有形狀 $(0, y, z)$ ，坐標平面 xz 的點有形狀 $(x, 0, z)$ 。坐標平面把整個空間分成八個三面角^①，由落在這

① 或者叫做卦限。——譯者。

些三面角內部的點的坐標的正負號來區分是：

$(+, +, +), (-, +, +), (-, -, +), (+, -, +),$
 $(+, +, -), (-, +, -), (-, -, -), (+, -, -)。$

5. 空間中的右和左坐標系統 在圖 7 和 8 上畫着坐標軸在空間中相互位置的兩種類型。讓我們作為觀察者站在平面 xy 上向着 z 軸

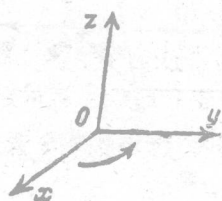


圖 7

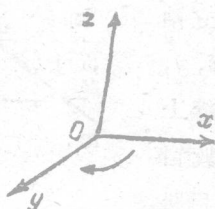


圖 8

的正方向的那一側面，而且面向 x 軸正方向的那一側。那末在圖 7 上所畫的情形裏，軸線 y 從右引向左，這時在平面 xy 上的坐標系統就是我們所謂右的，而在圖 8

上所畫的情形裏軸線 y 從左引向右，這時在平面 xy 上的坐標系統就是我們所謂左的。在第一種情形裏坐標系統 xyz 叫做右的，在第二種情形裏則叫做左的。

在平面的情形通常使用右坐標系統；這時 x 軸水平地畫而且它的正方向算是從左到右的方向；於是 y 軸上的正方向就是從下到上的方向。在空間的情形兩種坐標系統都使用；我們主要是使用右坐標系統。

6. 一般的笛卡兒坐標、斜角坐標和直角坐標 上面所說的平面上和空間中的坐標都叫做一般的笛卡兒坐標。如果軸線上的尺度單位都與所取的絕對尺度單位相合，而軸線中間的角不全是直角，則我們就得到所謂斜角坐標，它們在有些舊的解析幾何教程裏用得很多；我們完全不用到它們。如果除此以外，所取的軸線互相垂直，則就得到在實用上最常使用的直角坐標。

這樣一來，所謂直角坐標就是指滿足兩個條件的笛卡兒坐標：(1) 坐標軸互相垂直，(2) 軸線上的尺度單位都合於絕對的尺度單位。在這些坐標的名義上使用直角字樣，只反映出兩個條件的第一個。

§2 向量，它們的加法、減法和乘上數量的乘法

一般的笛卡兒坐標，尤其是直角坐標，從向量的觀點來討論，在許多方面更為方便些。

1. 向量，作為有順序的點偶或者有方向的線段 向量^①可以在整個空間中，也可以在平面上或者直線上討論。

所謂向量（在空間中，在平面上，在直線上）是指有順序的點偶。第一個點叫做向量的起點，第二個點叫做終點。在起點和終點中間的距離叫做向量的長度或者絕對值。起點和終點相合的向量叫做零向量；它的長度等於零。

要確定非零的向量，只需要給定它的長度、方向和起點：從已知起點沿已知方向放上已知長度的線段以後，我們就連結了向量的起點和終點。這樣一來，非零向量也可以定義成方向線段。零向量自然沒有任何方向。

非零向量用在終點處帶有箭頭的線段來表示（圖9）。有起點 A 和終點 B 的向量我們記做 $\overrightarrow{AB}$ 。

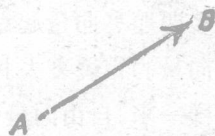


圖 9

2. 向量的相等 兩個非零向量，如果線段平行而且箭頭向着同一側，就叫做正平行的（或者同方向的）。如果線段平行，但是箭頭向着不同的兩側，則向量就叫做反平行的（或者反方向的）。零向量按定義算是與任意向量（正或者反）平行的。明顯地，正（反）平行於一個非零向量的兩個向量，互相正（反）平行。在直線上每兩個向量不是正平行，就是反平行；在平面上和在空間中這自然並不成立。

兩個向量如果正平行而且長度相等，就叫做相等的。按定義本身的意義，兩個向量如果都等於第三個，就彼此相等。明顯地，所有的零向量都相等。

① 向量，或者叫做矢量。——譯者。

非零向量的相等還可以用下面的幾何作圖來定義。設向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 不在一條直線上 (圖 10); 用直線 (AC 和 BD) 連結它們的起點和它們的終點。向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 相等, 在而且只在四邊形 $ACDB$ 是平行四邊形時。而如果把向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 落在一條直線上, 則只在它們都等於不在這條直線上的第三個向量 $\overrightarrow{EF}$ 時, 它們才彼此相等 (圖 11)。

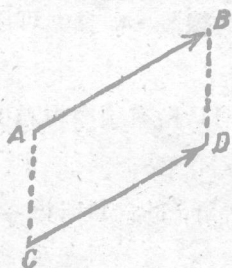


圖 10

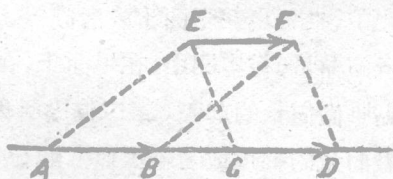


圖 11

3. 自由向量 相等的向量彼此的區別只是起點的位置。然而在許多問題裏向量起點的位置無關緊要, 必要的只是向量的長度和方向。在向量的定義裏去掉它的起點的位置, 我們就引出自由向量的概念。這樣一來, 自由向量 (在空間中、平面上、直線上) 在給定它的長度和 (如果它是非零向量) 方向後就完全決定。位置並不重合的相等向量被認為是同一個自由向量的不同的具體表示。

在算術裏彼此相等的所有分數被認為是同一個有理數的不同的表示。這時在算術裏是如此慣常地把分數與它所表示的數目統一起來, 以致有理數本身也就叫做分數。與這個相像, 在向量計算裏自由向量簡單就叫做向量。在以後我們也幾乎總是只使用向量這個術語; 這時讀者應該注意的是, 在並不特別說明起點的位置的各處, 所說的就是自由向量。在說到起點, 也就是選取已知 (自由) 向量的一個確定的表示時, 我們將會說, 把這個向量放在已知點上 或者說 使它的起點與這個點重合, 等等。

直覺地, 自由向量可以看作平行移動的運算。

所謂平行移動是指整個空間 (整個平面, 整個直線) 到自身的這樣的運動, 它使得所有的