●普通高等学校“十一五”规划教材●

Mechanics of Materials

材料力学

下册

经来旺　刘丹丹　主编

中国科学技术大学出版社

普通高等学校“十一五”规划教材

Mechanics of Materials

材料力学

下册

主　编　经来旺　刘丹丹

副主编　陈树峰　江向阳　姜忠宇

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书介绍了材料力学中的基本知识，内容详实丰富，叙述深入浅出，理论联系实际，适合土木工程、机械制造、工程地质、材料、采矿工程、资源与环境、航空航天等专业本、专科学生作为教材使用，对现场工程技术人员也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学. 下册/经来旺，刘丹丹主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 8
ISBN 978-7-312-02560-0

Ⅰ. 材… Ⅱ. ①经… ②刘… Ⅲ. 材料力学—高等学校—教材 Ⅳ. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 109302 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026
网址：http://press.ustc.edu.cn
印刷 安徽辉隆农资集团瑞隆印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 12.5
字数 248 千
版次 2009 年 8 月第 1 版
印次 2009 年 8 月第 1 次印刷
定价 23.00 元

前　言

随着高等学校教学改革的不断深入，学时数大幅减少，教学内容的更新和教材的更替已势在必行。目前工科类专业材料力学课程的学时数已从上世纪80年代的120～140学时降至70学时，但大多数学校所用教材依然未变，显然不符合时代的要求。高等学校的教学内容应该随着科学技术的发展不断更新，作为教学内容载体的教材也理应不断地完善和发展。

本教材一方面在满足国家教学大纲的基础之上，对教学内容进行了更新和完善；另一方面，基于理论联系实际的考虑，大部分章节增加了工程实例一节，使得学生可以更为清楚地了解本门课程各部分理论在工程实践中的作用。各章后面配备的习题也大多来自于工程实践，这对学生较早地熟悉工程实践具有极大的促进作用。

本教材为安徽省高等学校“十一五”省级规划教材，读者对象主要包含土木工程、机械制造、工程地质、材料、采矿工程、资源与环境、航空航天等专业的本、专科学生，对现场工程技术人员也具有一定的参考价值。

本书由经来旺、刘丹丹主编，副主编为陈树峰、江向阳、姜忠宇。江向阳编写了第8、9、10章，冯彧雷编写了第11、12、14章，姜忠宇编写了第13章，刘丹丹编写了附录Ⅰ和附录Ⅱ。教材第8、9、10章由陈树峰负责初审，教材第11、12、13章由江向阳初审，教材第14章、附录Ⅰ、附录Ⅱ由姜忠宇负责初审。全书由刘丹丹二审，经来旺主审。教材内容的设计、规划、统稿由经来旺主持完成。

本书的编写得到了安徽省教育厅、安徽理工大学、淮南联合大学的大力支持，在此一并致谢！

本书受到了安徽省教育厅和安徽理工大学的资助，在此深表感谢！

受编者水平所限，加之成稿仓促，书中谬误之处在所难免，恳请有关专家及读者批评指正，以利完善。

编　者

2008年10月30日

目　录

前言 …… I

第 8 章　应力状态和强度理论 …… 1

8-1　应力状态的概念和实例 …… 1

8-2　平面应力状态下的任意斜截面上的应力 …… 4

8-3　平面应力状态下的最大应力、主应力 …… 8

8-4　三向应力状态下的最大应力 …… 13

8-5　广义胡克定律 …… 14

8-6　强度理论 …… 18

本章小结 …… 25

习题 …… 27

第 9 章　组合变形 …… 32

9-1　概述 …… 32

9-2　斜弯曲 …… 33

9-3　弯曲与拉伸(压缩)组合变形 …… 36

9-4　弯曲与扭转组合变形 …… 40

本章小结 …… 45

习题 …… 46

第 10 章　能量法 …… 53

10-1　概述 …… 53

10-2　杆件应变能的计算 …… 53

10-3　互等定理 …… 59

10-4　卡氏定理 …… 61

10-5　虚功原理 …… 63

10-6　单位载荷法 …… 65

10-7　图乘法 …… 68

本章小结 …… 71

习题 …… 72

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 11 章 超静定结构 …… 79
11-1 超静定结构概述 …… 79
11-2 用力法解超静定结构 …… 81
11-3 对称和反对称性质的利用 …… 84
11-4 连续梁及三弯矩方程 …… 86
本章小结 …… 91
习题 …… 91

第 12 章 动载荷 …… 97
12-1 概述 …… 97
12-2 构件做匀加速直线运动或匀速转动时的动应力计算 …… 97
12-3 构件在受迫振动时的应力计算 …… 100
12-4 冲击时的应力和变形计算 …… 104
12-5 提高构件抗冲击能力的措施 …… 107
12-6 冲击韧性 …… 110
本章小结 …… 112
习题 …… 113

第 13 章 交变应力 …… 118
13-1 交变应力与疲劳破坏 …… 118
13-2 交变应力的表示方法及分类 …… 120
13-3 材料的持久极限及其测定 …… 121
13-4 影响构件持久极限的主要因素 …… 123
13-5 对称循环下构件的疲劳强度校核 …… 128
13-6 持久极限曲线 …… 130
13-7 非对称循环下构件的疲劳强度校核 …… 131
13-8 提高构件疲劳强度的措施 …… 134
习题 …… 135

第 14 章 压杆稳定 …… 140
14-1 压杆稳定性的基本概念 …… 140
14-2 细长轴心受压直杆临界力的欧拉公式 …… 143
14-3 细长压杆的临界压力和欧拉公式 …… 145
14-4 压杆的临界应力及临界应力总图 …… 147
14-5 压杆的稳定性计算 …… 152
14-6 提高压杆稳定性的措施 …… 156

本章小结 …… 157
习题 …… 158

附录Ⅰ　型钢表 …… 162

附录Ⅱ　习题答案 …… 186

参考文献 …… 192

第8章　应力状态和强度理论

8-1　应力状态的概念和实例

前面几章分别讨论了杆件在轴向拉伸与压缩、扭转、弯曲等基本变形时的强度和刚度问题，了解了危险截面上各点处应力的大小、方向一般是不相同的。如扭转时圆轴横截面上切应力沿着半径按照线性规律分布，弯曲时梁的横截面上正应力沿着高度按照线性规律分布。因此，破坏首先发生在应力最大的点。而通过轴向拉压时斜截面上的应力分析，了解到即使在同一点，其不同方向上应力一般也是不相同的。

对于一般受力杆件，为研究强度问题，首先必须清楚了解构件上哪些点沿哪些方向的应力可以达到最大值。受力构件内某点处各个方向上的应力情况，称为该点的应力状态。研究应力状态的方法，叫做应力分析。

研究一点的应力状态时，常以围绕该点截取的微小正六面体为研究对象，这个正六面体称为单元体。单元体的尺寸十分微小，可认为在单元体的三组平行截面上的应力是均匀分布的，并且相互平行的一对侧面上的应力情况完全相同。这样，受力杆件内的一点的应力状态，可由过该点相互正交的三个面上的应力情况代表，且可根据单元体已知侧面上的应力计算出其他方位上的应力。

现以拉伸直杆(图8-1(a))为例，设想围绕 A 点以纵横六个截面从杆内截取单元体，并放大为图8-1(b)，其平面图则表示为图8-1(c)。单元体的左、右两侧面是杆件横截面的一部分，面上的应力皆为 $\sigma=F/A$。单元体的上、下、前、后四个面都是平行于轴线的纵向面，面上都没有应力。但如按图8-1(d)所示的方式截取单元体，使其四个侧面虽与纸面垂直，但与杆件轴线既不平行也不垂直，成为斜截面，则在这四个面上，不仅有正应力而且还有切应力。所以，随所取方位的不同，单元体各面上的应力也就不同。

围绕一点 A 取出的单元体，一般在三个方向上的尺寸均为无穷小，以致可以认为，在它的每个面上，应力都是均匀分布的；且在单元体内相互平行的截面上，应力都是相同的，均等于通过 A 点的平行面上的应力。所以这样的单元体的应力状

态可以代表一点的应力状态。研究通过一点的不同截面上的应力变化情况，就是应力分析的内容。

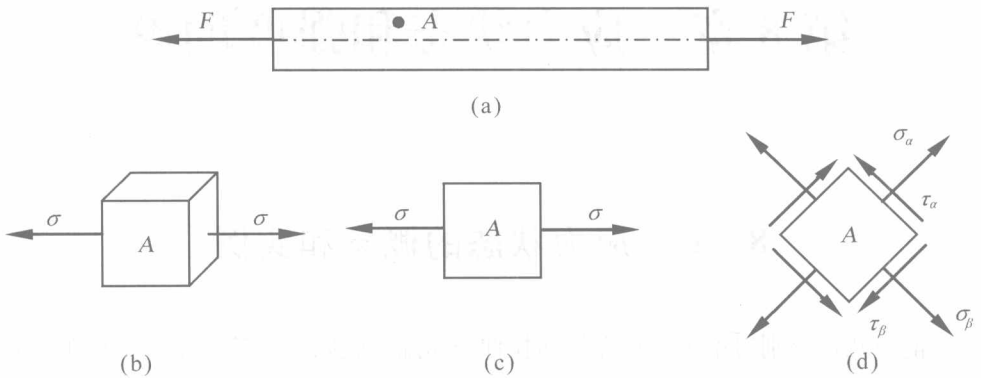
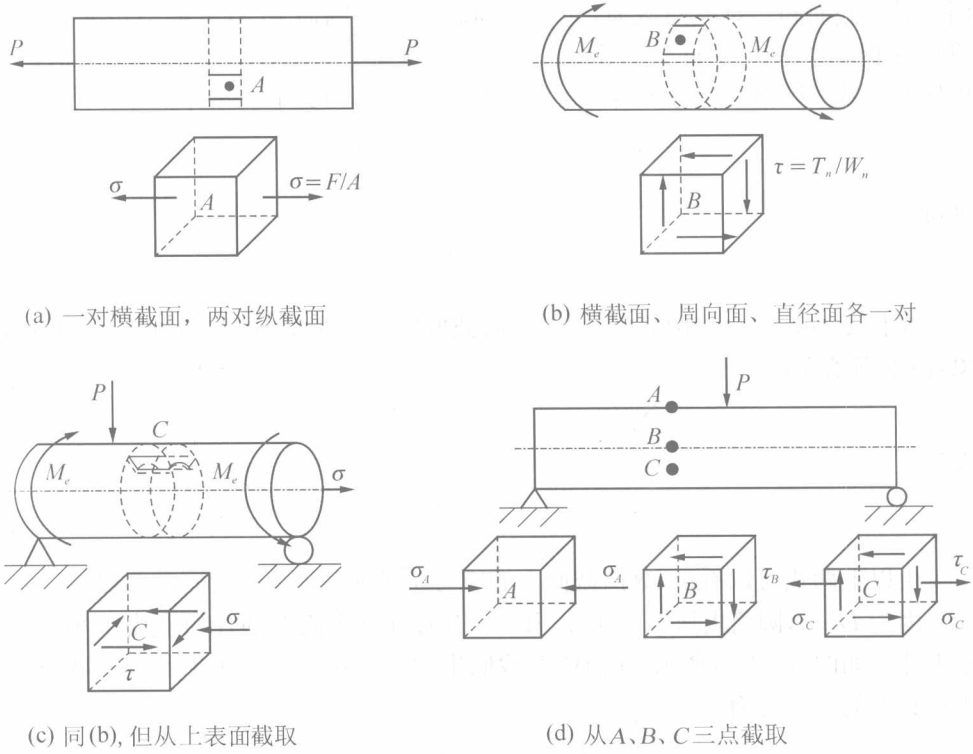


图 8-1

必须注意，为确定各斜截面上的应力，所截取三对正交平行平面上的应力应为材料力学理论所能确定的单元体方位。为此，首要的是取一对平行平面为杆件的横截面，另两对平行平面应选与横截面垂直且其应力可求的纵向截面。例如图 8-2(a)所示轴向拉伸杆件，就是围绕 A 点以横向和纵向截面截取一个单元体来考虑的，横截面上有均匀分布正应力 $\sigma=F/A$，其他各平面上没有应力。图 8-2(b)所示的圆轴扭转，若在轴表面 B 点处截取单元体，则在垂直于轴线的平面上有切应力 τ，再通过切应力互等定理，在通过直径的平面上也有大小相等、正负号相反的切应力 τ。对于同时产生弯曲和扭转变形的圆杆，如图 8-2(c)所示，若在 C 处截取单元体，则除有因弯曲而产生的正应力 σ 外，还存在因扭转而产生的切应力 τ。在图 8-2(d)所示的梁上，在不同位置的三个点 A、B、C 上截取类似的单元体：上边缘处的 A 点，其单元体只在垂直于轴线的平面上有正应力 σ；位于中性轴上的 B 点，只有与剪力相对应的切应力 τ；而在一般位置上的 C 点，其单元体在横截面上既有正应力 σ，又有切应力 τ。

在图 8-2(a)中，单元体的三个相互垂直的面上都无切应力，这种切应力等于 0 的面称为主平面。主平面上的正应力称为主应力。一般来说，通过受力构件的任意点皆可找到三个相互垂直的主平面，因而每一点都有三个主应力。对简单拉伸(或压缩)，三个主应力中只有一个不等于 0，称为单向应力状态；若三个主应力中有两个不等于 0，称为二向或平面应力状态；当三个主应力皆不等于 0 时，称为三向或空间应力状态。单向应力状态也称为简单应力状态，二向和三向应力状态也统称为复杂应力状态。研究一点的应力状态时，通常用 σ_1、σ_2、σ_3 代表该点的三个主应力，并以 σ_1 代表代数值最大的主应力，σ_3 代表代数值最小的主应力，即 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$。

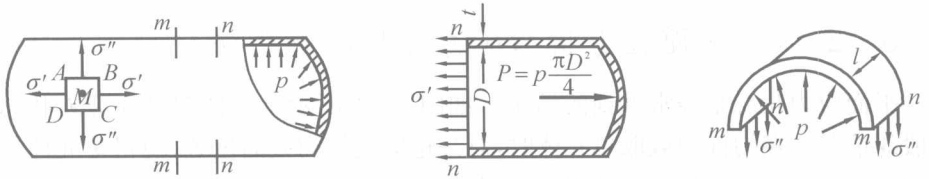


(a) 一对横截面，两对纵截面　　(b) 横截面、周向面、直径面各一对

(c) 同(b)，但从上表面截取　　(d) 从 A、B、C 三点截取

图 8-2

工程实际中，经常遇到薄壁圆筒的容器，像蒸汽锅炉、液压缸、储能器等。如图 8-3 所示即为一薄壁圆筒，内部受到压强为 p 的压力作用，其壁厚 t 远小于圆筒的平均直径 D。一般规定，$t \leqslant \frac{1}{10} D$ 的圆筒，称作薄壁圆筒。



(a)　　(b)　　(c)

图 8-3

由于容器的器壁较薄，在内压的作用下，可看作好像薄膜般地进行工作，只能承受拉力作用。在圆筒筒壁的纵向和横向截面上，只有拉应力作用，并认为拉应力沿壁厚方向是均匀分布的。

由于内压 p 的作用，在圆筒截面上引起正应力 σ'(图 8-3(b))、σ''(图 8-3(c))。若

用一对横截面和一对纵向截面(包括圆筒轴线),在圆筒 M 点处截取单元体 $ABCD$,则单元体的上、下面上作用着应力 σ'',左、右面上作用着应力 σ'(图 8-3(a))。用横截面截取圆筒右部分为研究对象(图 8-3(b)),由其平衡条件:

$$\sum F_x = 0,\ \sigma'(\pi Dt) - p\frac{\pi D^2}{4} = 0$$

求得

$$\sigma' = \frac{pD}{4t} \tag{8-1}$$

在长度为 L 的一段圆筒上,用纵截面截取圆筒上半部分(包括流体)为研究对象,由平衡条件:

$$\sum F_y = 0,\ 2\sigma'' tL - pLD = 0$$

求得

$$\sigma'' = \frac{pD}{2t} \tag{8-2}$$

由以上两式可以看出,纵向截面上的应力 σ'' 是横截面上应力 σ' 的两倍。

因为 $D \gg \delta$,圆筒内压远小于 σ_1 和 σ_2,因而垂直于筒壁的径向应力很小,可忽略不计。如图 8-3(a)所示,在筒壁上截取出的一个单元体处于平面应力状态,作用在其上的主应力为

$$\sigma_1 = \frac{pD}{2t},\ \sigma_2 = \frac{pD}{4t},\ \sigma_3 = 0$$

8-2 平面应力状态下的任意斜截面上的应力

8-2-1 平面应力状态应力分析的解析法

平面应力状态是经常见到的情况。如图 8-4 所示单元体为平面应力状态最一般的情况。在构件中截取单元体时,总是选取这样的截面位置,使得单元体上作用的应力为已知。然后在此基础上,来分析任意斜截面上的应力。

如图 8-4 所示应力状态具有以下特点:在单元体的六个侧面上,仅在四个侧面上作用有应力,且其作用线均平行于单元体的不受力表面。这种应力状态称为平面应力状态,它是常见的一种应力状态。实际上,单向受力与纯切应力状态均为平面应力状态的特殊情况。平面应力状态的一般形式如图 8-4(a)所示,在垂直于坐标轴 x 的截面上,应力用 σ_x 与 τ_{xy} 来表示;在垂直于坐标轴 y 的截面上,应力用 σ_y 与 τ_{yx} 来表示。若上述的应力已知,现在研究与坐标轴 z 平行的任一斜截面 $e-f$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

上的应力。

如图 8-4 所示，斜截面平行于 z 轴且与 x 轴成倾角 α，单独切取 aef 部分进行分析。把作用于 aef 部分上的力投影到 ef 面的外法线 n 和切线 t 方向，由力的平衡条件 $\sum F_n = 0$ 得

$$\sigma_\alpha \mathrm{d}A - (\sigma_x \mathrm{d}A\cos\alpha)\cos\alpha + (\tau_{xy}\mathrm{d}A\cos\alpha)\sin\alpha - (\sigma_y \mathrm{d}A\sin\alpha)\sin\alpha + (\tau_{yx}\mathrm{d}A\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

由切应力互等定理，τ_{xy} 和 τ_{yx} 在数值上相等，将 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 代入上式，可得

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \tag{8-3}$$

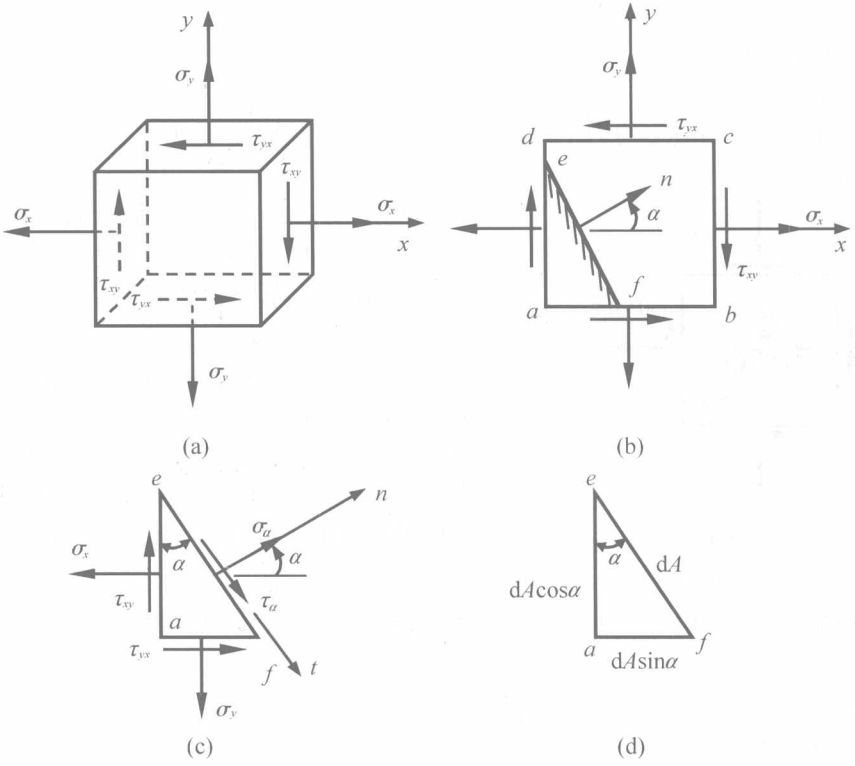


图 8-4

有三角关系：

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

代入式(8-3)，可得

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \sigma_y \cdot \frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

整理后得

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \tag{8-4}$$

由 $\sum F_t = 0$ 可得

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \tag{8-5}$$

由式(8-4)、(8-5)即可根据已知的应力 σ_x、σ_y、τ_{xy} 求得任意 α 截面上的正应力 σ_α、切应力 τ_α。

注意：

① 图 8-4 中应力均为正值，并规定倾角 α 自 x 轴开始逆时针转动者为正，反之为负。

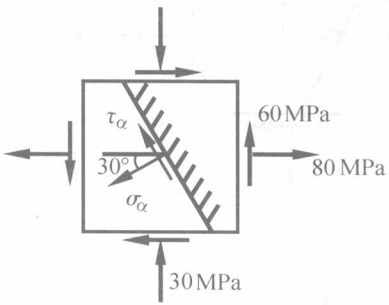


图 8-5

② 利用式(8-4)、(8-5)进行计算时，还应注意符号规定：正应力以拉应力为正，压应力为负；切应力在其绕单元体内任一点为顺时针转向时为正，反之为负。

③ 式中 τ_{xy}、τ_{yx} 分别为垂直于坐标轴 x 的截面上的切应力和垂直于坐标轴 y 的截面上的切应力，且已按切应力互等定理以 τ_{xy} 代换 τ_{yx}。切应力的两个下标中，第 1 个下标 x(或 y)表示切应力作用平面的法线方向，第 2 个下标 y(或 x)表示切应力的方向平行于 y 轴(或 x 轴)。

例 8-1 一单元体如图 8-5 所示，已知 σ_x、σ_y、τ_{xy}、α，用解析法求 σ_α、τ_α(单位：MPa)。

解 根据应力和夹角的规定可知：

$\sigma_x = 80\ \text{MPa}$，$\sigma_y = -30\ \text{MPa}$，$\tau_{xy} = -60\ \text{MPa}$，$\alpha = 210°$(或 $-150°$)

若取 x 轴向左，则 $\alpha = 30°$，代入式(8-4)、(8-5)，有

$$\sigma_\alpha = \frac{80+(-30)}{2} + \frac{80-(-30)}{2}\cos 60° - (-60)\sin 60° = 104.46(\text{MPa})$$

$$\tau_\alpha = \frac{80-(-30)}{2}\sin 60° + (-60)\cos 60° = 17.63(\text{MPa})$$

8-2-2 平面应力状态应力分析的图解法

1. 应力圆方程

联立式(8-4)、式(8-5)，有

$$\begin{cases}\sigma_\alpha = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha\end{cases}$$

将方程组中的 α 消掉，得

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \tag{8-6}$$

由上式确定的以 σ_α 和 τ_α 为变量的圆称作应力圆。圆心的横坐标为 $\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)$，纵坐标为 0，圆的半径为 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$。

2. 应力圆的画法

取坐标系 $\sigma O\tau$，按选定比例尺取 $\overline{OB_1}=\sigma_x$，$\overline{B_1D_1}=\tau_{xy}$，$\overline{OB_2}=\sigma_y$，$\overline{B_2D_2}=\tau_{yx}$（$<0$），连接 D_1、D_2 两点与 σ 轴相交于 C 点。以 C 为圆心，$\overline{CD_1}$ 或 $\overline{CD_2}$ 为半径画圆即为所求的应力圆。D_1 点坐标代表 cd 面（x 面）的正应力和切应力（σ_x，τ_{xy}）；D_2 点坐标代表 ad 面（y 面）的正应力和切应力（σ_y，τ_{yx}）。D_1、D_2 点所对圆心角为 180°，而它们所对应的 cd 面和 ad 面外法线的夹角为 90°，所以不难推知：在单元体上任取两个斜截面，它们的外法线夹角若为 α，则在应力圆上这两个截面对应的夹角必为 2α。

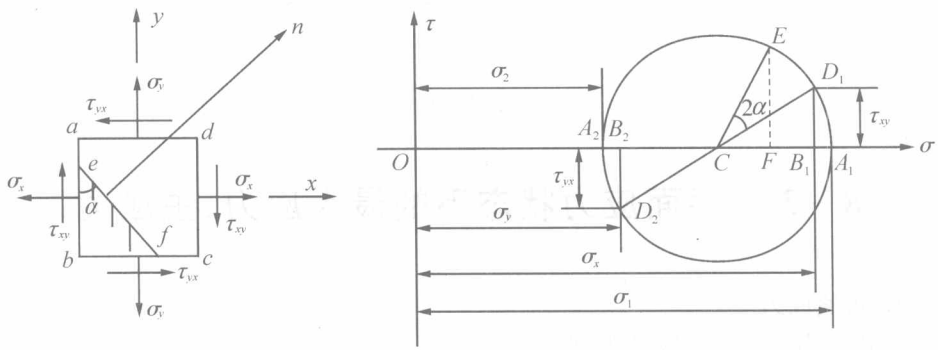


图 8-6

利用应力圆求 α 截面 $e-f$ 上应力的方法为：

将半径 $\overline{CD_1}$ 逆时针转过 2α 角度到 CE 处，则 E 点坐标 OF、EF 即为 $e-f$ 面上的应力（σ_α，τ_α）。

3. 单元体与应力圆的对应关系

单元体与应力圆有以下对应关系：

① 圆上一点坐标对应于单元体一个截面上的正应力和剪应力值；

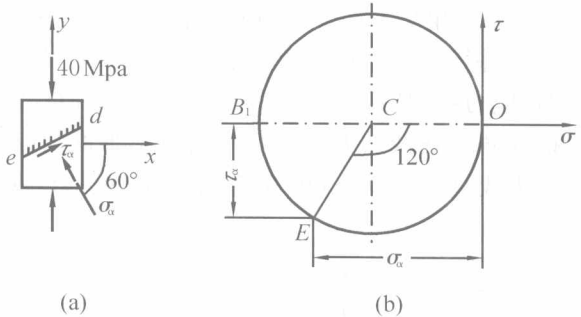
② 圆上两点所夹圆心角等于单元体中对应两截面法线夹角的两倍；

③ 对应夹角转向相同。

例 8-2 用应力圆求如图 8-7(a)所示单元体在斜截面 $d-e$ 上的正应力及切应力。

解 选取比例尺如图 8-7(b)所示。目前情况为单向应力状态，可看作是二向应力状态的特殊情况。在单元体中，以 x 轴为法线的平面为主平面，且 $\sigma_1=\sigma_x=0$。这个主平面上的应力在图 8-7(b)中由原点 O 来代表。以 y 轴为法线的平面也是主平面，且 $\sigma_3=\sigma_y=-40$ MPa，在图 8-7(b)中由 B_1 点来代表。以 $\overline{OB_1}$ 为直径作圆即为所需要的应力圆。在单元体中，由 x 轴到 $d-e$ 面的法线为顺时针的 60°。在应力圆中，应从 O 点沿圆周按顺时针方向量取圆心角 120°，以确定 E 点。E 点的坐标即为 $d-e$ 面上的应力。按所选比例尺量出：

$$\sigma_\alpha=-30(\text{MPa}),\tau_\alpha=-17.4(\text{MPa})$$



(a) (b)

图 8-7

8-3 平面应力状态下的最大应力、主应力

1. 极值应力

将正应力公式对 α 取导数，得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}=-2\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha\right) \tag{8-7}$$

若 $\alpha=\alpha_0$ 时，能使导数 $\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}=0$，则 α_0 所确定的截面上正应力为最大值或最小值：

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha_0+\tau_{xy}\cos 2\alpha_0=0$$

推得

$$\mathrm{tg}2\alpha_0=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{8-8}$$

上式有两个解：α_0 和 $\alpha_0 \pm 90°$。在它们所确定的两个互相垂直的平面上，正应力取得极值。且其中一个对应最大正应力所在的平面，另一个对应最小正应力所在的平面。根据式(8－8)求出 $\sin 2\alpha_0$ 和 $\cos 2\alpha_0$，代入式(8－4)，求得最大或最小正应力为

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{8-9}$$

在使用这些公式时，如约定用 σ_x 表示两个正应力中代数值较大的一个，即 $\sigma_x \geqslant \sigma_y$，则式(8－8)确定的两个角度中，绝对值较小的一个确定 $\sigma_{\max}$ 所在的平面。将 α_0 代入切应力公式(8－5)，τ_{α_0} 为 0。这就是说，正应力为最大或最小所在的平面，就是主平面。所以，主应力就是最大或最小的正应力。

用完全相似的方法，可以确定最大和最小切应力以及它们所在的平面。将切应力公式(8－5)对 α 求导：

$$\frac{\mathrm{d}\tau_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - 2\tau_{xy}\sin 2\alpha \tag{8-10}$$

若 $\alpha = \alpha_1$ 时，能使导数 $\frac{\mathrm{d}\tau_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = 0$，则在 α_1 所确定的截面上，切应力取得极值。通过求导可得

$$(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha_1 - 2\tau_{xy}\sin 2\alpha_1 = 0$$

推得

$$\mathrm{tg}2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{8-11}$$

求得切应力的最大值和最小值为

$$\left.\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{8-12}$$

与正应力的极值和所在两个平面方位的对应关系相似，切应力的极值与所在两个平面方位的对应关系是：若 $\tau_{xy} > 0$，则绝对值较小的 α_1 对应最大切应力所在的平面。

2. 主应力所在的平面与切应力极值所在的平面之间的关系

α_0 与 α_1 之间的关系为

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{1}{\mathrm{tg}2\alpha_1}, \quad 2\alpha_1 = 2\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

即有

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\pi}{4} \tag{8-13}$$

这表明最大和最小切应力所在的平面与主平面的夹角为 45°。

3. 在应力圆上标出极值应力

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\left.\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix}\right\}=\pm R=\pm\frac{\sigma_{\max}-\sigma_{\min}}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

例 8-3 对如图 8-8(a)所示悬臂梁，试确定 E 点处主应力数值及主平面位置。E 点处取出的单元体如图 8-8(b)所示(单位：MPa)。

解 (1) 求主应力。

由图 8-8(b)所示单元体可知：

$$\sigma_x=-70\ \text{MPa},\tau_{xy}=50\ \text{MPa},\sigma_y=0,\tau_{yx}=-50\ \text{MPa}$$

代入到式(8-9)中，得主应力值为

$$\sigma_1=\sigma_{\max}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$=\frac{-70+0}{2}+\sqrt{\left(\frac{-70-0}{2}\right)^2+50^2}$$

$$=-35+61=26(\text{MPa})$$

$$\sigma_3=\sigma_{\min}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$=-35-61=-96(\text{MPa})$$

($-96<0$，所以是 σ_3 而非 σ_2。$\sigma_2=0$)

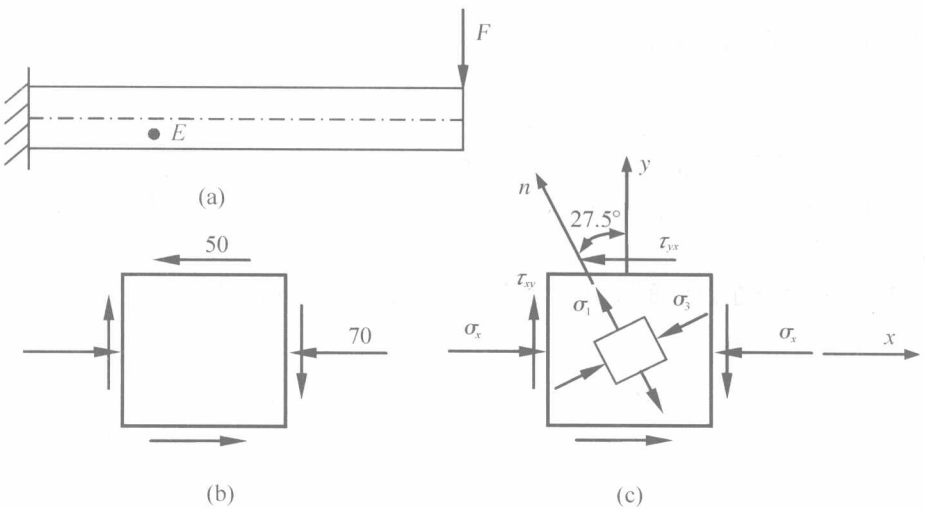


图 8-8

(2) 确定主平面方位。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com