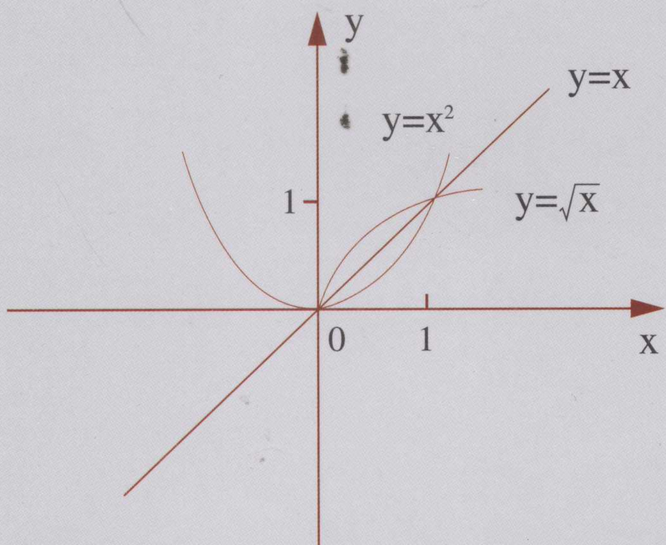
高等职业教育“十一五”规划教材

高等数学

王劲松　主编　伊 新　副主编



国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等职业教育“十一五”规划教材

高等数学

王劲松　主　编
伊　新　副主编

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职高专数学教改经验的基础上编写而成.

全书共分为八章，整体架构合理，语言精练，精心选择教学素材. 主要内容包括：函数与极限、导数、中值定理、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数.

本书可以作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校工科各专业高等数学课程教材，也可以供经济管理类专业选用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王劲松主编. —北京：国防工业出版社，2009.8

高等职业教育"十一五"规划教材

ISBN 978-7-118-06352-3

Ⅰ.高... Ⅱ.王... Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 085772 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 **印张** 18 **字数** 341 千字

2009 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 30.00 元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

本书根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职高专数学教改经验的基础上编写而成.

高等数学在计算机应用、计算机软件、计算机网络、计算机通信、多媒体技术、平面设计及信息管理等学科有着广泛的应用，学好本课程，对后续课程的学习是必不可少的.

本教材在编写过程中，遵循"以应用为目的，以必须、够用为度"的基本原则，在保证科学性的基础上，注意讲清概念，适当减少理论证明，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养、对基本概念的讲解，在性质讨论中注重数形结合，这样不仅培养学生的逻辑思维能力，还能使教学内容形象、直观，有利于学生的学习和掌握. 从"服务专业，兼顾数学体系"的角度考虑，本书在编写过程中特别注意讲解解题的思路及解题方法，做到难易适中，深入浅出，举一反三，融会贯通.

全书共分为八章，整体架构合理，语言精练，精心选择教学素材. 主要内容包括：函数与极限、导数、中值定理、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数.

本书可以作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校工科各专业高等数学课程教材，也可以供经济管理类专业选用.

本书由北京信息职业技术学院的王劲松任主编，伊新任副主编. 全书框架结构的安排、统稿、定稿由王劲松承担.

由于水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大读者批评指正.

编　者

2009 年 3 月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　函　　数

一、函数的概念

[定义 1] 设 D 为非空实数集，如果按照某一个确定的对应法则 f，对于任意的 $x\in D$ 均有唯一的实数 y 与之相对应，则称对应法则 f 是定义在 D 上的函数，记做：$y=f(x)$.

D 叫做函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量. 根据对应法则 f 与 D 中，任一实数 x_0 相对应的 y 值，记做 $f(x_0)$，叫做函数 f 在 x_0 的函数值. 而全体函数值的集合 $Z=\{y\mid y=f(x),x\in D\}\subset \mathbf{R}$，叫做函数 f 的值域.

不难看出：决定一个函数的因素为函数的定义域和对应法则，两个函数只有当其定义域和对应法则完全相同时才表示同一个函数，与自变量用什么字母来表示无关，如 $y=f(x)$ 也可以用 $y=f(u)$ 表示.

函数定义域的求法如下.

(1) 确定使这一个代数式有意义的自变量取值的全体.

(2) 对实际问题除满足(1) 外，还应根据问题的实际意义来确定.

(3) 几类函数的定义域求法：

① 多项式　$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，定义域为全体实数.

② 分式　$y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$，定义域为 $f(x)\neq 0$.

③ 根式　偶次根式 $y=\sqrt[2n]{f(x)}$，定义域为 $f(x)\geqslant 0$.

奇次根式 $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$，定义域为全体实数.

④ 对数　$y=\log_a f(x)$，定义域为 $f(x)>0$.

对于由解析式表示的函数，如果对其定义域未做说明，那么其定义域通常理解为：使该数学表达式有意义的一切实数值.

例题 1　求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}$

解:该函数的定义域是满足不等式组$\begin{cases}\ln(x+1)\neq 0\\ x+1>0\end{cases}$的 x 值的集合,即

$$\begin{cases}x+1\neq 1\\ x>-1\end{cases}$$

解得 $x>-1$ 且 $x\neq 0$,所以得到函数的定义域为$(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

也可以用集合形式表示为$\{x|x>-1$ 且 $x\neq 0\}$.

(2) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$

解:该函数的定义域是满足不等式$\dfrac{x-1}{x-2}\geqslant 0$ 且 $x-2\neq 0$ 的 x 值的集合,即

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x-1\leqslant 0\\ x-2<0\end{cases}$$

解得 $x>2$ 或 $x\leqslant 1$,所以函数的定义域为$(-\infty,1]\cup(2+\infty)$.

(3) $y=\sqrt{x^2-2x-35}$

解:解不等式 $x^2-2x-35\geqslant 0$, 即有

$$(x-7)(x+5)\geqslant 0$$

解得 $x\geqslant 7$ 或 $x\leqslant -5$,所以得到函数的定义域为$(-\infty,-5]\cup[7,+\infty)$.

(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{x-2}$

解:解不等式组

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1 & ①\\ x-2\neq 0 & ②\end{cases}$$

解① 有$|x-1|\leqslant 2$,即有$-2\leqslant x-1\leqslant 2$,解得$-1\leqslant x\leqslant 3$.

解② 有 $x\neq 2$.

所以得到函数的定义域为$[-1,2)\cup(2,3]$.

(5) $y=-\dfrac{1}{1+3x^2}$

解:因为分母 $1+3x^2\geqslant 1\neq 0$,所以得到函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(6) $y=\sqrt{16-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

解:解不等式组

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0 & ①\\ x^2-9>0 & ②\end{cases}$$

解① 有$-4\leqslant x\leqslant 4$.

解②有 $x>3$ 或 $x<-3$,所以得到函数的定义域为$[-4,-3)\cup(3,4]$.

二、函数的表示法

函数 $f(x)$的具体表达方式有 3 种:解析式法、表格法和图像法.

(1) 以数学表达式来表示函数的方法叫做函数的解析式法,其优点是便于理论推导和计算.

(2) 以表格形式来表示函数的方法叫做函数的表格法,它是把自变量的值与对应的函数值列成表格,如常用的数学用表,其优点在于所求函数值可以通过查表求出.

(3) 以图形形式来表示函数的方法叫做函数的图像法,其优点是直观形象,可以看到函数的变化趋势.

三、分段函数

在用解析式法表示两个变量之间的函数关系时,有的要用两个或多于两个的数学式子来表示,即在定义域不同部分用不同数学式子来表示,称为分段函数.

例题 2 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-5, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ 3-2x, & x<0 \end{cases}$,求函数 $f(x)$的定义域.

解:分段函数的定义域只需把各段函数的定义域用并集相连起来即可,所以得到函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例题 3 设函数 $f(x)=x^2-2x-1$,求 $f(3)$、$f(u)$、$f(x-1)$、$f[f(3)]$.

解:$f(3)=3^2-2\times3-1=2$

$f(u)=u^2-2u-1$

$f(x-1)=(x-1)^2-2(x-1)-1=x^2-4x+2$

$f[f(3)]=f(2)=2^2-2\times2-1=-1$

例题 4 (1) 设函数 $f(x+1)=x^2-3x$,求 $f[f(x)]$.

解:令 $u=x+1$,则 $x=u-1$,即有

$$f(u) = (u-1)^2-(u-1) = u^2-2u+1-u+1 = u^2-3u+2$$

所以 $f(x)=x^2-3x+2$

所以 $f[f(x)]=f(x^2-3x+2)=(x^2-3x+2)^2-5(x^2-3x+2)+6$

$=(x^2-3x+2)(x^2-3x-3)$

(2) 设 $f\left(\dfrac{1}{x}-2\right)=\dfrac{x}{2x-1}$,求 $f(x)$.

解:$f\left(\dfrac{1}{x}-2\right)=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}-2}$

利用配方法可知 $f(x)=-\frac{1}{x}$.

例题 5 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & -3\leqslant x<0\\ 1, & x=0\\ 2+x, & 0<x\leqslant 3\end{cases}$,求:(1) 函数的定义域;
(2) $f(-1)$、$f\left(-\frac{1}{2}\right)$、$f(0)$、$f(1)$.

解:(1) 函数 $f(x)$定义域为$[-3,3]$.

(2) $f(-1)=2\times(-1)=-2$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$$f(0)=1$$

$$f(1)=2+1=3$$

例题 6 设函数 $f(e^x)=3x^2+x$,求 $f(x)$.

解:设 $u=e^x$,则 $x=\ln u$,由于 $f(u)=3\ln^2 u+\ln u$,所以 $f(x)=3\ln^2 x+\ln x$.

例题 7 设 $f(x)=x^2+ax+b$,其中 a、b 为待定常数,设 $f(1)=f(4)=0$,求:
(1) 函数 $f(x)$;(2) $f(-x)$、$f\left(\frac{1}{x}\right)$与 $f(x_0+h)-f(x_0)$.

解:(1) 因为 $f(x)=x^2+ax+b$ 且 $f(1)=f(4)=0$,解方程组$\begin{cases}1+a+b=0\\ 16+4a+b=0\end{cases}$,
解得

$$\begin{cases}a=-5\\ b=4\end{cases}$$

则函数解析式为 $f(x)=x^2-5x+4$.

(2) $f(-x)=(-x)^2-5(-x)+4=x^2+5x+4$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-5\cdot\frac{1}{x}+4=\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}+4$$

$$\begin{aligned}f(x_0+h)-f(x_0)&=[(x_0+h)^2-5(x_0+h)+4]-[x_0^2-5x_0+4]\\&=2x_0h+h^2-5h\end{aligned}$$

四、函数的性质

函数的性质有函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

1. 函数的奇偶性

[**定义 2**] 设函数 $y=f(x)$的定义域是以原点为中心的对称区间 D,如果对任意的 $x\in D$,有:

(1) $f(-x)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$为偶函数.

(2) $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$为奇函数.

奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

函数奇偶性的判断方法如下：

(1) 根据函数奇偶性定义加以判断.

(2) 根据函数奇偶性的必要条件加以判断.

(3) 根据函数奇偶性的性质加以判断：

奇函数+奇函数→奇函数　　　　奇函数×奇函数→偶函数

非零奇函数+非零偶函数→非奇非偶函数　　　　奇函数×偶函数→奇函数

偶函数+偶函数→偶函数　　　　偶函数×偶函数→偶函数

在以后的学习中经常遇见的奇偶函数如下：

奇函数　$y=x^{2n+1}$，$y=\sin x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，

$y=\log_a\dfrac{1+x}{1-x}$，$y=a^x-a^{-x}$

偶函数　$y=x^{2n}$，$y=\cos x$，$y=C$，$y=a^x+a^{-x}$，$y|x|$

例题 8　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x\tan x+x^2$

解：$f(-x)=(-x)\tan(-x)+(-x)^2=(-x)(-\tan x)+x^2$

$=x\tan x+x^2=f(x)$

所以 $f(x)$为偶函数.

(2) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

解：$f(-x)=\ln\dfrac{1+(-x)}{1-(-x)}=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-f(x)$

所以 $f(x)$为奇函数.

(3) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$

解：$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})$

$=\lg\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$

所以 $f(x)$为奇函数.

(4) $f(x)=2x^4+3\sin^3x+2$

解：$f(-x)=2(-x)^4+3[\sin(-x)]^3+2=2x^4-3\sin^3x+2$

所以 $f(-x)\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x)$，因此 $f(x)$为非奇非偶函数.

(5) $f(x)=e^{4x^2}+3$

解：$f(-x)=e^{4(-x)^2}+1=e^{4x^2}+1=f(x)$

所以 $f(x)$为偶函数.

(6) $f(x)=\sin^3 x-\tan x$

解: $f(-x)=\sin^3(-x)-\tan(-x)=-\sin^3 x+\tan x$

$=-(\sin^3 x-\tan x)=-f(x)$

所以 $f(x)$为奇函数.

(7) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

解: $f(-x)=-x+\dfrac{1}{-x}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$

所以 $f(x)$为奇函数.

(8) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x^2-8)$

解: $f(-x)=(-x)^{\frac{2}{3}}[(-x)^2-8]=x^{\frac{2}{3}}(x^2-8)=f(x)$

所以 $f(x)$为偶函数.

2. 函数的单调性

[定义 3] 设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义,对于任意的 $x_1,x_2\in I,x_1<x_2$:

(1) 如果 $f(x_1)<f(x_2)$,则函数 $y=f(x)$在区间 I 上为增函数;

(2) 如果 $f(x_1)>f(x_2)$,则函数 $y=f(x)$在区间 I 上为减函数.

单调增函数与单调减函数统称为单调函数.

例如:函数 $y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上为单调递增函数,在$(-\infty,0)$上为单调递减函数;函数 $y=x^3$ 在实数范围内为单调递增函数.

3. 函数的周期性

[定义 4] 设函数 $y=f(x)$在实数集上有定义,如果存在正常数 T,使得对于任意的 $x\in D$,有 $f(x+T)=f(x)$成立,则称 $y=f(x)$为周期函数,称 T 为函数 $f(x)$的一个周期.

如果存在最小的正数 T 满足上式,则称 T 为函数 $y=f(x)$的最小正周期.

不难看出:如果 T 是函数 $f(x)$的周期,当 $k\in\mathbf{Z}$ 时,kT 也是函数 $f(x)$的一个周期.

例如:函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

注意: 一个周期为 T 的周期函数中,在这函数定义域内每个长度为 T 的区间上,函数图形有相同的形状.

4. 函数的有界性

[定义 5] 设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义,如果存在 $M>0$,使得对于任意的 $x\in I$ 有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上为有界函数.

有界函数图像的特点:介于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

因此在讨论某函数是否有界时,必须找到讨论的区间,同一个函数在不同的区间上的有界情况不同,为便于以后极限部分的计算,给出常见的有界函数如下.

① $|\sin x|\leqslant 1, x\in\mathbf{R}$;　② $|\cos x|\leqslant 1, x\in\mathbf{R}$;

③ $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1, x\neq 0$;　④ $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant 1, x\neq 0$;

⑤ $|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2}, x\in[-1,1]$;　⑥ $0\leqslant|\arccos x|\leqslant\pi, x\in[-1,1]$;

⑦ $|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2}, x\in\mathbf{R}$;　⑧ $0\leqslant|\operatorname{arccot} x|\leqslant\pi, x\in\mathbf{R}$;

⑨ $\left|\frac{1}{1+x^2}\right|\leqslant 1, x\in\mathbf{R}$;　⑩ $\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right|\leqslant 1, x\in\mathbf{R}$.

五、反函数

[定义 6] 设函数 $y=f(x), x\in D, y\in R_f$，如果对于任意的 $y\in R_f$，通过关系式 $y=f(x)$在 D 中只有一个 x 值，使得 $f(x)=y$ 成立，这样就在数集上定义了一个函数，这个函数称为 $y=f(x)$的反函数，记做：$x=f^{-1}(y), y\in R_f$.

按习惯的记法：x 记做自变量，y 记做因变量，函数 $f(x)$的反函数记做：$y=f^{-1}(x), x\in R_f$.

反函数的性质：$f^{-1}[f^{-1}(x)]=x, f[f^{-1}(y)]=y$.

在同一个直角坐标系下，函数 $y=f(x)$与反函数 $y=f^{-1}(x)$关于直线 $y=x$ 对称.

[定理 1]（反函数存在定理） 单调函数必有反函数，其增减性相同.

例题 9 求下列函数的反函数.

(1) $y=-5x-2$

解：$5x=-2-y$，所以 $x=\frac{1}{5}(-2-y)$，则反函数为 $y=\frac{1}{5}(-2-x)$.

(2) $y=\frac{1}{2-x}$

解：$y=\frac{1}{2-x}$，则 $2-x=\frac{1}{y}$，所以 $x=2-\frac{1}{y}$，则反函数为 $y=2-\frac{1}{x}$.

(3) $y=2^{3x-1}$

解：$y=2^{3x-1}$，所以 $3x-1=\log_2 y$，即 $x=\frac{1}{3}(\log_2 y+1)$，所以反函数为 $y=\frac{1}{3}(\log_2 x+1)$.

例题 10 设函数 $f(x)=\frac{4x}{x-5}$，求 $f^{-1}(3)$.

解：由函数与反函数的关系可知，原函数定义域为反函数值域，原函数的值域为反函数的定义域.

$f^{-1}(3)$指的是当 $x=3$ 时反函数的函数值，即所求问题可转化为当 $y=3$ 时，

求 x 为何值的问题.

所以 $3=\dfrac{4x}{x-5}$,则 $x=-15$,所以 $f^{-1}(3)=-15$.

六、基本初等函数

基本初等函数由常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数六类函数构成.

1. 常量函数 $y=c$(c 为常数)

属于这一类的函数有无限个,它们的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

2. 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为常数)

属于这一类的函数有无限个,如图 1—1 所示,它们的定义域 D 与指数 α 的值有关,但无论指数 α 的值等于多少,恒有 $D\supset(0,+\infty)$.

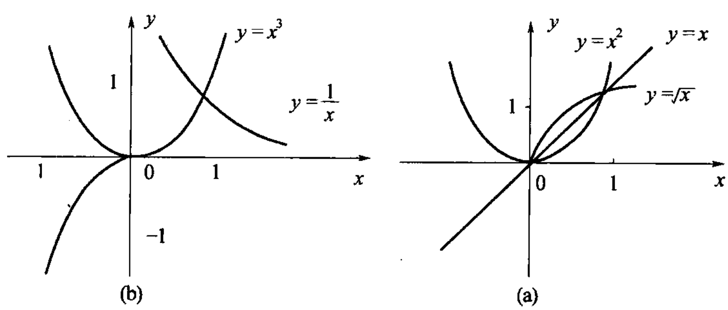


图 1—1

3. 指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq1$)

属于这一类的函数有无限个,如图 1—2 所示,它们的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

4. 对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq1$)

属于这一类的函数有无限个,如图 1—3 所示,它们的定义域为 $x\in(0,+\infty)$.

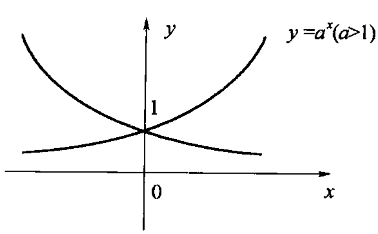


图 1—2

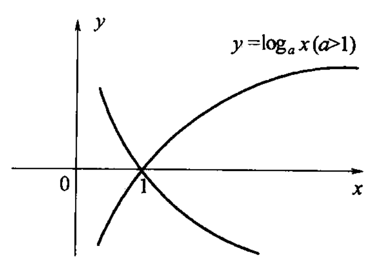


图 1—3