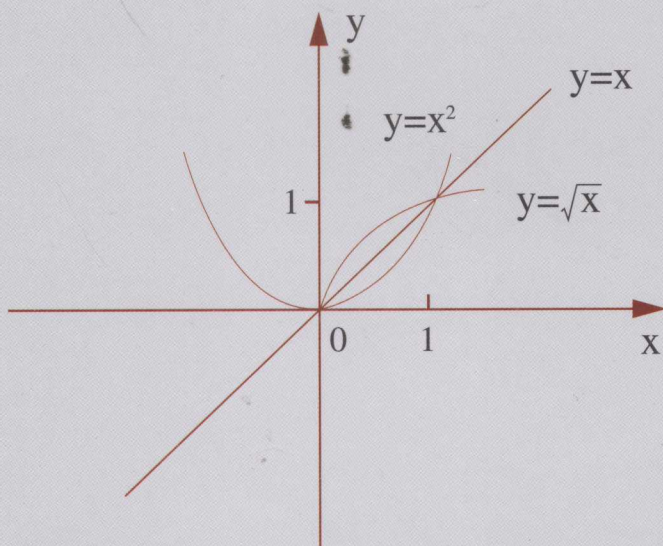




高等职业教育“十一五”规划教材

高等数学

王劲松 主编 伊新 副主编



国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等职业教育“十一五”规划教材

高等数学

王劲松 主 编

伊 新 副主编

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职高专数学教改经验的基础上编写而成。

全书共分为八章，整体架构合理，语言精练，精心选择教学素材。主要包括：函数与极限、导数、中值定理、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数。

本书可以作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校工科各专业高等数学课程教材，也可以供经济管理类专业选用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王劲松主编. —北京:国防工业出版社,
2009. 8

高等职业教育“十一五”规划教材

ISBN 978-7-118-06352-3

I. 高... II. 王... III. 高等数学—高等学校:技术
学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 085772 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 18 字数 341 千字

2009 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 30.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

本书根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职高专数学教改经验的基础上编写而成。

高等数学在计算机应用、计算机软件、计算机网络、计算机通信、多媒体技术、平面设计及信息管理等学科有着广泛的应用，学好本课程，对后续课程的学习是必不可少的。

本教材在编写过程中，遵循“以应用为目的，以必须、够用为度”的基本原则，在保证科学性的基础上，注意讲清概念，适当减少理论证明，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养、对基本概念的讲解，在性质讨论中注重数形结合，这样不仅培养学生的逻辑思维能力，还能使教学内容形象、直观，有利于学生的学习和掌握。从“服务专业，兼顾数学体系”的角度考虑，本书在编写过程中特别注意讲解解题的思路及解题方法，做到难易适中，深入浅出，举一反三，融会贯通。

全书共分为八章，整体架构合理，语言精练，精心选择教学素材。主要内容包括：函数与极限、导数、中值定理、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数。

本书可以作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校工科各专业高等数学课程教材，也可以供经济管理类专业选用。

本书由北京信息职业技术学院的王劲松任主编，伊新任副主编。全书框架结构的安排、统稿、定稿由王劲松承担。

由于水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大读者批评指正。

编 者
2009 年 3 月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、函数的概念	1
二、函数的表示法	3
三、分段函数	3
四、函数的性质	4
五、反函数	7
六、基本初等函数	8
七、复合函数	10
八、初等函数	10
第二节 数列极限	11
一、数列极限的定义和定理	12
二、数列极限的运算	14
第三节 函数的极限	16
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	16
二、当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	17
三、函数极限的性质	18
四、函数的四则运算法则	19
五、两个重要极限	23
第四节 无穷小量的比较	30
一、无穷小与无穷大	30
二、无穷小阶的概念	31
第五节 函数的连续性	32
一、函数的连续性	32
二、间断点及其分类	34
三、连续性运算性质	35

四、 闭区间上的连续函数的性质	36
习题一	36
第二章 导数	41
第一节 导数的概念	41
一、 实例	41
二、 导数	42
三、 可导与连续的关系	43
四、 导数的几何意义	44
第二节 导数的计算	44
一、 基本初等函数的导数公式	44
二、 导数四则运算法则	48
三、 反函数的导数	52
四、 复合函数的导数	53
第三节 隐函数求导与对数求导法则	56
一、 隐函数求导	56
二、 对数求导法则	61
第四节 高阶导数	67
第五节 微分	70
一、 微分的概念	70
二、 微分公式	71
三、 微分运算法则	72
习题二	74
第三章 中值定理	77
第一节 定理及法则	77
一、 罗尔定理	77
二、 拉格朗日定理	77
三、 洛必达法则(L'Hospital 法则)	80
第二节 导数的应用	84
一、 函数的单调性	84
二、 函数的极值	87
三、 函数的最大(小)值	91

第三节 曲线的凹向与拐点	95
习题三	98
第四章 不定积分	101
第一节 不定积分的概念及运算法则	101
一、原函数	101
二、不定积分	101
三、基本积分公式	103
四、不定积分的性质与运算法则	104
第二节 不定积分的换元法	109
一、换元积分法	109
二、第一类换元积分法	109
三、第二类换元积分法	115
第三节 不定积分的分部积分法	121
一、分部积分法	121
二、有理函数的积分	126
三、三角函数的积分	128
第四节 积分表的使用	130
习题四	133
第五章 定积分	137
第一节 定积分的重要内容	137
一、引例	137
二、定积分的概念	138
三、定积分的基本性质	139
四、微积分学的基本原理	141
五、牛顿—莱布尼兹公式	143
第二节 定积分的计算	145
一、定积分的换元积分法	145
二、定积分的分部积分法	146
三、奇偶函数在对称区间 $[-a, a]$ 上的定积分	147
第三节 定积分的应用	149
一、平面图形的面积	149
二、旋转体的体积	153
第四节 广义积分	155

习题五	157
第六章 多元函数微积分	160
第一节 空间解析几何	160
一、空间直角坐标系	160
二、怎样表示方向	162
三、平面的方程	164
四、直线的方程	166
第二节 多元函数的概念	168
第三节 偏导数	171
一、偏导数的概念	171
二、二阶偏导数	175
第四节 全微分	178
第五节 多元函数的极值及其求法	182
第六节 二重积分的概念与性质	185
一、曲顶柱体的体积	185
二、二重积分的性质	186
三、二重积分的计算	186
习题六	194
第七章 常微分方程	197
第一节 微分方程的一般概念	197
第二节 可分离变量的微分方程	199
一、分离变量法	199
二、可化为分离变量法的微分方程	201
第三节 一阶线性微分方程	203
第四节 二阶常系数齐次线性微分方程	206
第五节 二阶常系数非齐次线性微分方程	209
第六节 二阶常系数非齐次线性微分方程的算子解法	212
习题七	218
第八章 无穷级数	221
第一节 常数项级数的概念和性质	221
一、常数项级数的概念	221
二、收敛级数的基本性质	223

第二节	常数项级数的审敛法	225
一、	正项级数及其审敛法	225
二、	交错级数及其审敛法	235
三、	绝对收敛与条件收敛	235
第三节	幂级数	238
一、	函数项级数的概念	238
二、	幂级数及其收敛性	238
三、	幂级数的运算	241
第四节	函数展开成幂级数	243
一、	泰勒级数	243
二、	函数展开成幂级数	244
三、	幂级数的间接展开法	246
四、	常用的幂级数展开式小结	250
习题八		250
附录一	常用初等函数公式和基本三角函数公式	252
附录二	常用积分公式	254
习题答案		264

第一章 函数与极限

第一节 函 数

一、函数的概念

[定义1] 设 D 为非空实数集, 如果按照某一个确定的对应法则 f , 对于任意的 $x \in D$ 均有唯一的实数 y 与之相对应, 则称对应法则 f 是定义在 D 上的函数, 记做: $y=f(x)$.

D 叫做函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量. 根据对应法则 f 与 D 中, 任一实数 x_0 相对应的 y 值, 记做 $f(x_0)$, 叫做函数 f 在 x_0 的函数值. 而全体函数值的集合 $Z=\{y|y=f(x), x \in D\} \subset \mathbf{R}$, 叫做函数 f 的值域.

不难看出: 决定一个函数的因素为函数的定义域和对应法则, 两个函数只有当其定义域和对应法则完全相同时才表示同一个函数, 与自变量用什么字母来表示无关, 如 $y=f(x)$ 也可以用 $y=f(u)$ 表示.

函数定义域的求法如下.

(1) 确定使这一个代数式有意义的自变量取值的全体.

(2) 对实际问题除满足(1)外, 还应根据问题的实际意义来确定.

(3) 几类函数的定义域求法:

① 多项式 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$, 定义域为全体实数.

② 分式 $y=\frac{g(x)}{f(x)}$, 定义域为 $f(x) \neq 0$.

③ 根式 偶次根式 $y=\sqrt[n]{f(x)}$, 定义域为 $f(x) \geq 0$.

奇次根式 $y=\sqrt[n]{f(x)}$, 定义域为全体实数.

④ 对数 $y=\log_a f(x)$, 定义域为 $f(x) > 0$.

对于由解析式表示的函数, 如果对其定义域未做说明, 那么其定义域通常理解为: 使该数学表达式有意义的一切实数值.

例题 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{x^2}{\ln(x+1)}$

解:该函数的定义域是满足不等式组 $\begin{cases} \ln(x+1) \neq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ 的 x 值的集合,即

$$\begin{cases} x+1 \neq 1 \\ x > -1 \end{cases}$$

解得 $x > -1$ 且 $x \neq 0$, 所以得到函数的定义域为 $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

也可以用集合形式表示为 $\{x | x > -1 \text{ 且 } x \neq 0\}$.

$$(2) y = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

解:该函数的定义域是满足不等式 $\frac{x-1}{x-2} \geq 0$ 且 $x-2 \neq 0$ 的 x 值的集合,即

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$$

解得 $x > 2$ 或 $x \leq 1$, 所以函数的定义域为 $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$.

$$(3) y = \sqrt{x^2 - 2x - 35}$$

解:解不等式 $x^2 - 2x - 35 \geq 0$, 即有

$$(x-7)(x+5) \geq 0$$

解得 $x \geq 7$ 或 $x \leq -5$, 所以得到函数的定义域为 $(-\infty, -5] \cup [7, +\infty)$.

$$(4) y = \arcsin \frac{x-1}{2} + \frac{1}{x-2}$$

解:解不等式组

$$\begin{cases} \left| \frac{x-1}{2} \right| \leq 1 & \text{①} \\ x-2 \neq 0 & \text{②} \end{cases}$$

解① 有 $|x-1| \leq 2$, 即有 $-2 \leq x-1 \leq 2$, 解得 $-1 \leq x \leq 3$.

解② 有 $x \neq 2$.

所以得到函数的定义域为 $[-1, 2) \cup (2, 3]$.

$$(5) y = -\frac{1}{1+3x^2}$$

解:因为分母 $1+3x^2 \geq 1 \neq 0$, 所以得到函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$(6) y = \sqrt{16-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$$

解:解不等式组

$$\begin{cases} 16-x^2 \geq 0 & \text{①} \\ x^2-9 > 0 & \text{②} \end{cases}$$

解① 有 $-4 \leq x \leq 4$.

解② 有 $x > 3$ 或 $x < -3$, 所以得到函数的定义域为 $[-4, -3) \cup (3, 4]$.

二、函数的表示法

函数 $f(x)$ 的具体表达方式有 3 种:解析式法、表格法和图像法.

(1) 以数学表达式来表示函数的方法叫做函数的解析式法,其优点是便于理论推导和计算.

(2) 以表格形式来表示函数的方法叫做函数的表格法,它是把自变量的值与对应的函数值列成表格,如常用的数学用表,其优点在于所求函数值可以通过查表求出.

(3) 以图形形式来表示函数的方法叫做函数的图像法,其优点是直观形象,可以看到函数的变化趋势.

三、分段函数

在用解析式法表示两个变量之间的函数关系时,有的要用两个或多于两个的数学式子来表示,即在定义域不同部分用不同数学式子来表示,称为分段函数.

例题 2 设函数 $f(x) = \begin{cases} x-5, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ 3-2x, & x<0 \end{cases}$, 求函数 $f(x)$ 的定义域.

解:分段函数的定义域只需把各段函数的定义域用并集相连起来即可,所以得到函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

例题 3 设函数 $f(x) = x^2 - 2x - 1$, 求 $f(3)$ 、 $f(u)$ 、 $f(x-1)$ 、 $f[f(3)]$.

解: $f(3) = 3^2 - 2 \times 3 - 1 = 2$

$$f(u) = u^2 - 2u - 1$$

$$f(x-1) = (x-1)^2 - 2(x-1) - 1 = x^2 - 4x + 2$$

$$f[f(3)] = f(2) = 2^2 - 2 \times 2 - 1 = -1$$

例题 4 (1) 设函数 $f(x+1) = x^2 - 3x$, 求 $f[f(x)]$.

解:令 $u = x+1$, 则 $x = u-1$, 即有

$$f(u) = (u-1)^2 - (u-1) = u^2 - 2u + 1 - u + 1 = u^2 - 3u + 2$$

所以 $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f[f(x)] &= f(x^2 - 3x + 2) = (x^2 - 3x + 2)^2 - 5(x^2 - 3x + 2) + 6 \\ &= (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 3) \end{aligned}$$

(2) 设 $f\left(\frac{1}{x} - 2\right) = \frac{x}{2x-1}$, 求 $f(x)$.

$$\text{解: } f\left(\frac{1}{x} - 2\right) = \frac{1}{2 - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{\frac{1}{x} - 2}$$

利用配方法可知 $f(x) = -\frac{1}{x}$.

例题 5 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & -3 \leq x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2+x, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$, 求: (1) 函数的定义域;

(2) $f(-1)$ 、 $f(-\frac{1}{2})$ 、 $f(0)$ 、 $f(1)$.

解: (1) 函数 $f(x)$ 定义域为 $[-3, 3]$.

(2) $f(-1) = 2 \times (-1) = -2$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 2 + 1 = 3$$

例题 6 设函数 $f(e^x) = 3x^2 + x$, 求 $f(x)$.

解: 设 $u = e^x$, 则 $x = \ln u$, 由于 $f(u) = 3\ln^2 u + \ln u$, 所以 $f(x) = 3\ln^2 x + \ln x$.

例题 7 设 $f(x) = x^2 + ax + b$, 其中 a, b 为待定常数, 设 $f(1) = f(4) = 0$, 求:

(1) 函数 $f(x)$; (2) $f(-x)$ 、 $f(\frac{1}{x})$ 与 $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

解: (1) 因为 $f(x) = x^2 + ax + b$ 且 $f(1) = f(4) = 0$, 解方程组 $\begin{cases} 1+a+b=0 \\ 16+4a+b=0 \end{cases}$,

解得

$$\begin{cases} a = -5 \\ b = 4 \end{cases}$$

则函数解析式为 $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

(2) $f(-x) = (-x)^2 - 5(-x) + 4 = x^2 + 5x + 4$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5 \cdot \frac{1}{x} + 4 = \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x} + 4$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= [(x_0 + h)^2 - 5(x_0 + h) + 4] - [x_0^2 - 5x_0 + 4] \\ &= 2x_0h + h^2 - 5h \end{aligned}$$

四、函数的性质

函数的性质有函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

1. 函数的奇偶性

[定义 2] 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是以原点为中心的对称区间 D , 如果对任意的 $x \in D$, 有:

(1) $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图像关于原点对称; 偶函数的图像关于 y 轴对称.

函数奇偶性的判断方法如下:

(1) 根据函数奇偶性定义加以判断.

(2) 根据函数奇偶性的必要条件加以判断.

(3) 根据函数奇偶性的性质加以判断:

奇函数 + 奇函数 $\rightarrow$ 奇函数

奇函数 $\times$ 奇函数 $\rightarrow$ 偶函数

非零奇函数 + 非零偶函数 $\rightarrow$ 非奇非偶函数

奇函数 $\times$ 偶函数 $\rightarrow$ 奇函数

偶函数 + 偶函数 $\rightarrow$ 偶函数

偶函数 $\times$ 偶函数 $\rightarrow$ 偶函数

在以后的学习中经常遇见的奇偶函数如下:

奇函数 $y = x^{2n+1}, y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x, y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}),$

$$y = \log_a \frac{1+x}{1-x}, y = a^x - a^{-x}$$

偶函数 $y = x^{2n}, y = \cos x, y = C, y = a^x + a^{-x}, y = |x|$

例题 8 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = x \tan x + x^2$

解: $f(-x) = (-x) \tan(-x) + (-x)^2 = (-x)(-\tan x) + x^2$
 $= x \tan x + x^2 = f(x)$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

解: $f(-x) = \ln \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \ln \frac{1-x}{1+x} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(3) $f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$

解: $f(-x) = \lg(-x + \sqrt{1+(-x)^2})$
 $= \lg \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\lg(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x)$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(4) $f(x) = 2x^4 + 3\sin^3 x + 2$

解: $f(-x) = 2(-x)^4 + 3[\sin(-x)]^3 + 2 = 2x^4 - 3\sin^3 x + 2$

所以 $f(-x) \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$, 因此 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(5) $f(x) = e^{4x^2} + 3$

解: $f(-x) = e^{4(-x)^2} + 3 = e^{4x^2} + 3 = f(x)$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

$$(6) f(x) = \sin^3 x - \tan x$$

$$\begin{aligned}\text{解: } f(-x) &= \sin^3(-x) - \tan(-x) = -\sin^3 x + \tan x \\ &= -(\sin^3 x - \tan x) = -f(x)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

$$(7) f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{解: } f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

$$(8) f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 8)$$

$$\text{解: } f(-x) = (-x)^{\frac{2}{3}}[(-x)^2 - 8] = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 8) = f(x)$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

2. 函数的单调性

[定义 3] 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对于任意的 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$:

(1) 如果 $f(x_1) < f(x_2)$, 则函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上为增函数;

(2) 如果 $f(x_1) > f(x_2)$, 则函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上为减函数.

单调增函数与单调减函数统称为单调函数.

例如: 函数 $y=x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为单调递增函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上为单调递减函数; 函数 $y=x^3$ 在实数范围内为单调递增函数.

3. 函数的周期性

[定义 4] 设函数 $y=f(x)$ 在实数集上有定义, 如果存在正常数 T , 使得对于任意的 $x \in D$, 有 $f(x+T)=f(x)$ 成立, 则称 $y=f(x)$ 为周期函数, 称 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期.

如果存在最小的正数 T 满足上式, 则称 T 为函数 $y=f(x)$ 的最小正周期.

不难看出: 如果 T 是函数 $f(x)$ 的周期, 当 $k \in \mathbb{Z}$ 时, kT 也是函数 $f(x)$ 的一个周期.

例如: 函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

注意: 一个周期为 T 的周期函数中, 在这函数定义域内每个长度为 T 的区间上, 函数图形有相同的形状.

4. 函数的有界性

[定义 5] 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在 $M > 0$, 使得对于任意的 $x \in I$ 有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上为有界函数.

有界函数图像的特点: 介于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

因此在讨论某函数是否有界时, 必须找到讨论的区间, 同一个函数在不同的区间上的有界情况不同, 为便于以后极限部分的计算, 给出常见的有界函数如下.

① $|\sin x| \leq 1, x \in \mathbf{R};$

② $|\cos x| \leq 1, x \in \mathbf{R};$

③ $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1, x \neq 0;$

④ $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1, x \neq 0;$

⑤ $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1];$

⑥ $0 \leq |\arccos x| \leq \pi, x \in [-1, 1];$

⑦ $|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2}, x \in \mathbf{R};$

⑧ $0 \leq |\operatorname{arccot} x| \leq \pi, x \in \mathbf{R};$

⑨ $\left| \frac{1}{1+x^2} \right| \leq 1, x \in \mathbf{R};$

⑩ $\left| \frac{x^2}{1+x^2} \right| \leq 1, x \in \mathbf{R}.$

五、反函数

[定义 6] 设函数 $y=f(x), x \in D, y \in R_f$, 如果对于任意的 $y \in R_f$, 通过关系式 $y=f(x)$ 在 D 中只有一个 x 值, 使得 $f(x)=y$ 成立, 这样就在数集上定义了一个函数, 这个函数称为 $y=f(x)$ 的反函数, 记做: $x=f^{-1}(y), y \in R_f$.

按习惯的记法: x 记做自变量, y 记做因变量, 函数 $f(x)$ 的反函数记做: $y=f^{-1}(x), x \in R_f$.

反函数的性质: $f^{-1}[f^{-1}(x)]=x, f[f^{-1}(y)]=y$.

在同一个直角坐标系下, 函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称.

[定理 1] (反函数存在定理) 单调函数必有反函数, 其增减性相同.

例题 9 求下列函数的反函数.

(1) $y=-5x-2$

解: $5x=-2-y$, 所以 $x=\frac{1}{5}(-2-y)$, 则反函数为 $y=\frac{1}{5}(-2-x)$.

(2) $y=\frac{1}{2-x}$

解: $y=\frac{1}{2-x}$, 则 $2-x=\frac{1}{y}$, 所以 $x=2-\frac{1}{y}$, 则反函数为 $y=2-\frac{1}{x}$.

(3) $y=2^{3x-1}$

解: $y=2^{3x-1}$, 所以 $3x-1=\log_2 y$, 即 $x=\frac{1}{3}(\log_2 y+1)$, 所以反函数为 $y=\frac{1}{3}(\log_2 x+1)$.

例题 10 设函数 $f(x)=\frac{4x}{x-5}$, 求 $f^{-1}(3)$.

解: 由函数与反函数的关系可知, 原函数定义域为反函数值域, 原函数的值域为反函数的定义域.

$f^{-1}(3)$ 指的是当 $x=3$ 时反函数的函数值, 即所求问题可转化为当 $y=3$ 时,

求 x 为何值的问题.

所以 $3 = \frac{4x}{x-5}$, 则 $x = -15$, 所以 $f^{-1}(3) = -15$.

六、基本初等函数

基本初等函数由常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数六类函数构成.

1. 常量函数 $y=c$ (c 为常数)

属于这一类的函数有无限个, 它们的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$.

2. 幂函数 $y=x^\alpha$ (α 为常数)

属于这一类的函数有无限个, 如图 1-1 所示, 它们的定义域 D 与指数 α 的值有关, 但无论指数 α 的值等于多少, 恒有 $D \supset (0, +\infty)$.

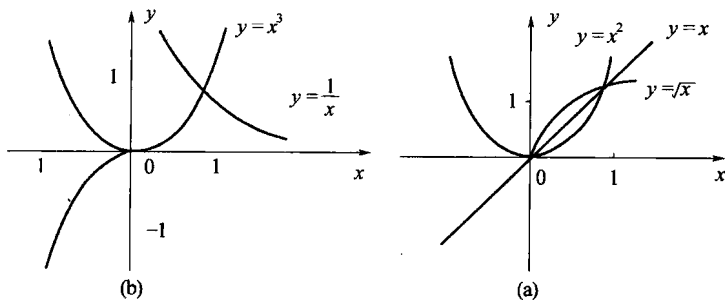


图 1-1

3. 指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)

属于这一类的函数有无限个, 如图 1-2 所示, 它们的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$.

4. 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$)

属于这一类的函数有无限个, 如图 1-3 所示, 它们的定义域为 $x \in (0, +\infty)$.

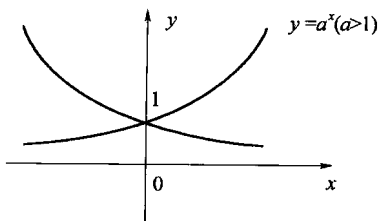


图 1-2

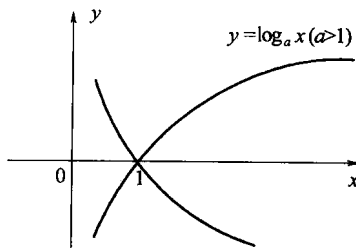


图 1-3