

管理学学术文库·管理科学与工程类

经济管理中软计算的 理论与方法

..... 诸克军 於世为 郭海湘 贺 勇 著



Theory and Methods of Soft Computing
in Economics and Management

华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

管理学学术文库·管理科学与工程类

本书系国家自然科学基金项目(70573101)和教育部人文社科基金项目(06JA880668)资助成果

经济管理中软计算的理论与方法

Theory and Methods of Soft Computing
in Economics and Management

华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

经济管理中软计算的理论与方法/诸克军 於世为 郭海湘 贺勇 著.
—武汉:华中科技大学出版社,2009年7月
ISBN 978-7-5609-5364-9

I. 经… II. ①诸… ②於… ③郭… ④贺… III. 电子计算机-计算方法-应用-经济管理-研究 IV. F2-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 083493 号

经济管理中软计算的理论与方法 诸克军 於世为 郭海湘 贺勇 著

策划编辑:周小方
责任编辑:王汉江
责任校对:刘 竣

封面设计:潘 群
责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录排:武汉市星明图文制作有限公司

印刷:湖北新华印务有限公司

开本:787mm×960mm 1/16

印张:16.25 插页:1

字数:236 000

版次:2009年7月第1版

印次:2009年7月第1次印刷

ISBN 978-7-5609-5364-9/F·474

定价:35.00元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前言

在社会经济系统中,许多问题需要建立数学模型来进行定量分析。由于问题本身的复杂性和多样性,直接建立系统的数学模型是非常困难的,大多数时候是不可能的。模仿人的智能——大脑,它本身具有一定的结构,这种结构一般而言都是相同的、固定的。具有固定结构的大脑能够应付千变万化的情况,有的甚至能快速准确地处理相当复杂的问题。软计算(soft computing, SC)就是一种人工智能技术,在处理实际问题时不需要建立实际问题的数学模型,而是依赖它们本身相对确定的结构所形成的功能来处理各种各样的计算问题的。

SC 源于控制科学与工程,是一种创建计算智能系统的新颖的方法,它不是一个单独的方法,而是一类方法的集合,在这个集合中主要的成员有模糊逻辑(FL)、人工神经网络(ANN)、遗传算法(GA)等。笔者的目的是将这些软计算方法引入社会经济的不确定及不精确环境中,在解决实际问题时,几种软计算方法协同地综合集成,形成优势互补,共同实行复杂系统的模拟与仿真。

本书以 FL 的理论与方法为主线,重点研究 ANN 如何用来确定模糊系统的参数以及遗传算法用来帮助神经网络克服陷入局部极小值的弱点,集成这三种技术形成智能系统。同时,试图将作者近五年所完成的两个国家自然科学基金项目和教育部人文社科基金项目部分成果进行整理和介绍。具体内容说明如下。

第一章介绍模糊集合和经济管理中的模糊数学方法,使初学者具有学习模糊系统方法的基础,同时也介绍和研究了一些简单的软计算技术。

第二章到第四章主要学习模糊系统的基本概念,第五章介绍并研究模糊系统作为映射的基本理论。

第六章、第七章介绍几种典型的神经网络和遗传算法。第八章主要研究几种方法的集成问题。关于这方面的研究才刚刚开始,本书只是起到抛砖引玉的作用。

第九章至第十二章是课题组近五年来从事国家自然科学基金项目研究的成果,围绕这些成果,课题组在国内外重要刊物上共发表论文 58 篇,其中被 SCI 检索收录 3 篇, EI 检索收录 6 篇,国家基金委成果报告期刊 9 篇,截至 2007 年 12

月被国内外引用共 121 次。有些成果正在完善和改进过程中。

本书是针对研究生编写的,理论尽可能完整,方法基本上都进行了操作方面的研究。可以肯定的是,只要具有大学工科数学基础的人都可以读懂全部内容。希望本书能为经济管理类的研究生,包括博士研究生提供一本智能计算方面的参考书。限于作者的学识和水平,内容方面会存在许多不如人意的地方,书中的错误在所难免,恳请读者赐教,斧正,并与作者沟通交流。

作者邮箱:zhukejun@cug.edu.cn

作者

2009 年 3 月

目 录

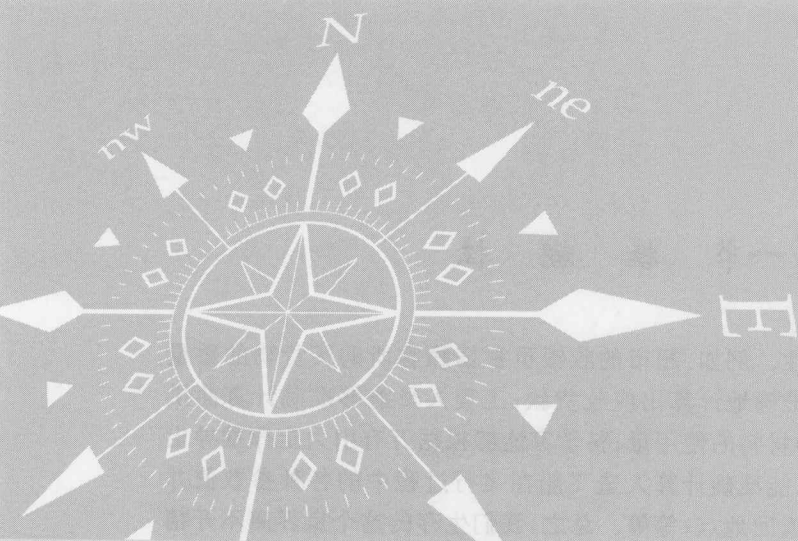
第一章 模糊集合	(1)
第一节 模糊性	(2)
第二节 模糊集合的定义	(3)
一、普通集合及其运算	(3)
二、模糊集的定义及其表示法	(6)
三、模糊集合的运算	(8)
第三节 λ 截集与分解定理	(12)
一、 λ 截集	(12)
二、分解定理	(14)
第四节 隶属函数的确定	(16)
一、模糊统计	(16)
二、实数域 $\mathbf{R}$ 上的常用分布	(18)
第五节 模糊集运算的拓广	(21)
一、模糊并——s-范数	(21)
二、模糊交——t-范数	(22)
三、模糊补	(23)
四、平均算子	(24)
第二章 模糊关系	(25)
第一节 经典关系与模糊关系	(26)
一、关系	(26)
二、模糊集合的投影与柱状扩展	(27)
第二节 模糊关系的合成与扩展原理	(29)
一、模糊关系合成	(29)
二、扩展原理	(31)
三、模糊等价关系	(31)
第三节 模糊聚类分析	(37)
第四节 应用实例	(42)

第三章 模糊规则	(53)
第一节 语言变量	(54)
第二节 模糊 if-then 规则	(56)
一、规则形式	(56)
二、规则形式的理解	(57)
第三节 模糊 if-then 规则的运算	(57)
第四节 规则集合的数学性质	(61)
第四章 模糊推理	(63)
第一节 经典推理的拓广	(64)
第二节 模糊推理合成规则	(65)
一、广义取式推理	(65)
二、广义拒式推理	(66)
三、广义假言推理	(66)
四、推理过程	(66)
第三节 多输入多规则模糊推理机	(69)
一、组合推理与独立推理	(70)
二、几种常用的推理机	(71)
三、多规则推理过程	(73)
第四节 模糊化器与解模糊化器	(75)
一、模糊化器	(75)
二、解模糊化器	(76)
三、中心平均解模糊化器	(77)
第五章 模糊系统	(79)
第一节 模糊系统	(80)
第二节 模糊系统的万能逼近性质	(84)
第三节 根据输入-输出数据设计模糊系统	(89)
一、查表法设计模糊系统	(89)
二、梯度下降法设计模糊系统	(94)
三、聚类法设计模糊系统	(99)
第六章 常见神经网络	(103)
第一节 BP 神经网络	(104)
一、概述	(104)

二、BP 神经网络算法	(105)
三、BP 网络的一些理论问题	(107)
四、对 BP 神经网络模型的改进	(108)
第二节 径向基函数网络	(110)
一、概述	(110)
二、RBF 网络的非线性特征	(111)
三、基函数的确定	(113)
四、RBF 网络的学习算法	(114)
五、RBF 网络研究的新发展	(115)
第三节 自组织特征映射网络	(116)
一、自组织特征映射网络概述	(116)
二、两种联想学习规则	(116)
三、SOM 网络的结构与特征	(119)
四、SOM 网络计算	(120)
第七章 遗传算法介绍	(123)
第一节 适应度的构造问题	(125)
一、适应度函数设计的原则	(126)
二、适应度函数与目标函数的关系	(126)
三、常见适应度函数的尺度变换方法	(127)
第二节 遗传算法的编码方式	(127)
一、二进制编码	(127)
二、实数编码	(129)
三、符号编码	(129)
四、Gray 编码	(130)
第三节 遗传算法的基本操作	(130)
一、二进制编码方式下的遗传操作	(131)
二、实数编码方式下的遗传操作	(138)
三、十进制编码方式下的遗传操作	(140)
四、灰色编码方式下的遗传操作	(141)
五、符号编码方式下的遗传操作	(141)
第四节 遗传算法中有关的几个问题	(146)
第五节 遗传算法的收敛性	(147)

第八章 软计算集成	(149)
第一节 GA-ANN	(150)
一、GA-BP-APARTING 算法	(151)
二、GA-BP-NESTING 算法	(152)
第二节 模糊-C 划分	(153)
一、模糊-C 划分的意义	(153)
二、算法及其收敛性	(154)
第三节 模糊系统与神经网络	(156)
第四节 两种模糊神经网络结构	(160)
一、结论为实数的模糊神经网络(FNN1)结构及算法	(161)
二、结论为线性的模糊神经网络(FNN2)结构及算法	(164)
三、一种动态全参数自适应 BP 神经网络	(168)
第九章 教育经济贡献率	(175)
第一节 人力资本的计算	(176)
一、潜在人力资本	(176)
二、中国各地区潜在人力资本	(176)
三、实际人力资本	(178)
四、中国各地区实际人力资本	(179)
第二节 按科技进步对目标系统的软分类	(180)
一、指标和样本选取	(180)
二、分类结果及其分析	(181)
第三节 模糊系统的实现	(183)
一、潜在人力资本与实际人力资本的模糊映射(FANN1).....	(183)
二、生产要素与经济增长的模糊映射	(184)
三、中国及各地区教育对经济增长贡献率	(186)
第四节 湖北省及各地区教育对经济的贡献率	(187)
一、按科技进步水平对湖北各市、州的软分类.....	(189)
二、潜在人力资本到实际人力资本的贡献率	(190)
三、实际人力资本到经济增长的贡献率	(190)
四、湖北省及各市、州教育对经济的贡献率.....	(191)
第十章 金属矿山组合品位优化	(193)
第一节 品位优化数学模型	(194)

第二节 品位优化软计算模型·····	(195)
一、截止品位 a_j 与损失率 ϕ 的数据对关系·····	(195)
二、尾矿量 Q_w 的关系 $Q_w = Q_w(a_i, q_i, a_j, a_r)$ ·····	(197)
三、采选总成本 C 的关系 $C = C(a_i, q_i, a_j, a_r)$ ·····	(197)
四、算法集成·····	(198)
第三节 实证研究·····	(199)
一、损失率计算模型 $\phi = \phi(a_j)$ ·····	(199)
二、尾矿量计算模型 $Q_w = Q_w(a_i, q_i, a_j, a_r)$ ·····	(200)
三、成本计算模型 $C = C(a_i, q_i, a_j, a_r)$ ·····	(203)
四、遗传-神经优化集成·····	(204)
第十一章 石油勘探有利性综合评价·····	(205)
第一节 区带勘探有利性评价·····	(206)
一、三角模糊数·····	(206)
二、Fuzzy AHP 方法·····	(208)
三、案例·····	(209)
第二节 盆地勘探有利性·····	(213)
一、预测勘探有利性的 ANN 结构·····	(213)
二、指标属性值的量化处理·····	(213)
三、勘探有利性评价 ANN 的实现算法·····	(215)
第十二章 石油勘探信息管理中的软计算·····	(219)
第一节 人工神经网络在油层识别中的应用·····	(220)
一、运用 BP 网络预测孔、渗、饱·····	(220)
二、运用 SOM 网络进行油层识别·····	(227)
三、神经网络油层识别效果分析·····	(234)
第二节 人工神经网络在储层追踪中的应用·····	(236)
一、学习样本及样本特征参数提取·····	(237)
二、网络训练·····	(237)
三、网络追踪效果分析·····	(238)
参考文献·····	(243)



第一章 模糊集合

模糊集合 Fuzzy Sets 是美国学者 L.A.Zadeh 于 1965 年建立的一种研究和处理模糊性现象的数学方法。所谓模糊性，是事物性态和类属的亦此亦彼性，是中介事物在互相联系和相互过渡中呈现的中介过渡性，它表征了事物两极对立的不充分性和事物自身同一的相对性。此方法能较好地处理模糊数学以往的经典数学方法不能很好、合理地解决模糊性现象的量化处理问题。

第一节 模 糊 性

现实世界充满了精确性。例如：超市的收银员根据顾客所购买货物的数量和单价并考虑各种折扣后准确地计算出应收货款；工程人员能够准确计算曲拱形桥的长度，从而计算各种材料的使用量；科学家能够根据万有引力定律推导出行星围绕太阳运行的轨道，能准确计算人造飞船在飞行过程中的各种参数值并确定它的最后返回时间和返回地点；等等。总之，我们生存的这个世界离不开精确计算，人们利用精确计算创造了一个又一个惊人的奇迹。

然而，现实世界是复杂的。表现在量方面的特点是要不仅具有精确性，而且应具有模糊性。例如：我们并没有见到哪一个高级厨师是依靠天平或者其他器皿来取食品和调料，做出各种美味佳肴的；当我们在驾驶汽车时方向盘上没有任何刻度，但却能凭借自己的直觉到达目的地，也不需要依靠任何精确的度量就可以使汽车停在指定的位置。再如：一个房间内有若干人，要在他们中间寻找一个“年老的高个子”是非常容易的，并不需要去逐个统计他们的年龄，度量每个人的身高。事实上，还可以举出许许多多模糊性的量，例如冷与热，好与坏，黑与白，轻与重，高与低，开放与封闭，质量好与质量差，满意与不满意，经济效益好与经济效益差，等等。

人类在认识世界的过程中，把感觉到的事物的共同点抽象出来加以概括，形成概念。一个概念有它的内涵和外延，内涵是指概念所反映的事物本质属性的总和，也就是概念的内容。例如：三角形的内涵是指具有三条边、三个角的封闭图形；其外延是指所有三角形，包括直角三角形、正三角形、任意三角形。所谓模糊概念就是指没有明确外延的概念，换句话说，模糊概念的外延具有不确定性或者说它的外延是不清楚的。例如：“漂亮”这一概念，它的外延是不清晰的，即哪个人或者哪些景观是漂亮的，很难说清楚，这就是一个模糊概念。当我们判断时，经常会出现很难肯定或否定的回答，也就是说在“漂亮”与“难看”之间没有一条确定的边界。这种概念的外延是不确定的，这就是概念的模糊性。

应该指出的是，人们在认识模糊性时是有主观性的，也就是说对模糊事物，每个人心中的界限是不一样的。承认这种主观性是认识模糊性的一个特点。例如：让 100 个人说出“青年人”的年龄范围，他们的答案不会完全相同，但是当我们用统计方法进行分析时，“青年人”的年龄界限又具有一定的规律性。

随着科学的深化，研究对象会越来越复杂，而复杂的事物是难以精确化的。人们经过长期的实践总结出一条“不相容性原理”，即当一个系统复杂性增大时，

我们对它的精确化的能力将减弱,当复杂性达到一定限度时,复杂性和精确性将互相排斥。因此可以说,复杂性伴随着模糊性,而模糊性则渗透于复杂性。

模糊性与随机性都属于不确定性,但是这两种不确定性是有区别的。事实上,随机性造成的不确定性是由于该事物发生的条件不充分,而使得条件与结果之间不能出现确定的因果关系,以至一些偶然因素使实验结果产生了不确定性,但事物本身却具有明确的内涵和外延。从逻辑上讲,随机性是基于随机实验,是对因果关系(因果率)的否定。而事物的模糊性则是指要处理的事物的概念本身是模糊的,即一个对象是否符合这个概念难以确定,是由于概念外延的模糊性而带来的不确定性。从逻辑上讲,模糊性是基于人们的主观认识,是对非此及彼关系(排中率)的否定。

从集合论的观点来看,普通集合应具有这样的性质,即论域中的任意元素或属于该集合,或不属于该集合,二者必居其一,且只居其一。论域中的元素具有“非此及彼”性。例如:“老人”集,不是一个普通集合,因为对于一个具体的人,我们没有一个像普通集那样鲜明的判断标准。诚然,一岁的娃娃不属于老人集,百岁的老翁属于老人集,但中间的那一部分人,哪些人属于老人集,哪些人不属于老人集,老人集的边界线是不分明的,这些元素存在“亦彼亦此”性。这类集合称为模糊集合(fuzzy sets)。再如,我们要从一个苹果和橘子混装的箩筐中把它们两者分开,使苹果和橘子各装于一个小筐。这种划分便称为普通集合的划分,或者称为硬划分。但是如果从仅装有橘子的箩筐中,要求按照橘子的品质的好、中、差分成三个小筐,这种划分便称为模糊集合的划分,或者软划分。普通集合是经典数学的基础,模糊集合引出的是模糊数学。按照这种方式,应该说所有的数学分支都有可能被“模糊化”而产生相应的模糊分支,事实上现在已经诞生了模糊算术、模糊分析、模糊测度论、模糊拓扑学等分支。模糊数学不是有意放弃数学的严密性去追求模糊性,恰恰相反,是把严密的数学方法引入模糊现象的禁区,让数学和计算机具有人脑对复杂系统进行识别和判断的特点,形成一种新的,更加灵活、简捷的处理手段。

第二节 模糊集合的定义

一、普通集合及其运算

1. 论域

在讨论一个具体问题时,总是要指出所讨论的问题的一个范围,在这个范围内被讨论对象的全体称为该问题的论域。用大写字母 U, V 等来表示。对于给定的论域 U , 其中一部分元素(包括任意一个元素)称为 U 的一个集合,常用 A, B, C 表示。

对 U 中的一个集合 A 和 U 中的任一元素 x , 要么 x 在 A 中, 要么 x 不在 A 中, 二者必居其一, 且只居其一, 这是普通集合的重要特征。

2. 集合的表示

集合的元素为有限时, 可以用列举的方法来表示这个集合。例如:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

集合的元素为无限时, 可以用描述的方法来表示, 例如:

$$A = \{x | P(x)\}, \quad (1-1)$$

其中, $P(x)$ 是 x 应该满足的条件。显然也可以用描述法来表示有限集合。例如:

$$A = \{x | x \text{ 是 } 0 \text{ 到 } 100 \text{ 之间的自然数}\},$$

实际上, 此时 $A = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ 是由 99 个元素组成的有限集合。

3. 集合的相等与不等

设 A, B 是论域 U 中的两个模糊集合, 如果 $\forall x \in A, \exists x \in B$ (即 A 的所有元素都被 B 包含), 则称 B 包含 A , 记为 $B \supseteq A$, 此时 A 称为 B 的子集。如果 $\forall B \supseteq A, \exists x \in B$ 而 $x \notin A$, 则称 A 为 B 的真子集, 记为 $B \supset A$ 。换言之, 所谓集合 A 是集合 B 的真子集, 是指集合 A 中的元素每一个也都属于 B , 而 B 中的元素至少有一个不属于 A 。

如果 $B \supseteq A$ 与 $A \supseteq B$ 同时成立, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记为 $A = B$ 。空集 $\emptyset$ 是 U 中任何集合的子集。

论域 U 的一切子集所构成的集合, 称为 U 的幂集, 记为 $P(U)$ 。

【例 1-1】 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 U 的一切子集所构成的集合

$$P(U) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

4. 集合的运算

(1) 设 A, B 是 U 中的两个集合, 如果 $x \in A$ 或 $x \in B$, 则 x 属于 A, B 的并集, 记为 $x \in A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

(2) 设 A, B 是 U 中的两个集合, 如果 $x \in A$ 且 $x \in B$, 则 x 属于 A, B 的交集, 记为 $x \in A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

(3) 设 A 为 U 上的集合, 如果 $x \in U$ 但 $x \notin A$, 则 x 属于 A 的余集, 记为 $x \in \complement_U A$, 即

$$\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 但 } x \notin A\}.$$

5. 集合的并、交、余运算满足以下运算定律

(1) 幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A$ 。

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 。

(3) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ 。

(4) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

(5) 两极律 $A \cup \emptyset = A, A \cap U = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup U = U$ 。

(6) 吸收律 $(A \cap B) \cup B = B, (A \cup B) \cap B = B$ 。

(7) 互补律 $A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \emptyset$ 。

(8) 德·摩根律 $\bar{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}, \bar{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ 。

6. 映射(mapping)

【定义 1-1】 如果对于任意的 $x \in A$ 有唯一一个 $y \in B$ 与之对应, 则称其对应是一个由 A 到 B 的映射, 记为

$$f: A \rightarrow B, \quad x \rightarrow f(x). \quad (1-2)$$

对任意 $x \in A$ 映射后变成 $y \in B$, 记为 $y = f(x)$, f 表示 A 到 B 的一种对应规则。 A 称为映射 f 的定义域, 而集合 $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ 称为映射 f 的值域。显然, $f(A) \subseteq B$ 。当 $f(A) = B$ 时, 称 f 为 A 到 B 上全射或满射; 当 $f(A) \subset B$ 时, 称 f 为 A 到 B 内的非全映射; 当 x_1, x_2 且 $x_1 \neq x_2$, 能推出 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 时, 称 f 为单射; 同时满足单射和满射的 f 为一一映射。

7. 特征函数(eigenfunction)

对于普通集合, 给定论域 U 中的元素 x 和集合 A , 只有 $x \in A$ 或者 $x \notin A$ 两种情况成立, 因此, 论域 U 中的集合 A , 可以用以 U 到二元集合 $\{0, 1\}$ 的映射来描述。

【定义 1-2】 给定论域 U , 对于任意的 $A \in P(U)$ 由集合 A 可确定一个从 U 到 $\{0, 1\}$ 的映射:

$$\mu_A: U \rightarrow \{0, 1\}, \quad x \rightarrow \mu_A(x),$$

其中

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \quad (1-3)$$

映射 μ_A 称为集合 A 的特征函数。

任意集合 $A \in P(U)$ 把论域的元素分成了两部分, 一部分属于 A , 另一部分不属于 A , 我们建立一种对应规则 μ_A , 对于属于 A 的元素 μ_A 对应 1, 对于不属于 A 的元素它对应于 0。换言之, U 中集合 A 的特征函数 μ_A 是由 A 唯一确定的, 它在 x 处的值 $\mu_A(x)$ 称为 x 对 A 的隶属度。当 $x \in A$ 时, 隶属度为 1, 表示 x 绝对属于 A ; 当 $x \notin A$ 时, 隶属度为 0, 表示 x 绝对地不属于 A 。

反之, 若 μ 是 U 到 $\{0, 1\}$ 的任何一个映射, 则由 μ 也可以唯一确定 U 上的一个集合:

$$A = \{x \in U | \mu(x) = 1\}$$

它恰恰是以 μ 为特征函数: $\mu = \mu_A$ 。

集合与特征函数可以互相唯一确定,集合是直观概念,而特征函数则是它的数学表现。

集合与特征函数在运算上有下列关系:

- ① $A \subset B \iff \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$;
- ② $A = B \iff \mu_A(x) = \mu_B(x)$;
- ③ $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in U$;
- ④ $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in U$;
- ⑤ $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x), x \in U$;
- ⑥ $\mu_{\emptyset}(x) = 0, x \in U$;
- ⑦ $\mu_U(x) = 1, x \in U$;
- ⑧ $\mu_{\bigcup_{i \in T} A_i}(x) = \max\{\mu_{A_i}(x) | i \in T\}$, 其中 T 表示 A 的下标集合;
- ⑨ $\mu_{\bigcap_{i \in T} A_i}(x) = \min\{\mu_{A_i}(x) | i \in T\}$, 其中 T 表示 A 的下标集合。

二、模糊集的定义及其表示法

普通集合表现了概念的“非此及彼”的现象,但在现实世界中,许多概念并非都具有“非此即彼”性,而是存在“亦此亦彼”性。例如,当我们谈论某个企业“经济效益好”这个概念时,不能认为企业的经济效益不是好就一定是差。事实上许多企业的经济效益处于“好”与“差”之间的状态。这也就是经常说的“比较好”、“一般”、“比较差”,等等。这种概念是很难用普通集合去刻画的。因为它们是一些模糊概念。1965年,美国控制论专家 L. A. Zadeh 提出了模糊集的定义,它可以表现模糊概念。

【定义 1-3】 给定论域 U , 模糊集合 A (为了书写简便就记为 A) 是指对于任意的 $x \in U$ 都能确定一个数 $\mu_A(x) \in [0, 1]$, 表示 x 属于 A 的程度, 这意味着一个映射:

$$\begin{aligned} \mu_A: U &\rightarrow [0, 1], \\ x &\mapsto \mu_A(x). \end{aligned} \quad (1-4)$$

这个映射称为 A 的隶属度函数 (membership function, MF)。数 $\mu_A(x)$ 称为 U 中的元素 x 对模糊集 A 的隶属度 (membership degree, MD)。

容易理解, $\mu_A(x)$ 越接近于 1, 表示 x 隶属于 A 的程度就越大。显然, 模糊集 A 是 U 的一个没有边界的子集, 全由隶属度函数来刻画。特别地, 当 μ_A 取闭区间 $[0, 1]$ 的两个端点, 即为 $\{0, 1\}$ 两个值时, A 便成为一个普通集合, 此时隶属度函数就是定义 1-2 中的特征函数。由此可见, 普通集合是模糊集合的特殊情况, 而模糊集合则是普通集合的延拓。

常用的模糊集合有以下三种表示法。

1. Zadeh 表示法

Zadeh 提出的表示法是,当 U 为有限论域 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 时, U 上的模糊集合可表示为

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i. \quad (1-5)$$

当 A 为无限集时,记为

$$A = \int_x \mu_A(x)/x. \quad (1-6)$$

应该指出的是,式中的积分号并无通常积分的含义,而是表示各个元素与其隶属度关系的一个形象的写法。

【例 1-2】某电冰箱厂对本厂生产的四种型号的电冰箱 x_1, x_2, x_3, x_4 的“受欢迎程度”进行调查,现随机抽查 100 名顾客,统计顾客投票的结果,再用 100 去除折合成 $[0, 1]$ 区间内的数,作为各种型号电冰箱受欢迎的程度。

x_1 ——受欢迎程度为 0.85; x_2 ——受欢迎程度为 0.5;

x_3 ——受欢迎程度为 0.25; x_4 ——受欢迎程度为 0.9。

现令 A = “受欢迎的程度”,则

$$\mu_A(x_1) = 0.85, \quad \mu_A(x_2) = 0.5, \quad \mu_A(x_3) = 0.25, \quad \mu_A(x_4) = 0.9,$$

$$A = \frac{0.85}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.25}{x_3} + \frac{0.9}{x_4}.$$

2. 隶属度函数解析式的直接表示法

当论域 U 为实数集 $\mathbf{R}$ 上的某区间时,直接给出模糊集隶属度函数的解析式,是一种十分方便的表达形式。

【例 1-3】给出人的年龄论域 $U = [0, 100]$ 上的“年老”模糊集 O 、“年轻”模糊集 Y 的隶属度函数如下:

$$\mu_O(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 50, \\ \left[1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50 \leq x \leq 100; \end{cases}$$

$$\mu_Y(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 25, \\ \left[1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25 < x \leq 100. \end{cases}$$

3. 模糊集的序偶表示法

模糊集 A 可以用序偶表示成

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in U\}.$$