普通高等教育"十一五"规划教材

# 概率论与数理统计

王炳章 吕 文 主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

# 概率论与数理统计

王炳章　吕　文　主编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法. 主要包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、样本和抽样分布、参数估计、假设检验及线性回归分析等内容.

本书可作为高等学校非数学类理工科各专业及经济管理类各专业的概率论与数理统计课程的教材，也可作为相关专业教师、工程技术人员或具备微积分基础的读者学习概率论与数理统计的参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/王炳章，吕文主编. —北京：科学出版社，2009
普通高等教育"十一五"规划教材
ISBN 978-7-03-024921-0

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①王…②吕… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 111143 号

责任编辑：王 静 王国华 / 责任校对：鲁 素
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京智力达印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 7 月第一次印刷 印张：13 1/2
印数：1—4 000 字数：261 000

**定价：22.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

在高等学校非数学类理工科专业及经济管理类专业的课程体系中，概率论与数理统计一直是具有重要地位的数学基础课.进入21世纪以来，我国的高等教育有了突飞猛进的发展，高等学校的教材建设工作也取得了令人瞩目的成就.随着计算机技术的广泛应用以及数学软件的普及，应用数学的理论与方法在其他学科和其他领域的应用日益广泛并日臻成熟起来.这些无疑对高等学校的数学基础课程的教材建设提出了新的要求.在这种形势下，作者以教育部数学与统计学教学指导委员会最新修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》与《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》中对概率论与数理统计部分所做的规定为指导，结合作者多年来的教学实践经验，编写了这本概率论与数理统计课程的教材.在本书编写过程中，作者力求使全书具有清晰易懂的语言表述和轮廓鲜明的内容结构，以增强本书的可读性.同时始终遵循在系统地介绍基本概念和清楚地阐述基本理论的基础上，强调基本方法的训练和重视培养学生的基本能力这样的原则来安排和统筹概率论与数理统计的各部分内容.在各章的例题及课后习题的选择上，安排了一定数量的具有应用意义的题目，这使全书不仅具有系统规范的教学内容和相对严密的理论体系，也较好地体现了概率统计理论的应用性强的特点.

本书共分9章，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、样本和抽样分布、参数估计、假设检验及线性回归分析等内容，其中第1～5章和第9章由王炳章编写，第6～8章由吕文编写，全书由王炳章负责统稿.

讲授全书约需60学时，这对于经济管理类本科专业是必需的.对于工科类本科专业，若只讲授《工科类本科数学基础课程教学基本要求》规定的前8章内容，则只需54学时.但如果学时充分，作者建议讲授全书.因为第9章的线性回归分析是非常有实用价值的内容，不仅经济管理类专业学生的一些专业课程(如计量经济学)要以回归分析理论为基础，理工类专业的学生在毕业后的实际工作中或考取研究生后继续深造时有时也会用到这部分知识.

本书可作为高等学校非数学类理工科各专业及经济管理类各专业的概率论与数理统计课程的教材，也可作为相关专业教师、工程技术人员或具备微积分基础的读者学习概率论与数理统计的参考书.

由于编者水平有限，加之时间较为仓促，书中难免存在不妥甚至错误之处，诚恳希望各位读者批评指正.

编　者

2009年3月1日

# 目　　录

# 第1章 随机事件及其概率

**概率论**是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科.

在自然界和人类社会中，人们会遇到各种各样、形形色色的现象. 这些现象大体上可以分为两类. 其中一类是可以预言其结果的，即在保持条件不变的情况下，重复试验或观察，其结果总是确定不变的. 这类现象称为**决定性现象**. 例如，在标准大气压下，纯水加热至100℃必然开始汽化；又如，在不受外力作用下，物体将保持原有的运动状态(匀速直线运动或静止)；再如，在空中抛掷一枚硬币，硬币必将落至地面等都是决定性现象. 决定性现象也称为必然现象. 另一类现象是不能预言其结果的，即在保持条件不变的情况下，重复试验或观察会得到不同的结果. 换句话说，就个别的试验或观察而言，它时而出现这种结果，时而出现那种结果，呈现出一种偶然性. 这种现象称为**随机现象**或偶然现象. 例如，掷一枚硬币，落地后是出现正面还是反面，试验前是无法预知的；又如，用同一把尺子多次测量一个物体的长度，所得结果彼此总是略有差异；同样地，在射击方面，同一门炮向同一目标发射多发同种炮弹，弹落点也不尽相同；再如，从某一生产线上用同一种工艺生产出来的灯泡的寿命也有差异；等等. 随机现象比比皆是，随处可见. 然而概率论以外的数学学科或自然科学都只研究决定性现象的规律，在概率论出现之前，几乎从未涉足随机现象领域. 概率论即是为研究随机现象的规律而诞生的一门数学学科.

## 1.1 随机试验和样本空间

尽管随机现象在一次试验或观察中其结果不可把握，呈现出一种偶然性(或随机性)，但在多次重复试验或观察时，它却呈现出明显的规律性. 为了研究随机现象的规律需要进行试验. 概率论中通常讨论具有以下特点的试验：

(1) **可重复**：试验可以在相同的条件下多次重复进行.

(2) **多结果**：试验有多个可能结果，这些结果试验前是已知的.

(3) **随机性**：每次试验将会出现哪个结果试验前是无法预知的.

具备上述三个特点的试验称为**随机试验**，简称为**试验**.

下面是试验的一些例子.

$E_1$——掷一颗骰子，观察落地时出现的点数；

$E_2$——掷两枚硬币，观察正、反面出现的情况；

$E_3$——记录一段时间内，某部电话收到的呼叫次数；

$E_4$——从一批灯管中任取一只，观察无故障运行时间；

$E_5$——同一门炮向同一目标进行多次射击，观察弹落点；

$E_6$——在南美洲地区，观察地震发生时的震源.

这些试验都具有上述(1)～(3)的性质，所以都是随机试验.

如上所述，随机试验有多个可能的结果. 我们称随机试验 $E$ 的所有可能结果组成的集合为 $E$ 的**样本空间**(或**基本事件空间**)，记为 $\Omega$. 称样本空间中的每个元素(即试验 $E$ 的每个可能结果)为 $E$ 的**样本点**，用 $\omega$ 表示. 即 $\Omega=\{\omega|\omega$ 是随机试验 $E$ 的样本点$\}$. 而称由单个样本点组成的集合为**基本事件**.

**例 1.1**　写出随机试验 $E_i(i=1,2,\cdots,6)$的样本空间.

**解**　$E_1$ 有 6 个样本点，即出现 1 点，出现 2 点，……出现 6 点. 故 $E_1$ 的样本空间为 $\Omega_1'=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$，其中 $\omega_i$ 表示出现 $i$ 点. 或简单地表示成 $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$.

同样，$E_2$ 的样本空间为 $\Omega_2=\{(T,T),(T,F),(F,T),(F,F)\}$，其中$(T,F)$表示第一枚硬币出现正面，第二枚硬币出现反面，等等.

$E_3$ 的样本空间为 $\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$.

$E_4$ 的样本空间为 $\Omega_4=\{x|x\geqslant 0\}$，其中 $x$ 为任一灯管的无故障运行时间.

在 $E_5$ 中，选定平面直角坐标系，用$(x,y)$表示弹落点的坐标，从而 $E_5$ 的样本空间为 $\Omega_5=\{(x,y)|-\infty<x,y<+\infty\}$.

对于 $E_6$，用和 $E_5$ 同样的方法，可以确定 $E_6$ 的样本空间为

$$\Omega_6=\{(h,\varphi,\theta)\mid h\geqslant 0,\ |\varphi|\leqslant 90,\ |\theta|\leqslant 180\},$$

其中 $h$ 为震源的深度，$\varphi$ 为震源的纬度，$\theta$ 为震源的经度.

在研究随机试验时，不仅关心由试验的单个样本点所表示的结果(即每个基本事件)是否会发生，也常常关心由多个样本点组成的集合所表示的结果是否会发生. 这种结果称为**复合事件**. 无论是基本事件还是复合事件，它们在试验中是否会发生，都带有随机性，所以都称为随机事件，一般用 $A,B,C,\cdots$表示.

**例 1.2**　在随机试验 $E_1$ 中，$A=$“出现 2 点”，$B=$“出现 2 点或 5 点”，$C=$“出现奇数点”，$D=$“出现偶数点”，$E=$“点数$<4$”，$F=$“点数$\leqslant 3$ ”，$G=$“点数$>6$”，$H=$“点数$<7$”，等都是随机事件，因为它们都可表示为某些样本点的集合. 例如，$D=\{2,4,6\}$，$F=\{1,2,3\}$，等等. 随机事件是概率论中最基本的概念.

在任何随机试验中都有两个特殊的事件值得注意，一个是每次试验都会发生的事件，称为**必然事件**，如上面例 1.2 中的事件 $H$. 另一个是每次试验都不会发生的事件，称为**不可能事件**，如上面例子中的事件 $G$. 必然事件与不可能事件可以说不是随机事件，但我们仍然把它们作为随机事件，这将会给问题的讨论带来方便之处.

由于任何一个事件或是基本事件，或是由若干个基本事件组成的复合事件，因此，随机试验的任何一个事件都是样本空间 $\Omega$ 的子集. 而称某事件发生，当且仅当该事件所包含的某个样本点在试验中出现. 必然事件由于包含了所有的样本点，所以必然事件等同于样本空间. 因此，必然事件用与样本空间相同的符号 $\Omega$ 表示. 不可能事件因为不含任何样本点，故采用和空集相同的符号 $\varnothing$ 表示. 由于随机试验的任何事件都可用样本空间的子集描述，故在今后的学习中，明确随机试验的样本空间是非常重要的，它是正确解决概率问题的前提.

## 1.2 事件的运算和关系

如上所述，一个随机试验 $E$ 联系着多个随机事件，这些随机事件都是试验 $E$ 的样本空间的子集. 因此，像集合之间的关系和运算一样，我们也可以讨论事件之间的关系和运算，讨论如何用简单事件表示复杂事件，为研究复杂事件的规律性作准备.

### 1.2.1 事件的运算

设 $E$ 是随机试验，$\Omega$ 是 $E$ 的样本空间，$A,B,C$ 及 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是 $E$ 的随机事件.

1. 事件的和

事件"$A$ 与 $B$ 至少有一个发生"称为事件 $A$ 与 $B$ 的和，记为 $A\cup B$. 显然

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$

一般地，事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生"称为这 $n$ 个事件的和，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 类似地，事件的和也可以推广至可列无穷多个事件的场合，称事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生"为这可列个事件的和，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

例如，在例 1.2 中，我们有 $A\cup C=\{1,2,3,5\}$，$C\cup D=\Omega$.

2. 事件的积

事件"$A$ 与 $B$ 同时发生"称为事件 $A$ 与 $B$ 的积，记为 $A\cap B$. 显然

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$

一般地，"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"称为这 $n$ 个事件的积，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 类似地，事件的积也可以推广至可列无穷多个事件的场合，称事件

“$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$同时发生”为这可列个事件的积，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

例如，在例 1.2 中，我们有 $C \cap D = \varnothing$，$B \cap D = A$.

3. 事件的差

事件“$A$ 发生而 $B$ 不发生”称为事件 $A$ 与 $B$ 的差，记为 $A-B$. 显然

$$A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}.$$

例如，在例 1.2 中，我们有 $B-C=A$，$E-C=A$.

### 1.2.2　事件的关系

1. 包含关系

若事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $A$ 含于事件 $B$，或称事件 $B$ 包含事件 $A$，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 这时事件 $A$ 的样本点一定都在事件 $B$ 中.

显然有

$$A \subset B \Leftrightarrow AB = A \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

在例 1.2 中，$A=$“出现 2 点”含于 $B=$“出现 2 点或 5 点”，即 $A \subset B$. 若事件用样本点的集合表示，则 $A=\{2\}$，$B=\{2,5\}$. 显然也有 $A \subset B$.

2. 相等(等价)关系

若 $A$ 发生一定导致 $B$ 发生，同时 $B$ 发生也一定导致 $A$ 发生，则称事件 $A$ 与 $B$ **相等**(或**等价**)，记为 $A=B$. 显然有

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

在例 1.2 中，事件 $E=$“点数$<4$”与事件 $F=$“点数小于或等于 3” 相等，即 $E=F$.

3. 互不相容(互斥)关系

若事件 $A$ 与 $B$ 不能同时发生，即有 $AB=\varnothing$，则称事件 $A$ 与 $B$ **互不相容**(或**互斥**).

一般地，$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，是指它们两两互不相容，即

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 互不相容} \Leftrightarrow A_iA_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

同样，可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 互不相容，也是指它们两两互不相容.

在例 1.2 中，事件 $A$ 与 $C$ 是互不相容的. 任意一个试验的所有基本事件也是互不相容的.

我们约定,若事件 $A$ 与 $B$ 互不相容,则它们的和记为 $A+B$,若 $n$ 个事件 $A_1$, $A_2$,…,$A_n$ 互不相容,则它们的和记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$,即当用符号"+"或"$\sum$"表示事件的和时,隐含了参与求和的事件是互不相容的.

4. 对立(互逆)关系

若事件 $A$ 与 $B$ 有且仅有一个发生,则称 $A$ 与 $B$ 为**对立事件**(或**互逆事件**).易知

$$A\text{ 与 }B\text{ 对立}\Leftrightarrow A\cup B=\Omega\text{ 且 }AB=\varnothing.$$

这时也称 $A$ 是 $B$ 的对立(逆)事件,或 $B$ 是 $A$ 的对立(逆)事件,记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$. 显然有 $\overline{\overline{A}}=A$.

事件的对立关系与事件的减法运算有密切的关系. 一方面,一个事件 $A$ 的对立事件可以看成样本空间 $\Omega$ 与事件 $A$ 的差,即有

$$\overline{A}=\Omega-A.$$

另一方面,事件 $A$ 与 $B$ 的差总是等于 $A$ 与 $B$ 的对立事件的乘积,即总有

$$A-B=A\overline{B}.$$

在例 1.2 中,事件 $C$ 与 $D$ 是相互对立的,即 $C=\overline{D}$ 或 $D=\overline{C}$.

若用平面上一矩形区域表示样本空间 $\Omega$,矩形区域内的点表示样本点,两个小圆分别表示事件 $A$ 和事件 $B$,则事件间的关系和运算可以用几何图形直观地表示出来. 这种图称为**维恩**(Venn)**图**. 图 1.1 给出了 $A\subset B$,$A\cup B$,$A\cap B$,$A-B$,$\overline{A}$ 以及 $AB=\varnothing$ 的维恩图.

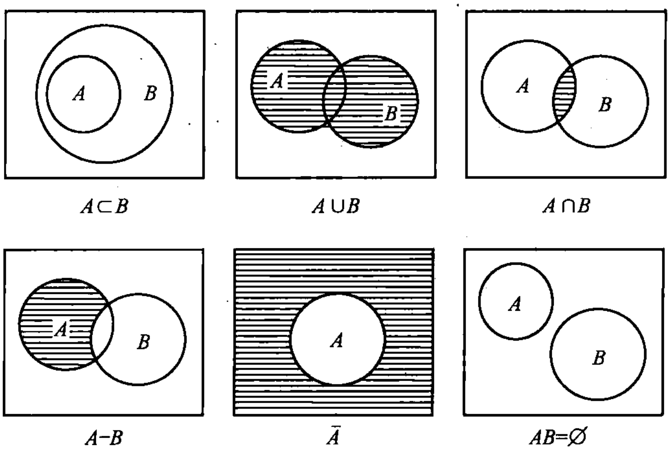


图 1.1

熟悉集合论的读者会发现,上面介绍的事件之间的运算和关系与集合之间的运算和关系是完全类似的. 为了帮助大家更好地理解这些概念,现将集合论的有关结论与事件的运算和关系的对应情况列于表 1.1 中.

**表 1.1**

| 符　号 | 集合论 | 概率论 |
|---|---|---|
| $\Omega$ | 全集 | 样本空间或必然事件 |
| $\varnothing$ | 空集 | 不可能事件 |
| $\omega$ | 集合的元素 | 试验的结果(样本点) |
| $\omega\in A$ | $\omega$ 是集合 $A$ 的元素 | 事件 $A$ 发生 |
| $A\cup B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 的并集 | $A$ 与 $B$ 的和($A$ 与 $B$ 至少一个发生) |
| $A\cap B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 的交集 | $A$ 与 $B$ 的积($A$ 与 $B$ 同时都发生) |
| $A-B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 的差集 | $A$ 与 $B$ 的差($A$ 发生而 $B$ 不发生) |
| $A\subset B$ | $A$ 是 $B$ 的子集 | $A$ 含于 $B$($A$ 发生导致 $B$ 发生) |
| $A=B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 相等 | 事件 $A$ 与事件 $B$ 相等 |
| $\bar{A}$ | 集合 $A$ 的补集 | $A$ 的对立事件 |
| $AB=\varnothing$ | 集合 $A$ 与 $B$ 不相交 | $A$ 与 $B$ 互不相容 |

### 1.2.3　事件的运算法则

事件的运算法则与集合之间的运算法则是类似的,我们列出如下:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 德摩根(De Morgan)对偶律:$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

分配律和对偶律都可以推广至有限个或可列个事件的情形. 例如,对于分配律,有

$$\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cap B=\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B),$$

$$\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\cup B=\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B),$$

其中 $I$ 是有限指标集或可列指标集.

**例 1.3**　对同一目标连续射击三次,记

$$A_i=\{\text{第 } i \text{ 次击中目标}\},\quad i=1,2,3.$$

$$B_j=\{\text{恰好有 } j \text{ 次击中目标}\},\quad j=0,1,2,3.$$

$$C_k=\{\text{至少有 } k \text{ 次击中目标}\},\quad k=0,1,2,3.$$

则有

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}, \\
B_1 &= \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}, \\
B_2 &= A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3, \\
B_3 &= A_1A_2A_3. \\
C_0 &= B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = \Omega, \\
C_1 &= B_1 + B_2 + B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \\
C_2 &= B_2 + B_3 = A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_1, \\
C_3 &= B_3 = A_1A_2A_3.
\end{aligned}
$$

## 1.3 古典概型与几何概率

如上所述，随机事件在一次试验中可能出现，也可能不出现，呈现出随机性. 但在多次重复试验或观察时，它却呈现出明显的规律性. 人们在大量的重复试验中发现，随机现象的发生是有规律的，随机事件出现的可能性大小也是能够计量的. 研究随机现象的目的，就是要获得随机现象各种可能结果发生的可能性大小的度量. 对于一个随机事件 $A$，用一个数 $P(A)$表示事件 $A$ 发生的可能性的大小，这个数就称为事件 $A$ 的概率. 因此，概率即是随机事件发生的可能性大小的度量. 研究随机现象时，只讨论它可能出现什么结果价值不大，而指出各个结果(事件)出现的概率则具有更大的意义.

### 1.3.1 古典概型

在讨论一般的随机现象之前，先讨论一种最简单的随机现象.

**定义 1.1** 设随机试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 是只含有 $n$ 个样本点的有限集合，$A$ 是由其中 $m$ 个样本点组成的随机事件. 如果 $\Omega$ 中的每个样本点的发生具有等可能性，则称

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{事件 } A \text{ 的有利场合数}}{\text{样本点总数}} \tag{1.1}$$

为事件 $A$ 的概率，其中事件 $A$ 的有利场合是指 $A$ 所含有的基本事件. 按等可能性的假定容易理解上述定义的合理性.

这种随机现象在概率论发展的初期首先受到注意，得到了较多的讨论和研究. 一般把这类随机现象的数学模型称为**古典概型**，而其中概率的定义(1.1)式称为**概率的古典定义**. 古典概型在概率论中占有重要的地位，对它的讨论有助于直观地理解概率论的基本概念.

**例 1.4** 掷一颗均匀对称的骰子，分别求下列事件的概率：

(1) $A$=“出现 6 点”;(2)$B$=“出现偶数点”.

**解** 样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 由于骰子是均匀对称的,因此各个样本点出现的概率相等. 故此试验可看作古典概型. 因为 $A=\{6\}$,于是由古典概率的定义有 $P(A)=\frac{1}{6}$;而 $B=\{2,4,6\}$,故事件 $B$ 的概率为 $P(B)=\frac{3}{6}=0.5$.

**例 1.5** 一部四册的文集随机地放到书架上去,问各册自左向右或自右向左恰成自然顺序的概率是多少?

**解** 这本四册的文集在书架上共有 $4!=24$ 种不同的排列方式,由于文集是随机地放到书架上去的,因此这 24 种排列中出现任意一种的可能性都相同,因此这是古典概型问题. 其有利场合有两种,即自左向右或自右向左恰成 1,2,3,4 顺序,因此所求概率为 $\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$.

**例 1.6** 用 0,1,2,…,9 共 10 个数字中的任意两个组成一个两位数的字码(可重复使用),求字码和为 3 的概率.

**解** 这是古典概型问题. 样本空间中共有 $10\times10=100$ 个样本点,而有利场合有四种:03,12,21,30. 因此所求概率为 $\frac{4}{100}=0.04$.

**例 1.7** 一枚均匀对称的骰子抛掷两次,事件 $A$ 表示“点数和为 10”,$B$ 表示“点数和为 12”,$C$ 表示“第一次出现奇数点”,试求事件 $A,B,C$ 的概率.

**解** 样本空间共含有 $6\times6=36$ 个样本点,即 $\Omega=\{(i,j)\,|\,i,j=1,2,\cdots,6\}$. 而每个样本点 $(i,j)$ 出现的可能性相同. 这是古典概型问题. 因为 $A=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$,故 $P(A)=3/36=1/12$. 同样可以求出,点数和为 12 的概率为 1/36. 不难看出事件 $B$ 含有 18 个基本事件,即事件 $B$ 的有利场合为 18 种,因此 $P(B)=18/36=0.5$.

在例 1.7 中,若取样本空间 $\Omega'=\{2,3,4,\cdots,12\}$,即一切两次抛掷的点数之和,则不能用古典概型方法计算事件的概率. 因为样本空间 $\Omega'$ 中各样本点的出现不是等可能的. 类似的例子还有抛掷两枚均匀对称的硬币,若选取样本空间 $\Omega'=$ {两个正面,一正一反,两个反面},则 $\Omega'$ 中的样本点的出现也不是等可能的. 因此说出现两个正面的概率是 1/3 是错误的. 为了应用古典概型解决问题,正确的样本空间应当取为 $\Omega$={(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)},因此得到两个正面的概率是 1/4. 所以在解决这一类概率问题时,如何选取正确(即具有等可能性)的样本空间是重要的.

**例 1.8** 箱中有 100 件外形相同的同批产品,其中次品 40 件,正品 60 件. 现按下列两种方式抽取产品:(1)每次任取一件,观察后放回箱中,再任取下一件,这种抽取方法称为有放回抽样;(2)每次任取一件,观察后不放回,在剩余的产品中再任取下一件. 这种抽取方法称为无放回抽样. 试分别就这两种抽样方式,求从这

100 件产品中任意抽取 3 件,其中有两件次品的概率.

**解** 显然这是古典概型问题.记 $A$ 为事件"抽出的 3 件有两件是次品".

(1) 有放回抽样:此时,样本点总数为 $n=100^3$,事件 $A$ 的有利场合数 $m=C_3^2\times 40^2\times 60$,故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_3^2\times 40^2\times 60}{100^3}=0.288.$$

(2) 无放回抽样:此时,样本点总数 $n=100\times 99\times 98$,而有利场合数 $m=C_3^2\times 40\times 39\times 60$,故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_3^2\times 40\times 39\times 60}{100\times 99\times 98}=0.289,$$

或

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{40}^2C_{60}^1}{C_{100}^3}=0.289.$$

一般说来,采用有放回抽样或无放回抽样计算事件的概率时,结果是不一样的.特别,当被抽取对象的数目较少时,差异会比较大;但当被抽取对象的数目较大,而抽取的数目又较少时,按照两种抽样方式所计算的概率数值相差不大.这一事实已由本例的计算结果清楚地显示出来.

此外,在上例的无放回抽样中,我们给出了事件 $A$ 的概率的两种不同的计算方法.注意考察一下两种解法的不同,就会发现主要在于样本空间的选取不同,但两种解法的答案相同.这说明对于同一随机现象,可以用不同的模型来描述,只要方法正确,结论总是一致的.值得注意的是,在计算样本点总数及有利场合数时,必须对同一个确定的样本空间考虑,因此其中一个考虑顺序,另一个也必须考虑顺序,否则结果一定不正确.

本例可以推广到一般情况.设一批产品共有 $N$ 件,其中有次品 $M$ 件,其余 $N-M$ 件为正品.从这批产品中随机抽取 $n$ 件样品,用 $A$ 表示事件"取出的 $n$ 件样品中恰有 $m$ 件次品",则:

(1) 在有放回抽样的方式下,事件 $A$ 的概率为

$$P(A)=\frac{C_n^mM^m(N-M)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}.$$

(2)在无放回抽样的方式下,事件 $A$ 的概率为

$$P(A)=\frac{C_n^mP_M^mP_{N-M}^{n-m}}{P_N^n},$$

或

$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

**例 1.9**　箱中有 $a$ 只白球、$b$ 只黑球，把球随机地一只只取出来，求事件 $A_k=$"第 $k$ 次取出的球是白球"的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

**解法一**(排列)　把 $a$ 只白球及 $b$ 只黑球都看作是不同的(如可以设想将它们编号)，若把球全部取出并依次放在排列成一条直线的 $a+b$ 个位置上，则所有可能的排列法有 $(a+b)!$ 种，而有利场合数为 $a(a+b-1)!$，故所求概率为

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

**解法二**(组合)　把 $a$ 只白球看成是没有区别的，$b$ 只黑球也看成是没有区别的，仍把球全部取出并依次放在排列成一条直线的 $a+b$ 个位置上. 因为只要 $a$ 只白球的位置固定下来，则 $b$ 只黑球的位置也就随之完全确定了，所以样本点总数为 $C_{a+b}^a$，而有利场合数为 $C_{a+b-1}^{a-1}$，故所求概率为

$$P(A_k)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^a}=\frac{a}{a+b}.$$

两种解法的答案相同，所得结果与 $k$ 无关！这表明无论哪一次取得白球的概率都是一样的，或者说，取得白球的概率与取球的先后次序无关. 这个结果与我们日常生活的经验是一致的. 例如，在体育比赛或其他活动中进行抽签，对各队机会均等，与抽签的先后次序无关. 而抽签的公平性，已通过上述例子用古典概率方法获得了证明.

不难证明，在古典概型中，事件的概率满足下面三个基本性质：

(1) 非负性：任一事件 $A$ 的概率 $P(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性：必然事件 $\Omega$ 的概率 $P(\Omega)=1$.

(3) 可加性：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{i=1}^n P(A_i).$$

### 1.3.2　几何概率

在古典概型中利用基本事件的等可能性，成功地计算了这一类问题的概率. 不过，古典概型要求基本事件的总数必须有限. 对于有无穷多个基本事件的情形，概率的古典定义并不适用. 但如果基本事件仍具有某种等可能性，则可以通过几何方法确定事件的概率.

**定义 1.2**　设试验 $E$ 的可能结果是某区域 $\Omega$ 中的任一点，区域 $\Omega$ 的度量(视区域 $\Omega$ 的维数而定，当 $\Omega$ 是一维的，其度量为长度；若 $\Omega$ 是二维或三维的，则其度