现代远程网络教育
全国统一考试

# 高等数学应试辅导

本书编写组

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代远程网络教育全国统一考试

# 高等数学
# 应试辅导

本书编写组

高等教育出版社

**内容提要**

本书是向参加现代远程网络教育全国统一考试的考生所提供的一本高等数学应试辅导教材，是依据全国高校网络教育统一考试大纲，针对考试性质、考试目标，结合考试与考生的现状而编写的。本书力求既有实用性，又有针对性，使考生易懂、易理解、易掌握，从而更有实效。

本书适用于参加网络教育全国统一考试高等数学A与高等数学B的各类考生。

**图书在版编目(CIP)数据**

现代远程网络教育全国统一考试高等数学应试辅导/本书编写组.—北京:高等教育出版社,2005.8
ISBN 7-04-017534-7

Ⅰ.现...　Ⅱ.本...　Ⅲ.高等数学-远距离教育-教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第068061号

**策划编辑** 李蕊　**责任编辑** 姚晖　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 吴文信
**版式设计** 范晓红　**责任校对** 金辉　**责任印制** 朱学忠

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经　销 | 北京蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　刷 | 山东省高唐印刷有限责任公司 | | |
| 开　本 | 787×960　1/16 | 版　次 | 2005年8月第1版 |
| 印　张 | 17.75 | 印　次 | 2005年8月第1次印刷 |
| 字　数 | 330 000 | 定　价 | 18.90元 |



**物料号　17534-00**

# 前　　言

高校网络教育本科层次学历教育的学生，将参加网络教育的高等数学全国统一考试。为了帮助考生应考，我们依据网络教育统考大纲编写了高等数学应试辅导书。

由于网络教育全国统一考试是基础水平的检测性考试，定位于与成人高等教育本科相应的高等数学课程要求的水平，因此本书编写以上述考试性质、考试目标为尺度。作为一本应试辅导书，本书侧重于基本概念、基本理论、基本方法的讲解，目标是使本书既有实用性又有针对性，以使考生学习本书易理解、易掌握，更有实效。

本书的有关章节或例题中，标注“*”的是仅为数学A要求的内容。标注“**”的是仅为数学B要求的内容，请读者注意。

为了帮助考生在复习中发现自己的不足，并能提高考试的实战经验，本书还对数学A与数学B各给出三套检测题。为了提高利用率，在检测题中数学A与数学B的共同考试知识点部分，也选用了不同的题目，因此，除掉不同知识点的部分题目，这实际上为每位读者提供了六套检测题。我们相信，通过这些练习，读者一定能进一步提高应战能力，在考试中取得理想的成绩。

本书编写组

2005年5月

**说明:**

1.《高等数学(A)》考试对象为:数学类专业的高中起点本科学生。

《高等数学(B)》考试对象为:除数学类专业以外的其他理工类专业的高中起点本科学生。

2.《高等数学(A)》试卷内容比例为:

一元函数微积分(含函数与极限)约60%;

多元函数微积分约25%;

级数约15%。

3.《高等数学(B)》试卷内容比例为:

一元函数微积分(含函数与极限)约65%;

多元函数微积分约25%;

常微分方程约10%。

# 目　录

# 第一章　函数、极限、连续

## §1-1　函　　数

### 一、考试要求

1. 理解函数的概念.掌握函数的表示法,会求函数的定义域.

2. 理解函数的有界性、奇偶性、周期性和单调性.

3. 理解分段函数、反函数、复合函数、隐函数和*由参数方程所确定的函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质和图像.理解初等函数的概念.

*5. 会根据实际问题建立函数表达式.

### 二、基本知识

#### (一) 函数的定义

若变量 $x$ 在允许范围内的每一个确定的值,变量 $y$ 按照某个确定的规则总有相应的值与之对应,则称 $y$ 为 $x$ 的函数,记为 $y=f(x)$.

常称 $x$ 为自变量,$y$ 为函数.称使函数有定义的点的全体为函数的定义域.

由函数定义可以看出,其关键特征是:

$x$ 取值的允许范围,即函数的定义域;

对应规则,即函数的依赖规则.

因此说函数概念有两个基本要素为:定义域和对应规则(或称依赖关系).

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时,才认为它们是同一个函数.

#### (二) 函数常用的三种表示方法

解析法,如 $y=f(x)$;图像法;表格法.

#### (三) 函数解析表示法中常见的几个形式

**1. 由一个解析式表示,如 $y=f(x)=x^2+2x+3$.**

**2. 分段函数** 如果函数的对应规则是由几个解析表达式表示的,则称之为分段函数.如

$$y=\begin{cases}x & x\leqslant 0\\ x+1 & 0<x<1\\ x^2 & x\geqslant 1\end{cases}$$

注意这里的 $f(x)$ 不是三个函数,而是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的一个函数,它由三个解析式来表达.

**3. 隐函数** 如果函数的对应规则是由方程 $F(x,y)=0$ 给出,则称 $y$ 为 $x$ 的隐函数.

如由方程 $x^2+2xy+2y^2-3x=1$ 确定的函数 $y=y(x)$ 为隐函数.

相对于隐函数来说,人们称由解析表达式 $y=f(x)$ 确定的函数为显函数.

***4. 参数方程表示的函数** 如果 $x$ 与 $y$ 的关系通过第三个变量联系起来,如

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$$

则称这种函数关系为参数方程表示的函数.

### (四) 定义域的求法

函数的定义域是指使函数有定义的,变量 $x$ 所允许的取值范围,因此求定义域常常是排除那些使函数没定义的点.通常对于由解析表达式表达的函数所要求的是:

分式中的分母不能为零;

偶次方根号下的表达式不能取负值;

对数的真数必须大于零;

取反正弦、反余弦的值的绝对值不能大于 1;

取正切的角不能为 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$($k$ 为整数);

对于实际问题则需保证其有符合题意的实际意义.

### (五) 函数符号的运用

函数符号的运用问题可分为两类:

**1. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式,求函数 $f[g(x)]$ 的表达式.**

这类问题相当于已知函数 $y=f(u)$ 及函数 $u=g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$.

**2. 已知 $f[g(x)]$ 的表达式,求 $f(x)$ 的表达式.**

这类问题的求解方法有两种途径:

(1) 令 $u=g(x)$，从中反解出 $x=\varphi(u)$，求出 $f(u)$的表达式，再将 $u$ 换为 $x$，即得 $f(x)$的表达式.

(2) 将 $f[g(x)]$的表达式凑成 $g(x)$的函数关系式.然后将所有 $g(x)$的位置换为 $x$，则得 $f(x)$.

## (六) 函数的性质

**1. 单调性** 设 $y=f(x)$在某区间内有定义，如果对于该区间内任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在该区间内单调增加.

如果对于该区间内任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在该区间内单调减少.

单调增加与单调减少统称为单调.

上述区间可以为有限区间，也可以为无穷区间；可以为开区间，也可以为闭区间.

如果没有指明区间，而是说“$f(x)$为单调函数”，总要理解为 $f(x)$在其定义区间上为单调函数.

判定函数 $y=f(x)$单调性的方法：

(1) 依定义判定　在给定的区间内任取两点 $x_1<x_2$，比较 $f(x_2)$与$f(x_1)$. 如果总有 $f(x_2)-f(x_1)>0$，则 $f(x)$在该区间内单调增加；如果总有$f(x_2)-f(x_1)<0$，则 $f(x)$在该区间内单调减少.

(2) 依导数的符号判定　如果在某区间内总有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$在该区间内单调增加；如果在某区间内总有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$在该区间内单调减少.

通常都采取第二种方法判定(留待第二章介绍).

**2. 奇偶性** 设 $y=f(x)$的定义区间 $D$ 关于原点对称(即若 $x\in D$，则有 $-x\in D$)，如果对于 $D$ 内任意的点 $x$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为 $D$ 内的偶函数，如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为该区间内的奇函数.

上述区间可以为有限区间$[-a,a]$或$(-a,a)$，也可以为$(-\infty,+\infty)$.

判定函数奇偶性的方法是利用定义.

奇、偶函数的图像有如下特点：

奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 $y$ 轴对称.

**性质** 两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数；两个奇(偶)函数之积必为偶函数；奇函数与偶函数之积必为奇函数.

也可以利用上述性质判定函数的奇偶性.

**3. 周期性** 若存在 $T>0$，对于任意的 $x$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$为周期函数，使得上述关系式成立的最小正数 $T$，称为 $f(x)$的最小周期，

简称为函数 $f(x)$的周期.

需指出并不是每个周期函数都有周期.

**4. 有界性** 设 $y=f(x)$在某区间内有定义.若存在 $M>0$,对于该区间内任意的 $x$,恒有$|f(x)|<M$,则称 $f(x)$在该区间内为有界函数.

上述区间可以为有限区间,也可以为无穷区间;可以为开区间,也可以为闭区间.

如果没有指明区间,而是说"$f(x)$为有界函数",总要理解为 $f(x)$在其定义区间内为有界函数.

判定函数有界性的方法通常是利用导数性质判定,留待第二章介绍.这里常采取下述方法判定函数是否有界:

(1) 利用基本初等函数图形.

(2) 适当放大或缩小有关表达式导出其界.

(3) 如果 $f(x)$在$(-\infty,a)$或$(a,+\infty)$或$(a,b)$内为单调函数,只需分别考察 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$;或考察 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$;或考察 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$.

## (七) 初等函数

**1. 反函数**

设函数 $y=f(x)$的定义域为 $D_x$,值域为 $D_y$.若对 $D_y$ 中的每一个值$y$,通过关系 $y=f(x)$,有值 $x$ 与之对应,这就建立了 $x$ 与$y$ 之间的函数关系$x=\varphi(y)$,常称 $x=\varphi(y)$为函数 $y=f(x)$的反函数.

相对于反函数 $x=\varphi(y)$来说,原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数.

在研究函数时,往往习惯于将 $x$ 作为自变量,将 $y$ 作为因变量.因此习惯上总把 $x=\varphi(y)$中的 $y$ 换成$x$,将 $x$ 换为$y$,从而得到 $y=\varphi(x)$.通常情况下,$y=f(x)$的反函数都是指 $y=\varphi(x)$,或记作 $f^{-1}(x)$.

求反函数的一般步骤为:

(1) 在 $y=f(x)$中将 $y$ 作为已知量,求出 $x$,即得 $x=\varphi(y)$.

(2) 在 $x=\varphi(y)$中交换 $x,y$ 的位置,即将 $x$ 换为$y$,将 $y$ 换为$x$,则可得 $y=f(x)$的反函数 $y=\varphi(x)$.

反函数的图形的特点 函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=\varphi(x)$这两条曲线在 $xOy$ 坐标平面上关于直线$y=x$ 对称.

需指出,不是每一个函数都存在其反函数.如函数 $y=C$ 不存在反函数.

**2. 基本初等函数**

(1) 幂函数 $y=x^\mu$($\mu$ 为实数).

(2) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$.

(3) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$.

(4) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(5) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

上述五类函数的定义域、单调性需记熟.

**定义** 上述五类函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

**3. 复合函数**

设变量 $y$ 是变量 $u$ 的函数 $y=f(u)$,变量 $u$ 是变量 $x$ 的函数 $u=g(x)$.

**定义** 若对于 $x$ 在某范围中的每一个确定的值,依据一个确定的规则总有 $u$ 的值与之对应,而对于 $u$ 的此确定值,$y$ 按确定的规则有值与之对应,则称 $y$ 为 $x$ 的复合函数.

若 $y=f(u), u=g(x)$,则常记为 $y=f[g(x)]$.称 $x$ 为自变量,$u$ 为中间变量,$y$ 为函数.

需指出,并不是任何两个函数 $y=f(u), u=g(x)$ 都能复合成 $y$ 为 $x$ 的函数.例如 $y=\arcsin u, u=x^2+2$.可以看出,不论 $x$ 取什么值,相应的 $u$ 总不小于2.但是对于使 $y=\arcsin u$ 有意义的值必须是 $|u|\leqslant1$,因此可知 $\arcsin(x^2+2)$ 是无意义的.换言之,$y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 不能复合成复合函数.

**4. 初等函数**

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次复合而成的,并能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

常见的问题:

(1) 将基本初等函数复合成复合函数.

(2) 将复合函数分解成一系列的简单函数.

所谓简单函数是指基本初等函数或经过有限个基本初等函数的四则运算而得到的函数.

其分解方法是依由外到里的顺序进行.

(3) 求复合函数的定义域.

依据求函数定义域的原则,由外层到里层考察相应函数在满足前一层次条件下的定义域,直到最里层,即可求出复合函数的定义域.

## 三、典型例题分析

**1. 函数的定义**

**例 1** 下列函数中与 $y=x$ 为同一函数的是(  ).

A. $y=\sqrt{x^2}$  B. $y=(\sqrt{x})^2$

C. $y=\ln e^{x}$　　　　　D. $y=e^{\ln x}$

**解**　选 C.

**分析**　对于 A 中

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

可知与 $y=x$ 的表达的对应规则不同,因此应排除 A.

对于 B 中 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $x\geqslant 0$,而 $y=x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,因此应排除 B.

对于 C 中 $y=\ln e^{x}=x\ln e=x$,可知定义域与对应规则都与 $y=x$ 相同,应选 C.

对于 D 中 $y=e^{\ln x}$必须满足 $\ln x$ 有定义,因此 $x>0$,这与 $y=x$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$不同,可知应排除 D.

**2. 函数的定义域与函数符号运用**

**例 2**　函数 $y=\dfrac{1}{x}\ln(2+x)$的定义域为(　　).

A. $x\neq 0$ 且 $x\neq -2$　　　B. $x>0$

C. $x>-2$　　　　　D. $x>-2$ 且 $x\neq 0$

**解**　选 D.

**分析**　由于对数的真数 $2+x>0$,即 $x>-2$. 而函数分母为 $x\neq 0$,可知应选 D.

**例 3**　函数 $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$的定义域是(　　).

A. $(0,5]$　　B. $(1,5]$　　C. $(1,5)$　　D. $(1,+\infty)$

**解**　选 B.

**分析**　由于开偶次方根的表达式 $5-x\geqslant 0$,对数的真数 $x-1>0$,可解得 $1<x\leqslant 5$. 因此选 B.

**例 4**　设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,则 $f(2x-1)$的定义域为(　　).

A. $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$　　C. $[0,1]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

**解**　选 B.

**分析**　函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,应理解为括号里面的变量的取值范围在 0 与 1 之间,即 $0\leqslant$变量$\leqslant 1$,而函数 $f(2x-1)$中的变量为 $2x-1$,则有

$$0\leqslant 2x-1\leqslant 1,\qquad 即\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$$

故选 B.

**例 5**　设 $f(x)=\begin{cases}\cos x & x\leqslant 0,\\ \sqrt{x} & x>0,\end{cases}$则 $f(0)=$________.

**解**　应填1.

**分析**　所给函数为分段函数,注意当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=\cos x$,因此可得知 $f(0)=\cos 0=1$.

**例6**　设 $f(x)=3x+5$,求 $f[f(x)-2]$.

**解**　应填 $9x+14$.

**分析**　由题设可知 $f(*)=3(*)+5$,因此

$$\begin{aligned}f[f(x)-2]&=3[f(x)-2]+5\\&=3[(3x+5)-2]+5=9x+14.\end{aligned}$$

**例7**　设 $f(x+1)=x^2+3x+5$,则 $f(x)=$ ________.

**解**　应填 $x^2+x+3$.

**分析**

**解法一**　令 $u=x+1$,则 $x=u-1$,可得

$$\begin{aligned}f(u)&=(u-1)^2+3(u-1)+5\\&=u^2+u+3\end{aligned}$$

因此 $f(x)=x^2+x+3$.

**解法二**　将所给表达式右端凑为 $(x+1)$ 的表达式

$$\begin{aligned}f(x+1)&=(x^2+2x+1)+(x+1)+3\\&=(x+1)^2+(x+1)+3\end{aligned}$$

因此 $f(x)=x^2+x+3$.

**例8**　若 $f(x^2+1)=x^4+3x^2+2$,则 $f(x)=$ ________.

**解**　应填 $x^2+x$.

**分析**　由于

$$f(x^2+1)=x^4+2x^2+1+x^2+1=(x^2+1)^2+(x^2+1)$$

因此

$$f(x)=x^2+x$$

**例9**　设函数 $f(x)=\ln x, g(x)=e^{2x+1}$,则 $f[g(x)]=$ ________.

**解**　应填 $2x+1$.

**分析**　这是考查复合函数表达式的求法.根据函数的结构式,则有

$$f[g(x)]=\ln g(x)=\ln e^{2x+1}=2x+1$$

**3. 函数的性质**

**例10**　函数 $f(x)=\cos x^3$ 在 $xOy$ 平面上的图形(　　).

A. 关于 $x$ 轴对称　　　　B. 关于 $y$ 轴对称

C. 关于坐标原点对称　　　D. 以上结论都不对

**解**　选B.

**分析**　由于 $f(x)=\cos x^3$,因此 $f(-x)=\cos(-x)^3=\cos(-x^3)=\cos x^3=$

$f(x)$,即 $f(x)=\cos x^3$ 为偶函数,可知其在 $xOy$ 平面上的图形关于 $y$ 轴对称.故应选 B.

**例 11** 设 $f(x)$是奇函数,$g(x)$是偶函数,则函数 $f(x)g(x)$是(　　).

A. 奇函数　　　　B. 偶函数

C. 恒为常数　　　　D. 既不是奇函数也不是偶函数

**解** 选 A.

**分析** 设 $F(x)=f(x)g(x)$,则 $F(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-F(x)$,即 $f(x)g(x)$为奇函数.

**例 12** 设 $F(x)=(2^x+2^{-x})f(x)$,其中 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的奇函数,判定 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的奇偶性.

**分析** 可以利用函数奇偶性定义来判定.由于

$$F(-x)=(2^{-x}+2^x)f(-x)$$

由于 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为奇函数,因此 $f(-x)=-f(x)$,从而

$$F(-x)=-(2^{-x}+2^x)f(x)=-F(x)$$

可知 $F(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的奇函数.

**4. 反函数**

**例 13** 函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$的反函数为(　　).

A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$　　　　B. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

C. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$　　　　D. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$

**解** 选 D.

**分析** 只需求出 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$的反函数进行对照即可.

(1) 从 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$中解出 $x$:

$$y(x+1)=x-1$$

$$x=\frac{1+y}{1-y}$$

(2) 将上表达式中的 $x$ 换为 $y$,将 $y$ 换为 $x$,可得 $y=\dfrac{1+x}{1-x}$,即为所求反函数.故应选 D.

## 四、练习题 1-1

**(一) 选择题**(每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,选出符合题目要求的选项)

1. 下列各组函数中，表示相同函数的是(　　).

A. $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$　　B. $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

C. $y=1$ 与 $y=\cos^2 x+\sin^2 x$　　D. $y=x$ 与 $y=\cos(\arccos x)$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$的定义域是(　　).

A. $(-\infty,1]$　　B. $[4,+\infty)$

C. $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

3. 函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$的定义域是(　　).

A. $(-1,+\infty)$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

4. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$，则 $f(x+1)$的定义域是(　　).

A. $[0,1]$　　B. $[-1,0]$　　C. $[1,2]$　　D. $[0,2]$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & x<-1, \\ x^2-1 & x\geqslant -1, \end{cases}$则 $f(0)$等于(　　).

A. $-1$　　B. 0　　C. 1　　D. 2

6. 已知 $f(x+1)=x^2$，则 $f(x)=$(　　).

A. $x^2$　　B. $(x+1)^2$　　C. $(x-1)^2$　　D. $x^2-1$

7. 若 $f(x+3)=x(x+3)$，则 $f(x)=$(　　).

A. $x(x+3)$　　B. $(x-3)(x+3)$　　C. $x(x-3)$　　D. $(x-3)^2$

8. 设 $g(x)=\ln x+1$，$f[g(x)]=x$，则 $f(1)=$(　　).

A. 1　　B. e　　C. $-1$　　D. $-e$

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1 & |x|\leqslant 1, \\ -1 & |x|>1, \end{cases}$则 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=$(　　).

A. 1　　B. $-1$　　C. $f(x)$　　D. $\dfrac{1}{f(x)}$

10. 设 $f(x)$为奇函数，且 $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $a$ 为不等于 1 的正常数，则函数 $F(x)$是(　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　D. 奇偶性与 $a$ 有关的函数

11. 函数 $f(x)=x^3\sin x$ 是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 有界函数　　D. 周期函数

12. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，下列函数中必为偶函数的是(　　).

A. $y=|f(x)|$　　B. $y=-|f(x)|$

C. $y=-f(-x)$　　D. $y=f(x^2)$

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,下列函数中必为奇函数的是(　　).

A. $y=-|f(x)|$　　B. $y=xf(x^2)$

C. $y=-f(-x)$　　D. $y=f(x)+f(-x)$

14. 函数 $y=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)(a>0,a\neq 1)$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　D. 既是偶函数又是奇函数

**(二) 填空题**

1. 设 $f(x)=1+\ln(x+1)^2$,则其反函数为________.

2. $f(x+1)=x^2+1$,则 $f(x)=$________.

## 五、练习题 1-1 参考解答

**(一) 选择题**

1. 选 C.

因为 $y=1$ 与 $y=\cos^2 x+\sin^2 x$ 这两个函数的定义域相同,且对应规律也相同,故表示同一函数.应选 C.

A,B,D 中的各组函数的定义域都不相同,可知 A,B,D 中的各组函数都是不相同的函数.

2. 选 C.

由 $x^2-5x+4\geqslant 0$ 可解得 $x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 4$.

3. 选 C.

由 $\begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ 可解得 $x>1$.

4. 选 B.

由于 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,可知应有 $0\leqslant x\leqslant 1$ 才能保证函数有定义.从而可知欲 $f(x+1)$ 有定义,应满足

$$0\leqslant x+1\leqslant 1$$

可解得 $-1\leqslant x\leqslant 0$,因此选 B.

5. 选 A.

依函数表达式可知当 $x\geqslant -1$ 时,$f(x)=x^2-1$,从而可知 $f(0)=-1$.

6. 选 C.

令 $t=x+1$,则 $x=t-1$,从而

$$f(t)=f(x+1)=x^2=(t-1)^2$$

因此 $f(x)=(x-1)^2$,故选 C.

7. 选 C.

令 $t=x+3$,则 $x=t-3$,从而

$$f(t)=f(x+3)=x(x+3)=(t-3)t$$

因此 $f(x)=x(x-3)$,故选 C.

8. 选 A.

$f(1)=f[g(1)]=1$(由 $1=\ln x+1$,得 $x=1$).

9. 选 A.

因为 $|f(x)|=1$,从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=1$,所以 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=1$,故选 A.

10. 选 A.

由题设 $f(x)$为奇函数,因此 $f(-x)=-f(x)$,又由于

$$F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\left(\frac{a^x}{1+a^x}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\frac{2a^x-(1+a^x)}{2(1+a^x)}$$

$$=\frac{1-a^x}{2(1+a^x)}f(x)$$

$$F(x)=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{2-(1+a^x)}{2(1+a^x)}f(x)=\frac{1-a^x}{2(1+a^x)}f(x)=F(-x)$$

可知 $F(x)$为偶函数.

11. 选 B.

由于 $x^3$ 与 $\sin x$ 都为奇函数,可知它们的积为偶函数.

12. 选 D.

由于 $f[(-x)^2]=f(x^2)$,可知 D 中函数为偶函数.

13. 选 B.

由于 $x$ 为奇函数,$f(x^2)$为偶函数,可知其积为奇函数.

14. 选 B.

因为该函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,且

$$y(-x)=\log_a(\sqrt{1+(-x)^2}-x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}-x)$$

$$=\log_a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)=-y(x)$$

故该函数是奇函数.

**(二) 填空题**

1. 应填 $y=e^{\frac{1}{2}(x-1)}-1$. $y=1+2\ln(x+1)$,$2\ln(x+1)=y-1$,$\ln(x+1)=\frac{1}{2}(y-1)$,$x=e^{\frac{1}{2}(y-1)}-1$,从而得到反函数为 $y=e^{\frac{1}{2}(x-1)}-1$.