常微分方程丛刊　第5号

稳定性理论

朱思铭　编

中山大学数学系微分方程研究室

1982.11

序　言

稳定性理论是常微分方程的一个重要分支。是由俄国伟大数学家李雅普诺夫（A.M.Ляпунов）研究运动的稳定性而发展起来的。李雅普诺夫稳定性理论在近三十多年来得到了迅速的发展。La Salle在六十年代曾指出："稳定性理论在吸引着全世界数学家的注意，而且李雅普诺夫的直接方法现在得到了工程师们的广泛赞赏。""稳定性理论在美国正迅速地变成训练控制方面的工程师的一个标准部分。"现在稳定性理论的方法和结果已经推广到泛函微分方程、随机微分方程、偏微分方程以及动力系统中去。同时在自动控制系统、大系统、卫星姿态动力学、大电力系统以及生态数学等新技术新领域中均有重要的应用。

本书是为希望较深入地了解常微分方程稳定性的理论与应用的读者而编写。不仅较充分地阐述了李雅普诺夫稳定性经典理论、包括稳定性基本定理和第一、第二及周期运动临界情形的稳定性、而且较深入地讨论它的新近发展和应用，如区域稳定性、V函数构造、控制电力以及生态系统稳定性。同时，内容处理上注意反映新方法、新成果，例如在基本定理的证明中补充了K类V函数的证明、用乘积空间稳定性处理临界情形、用导数不连续的V函数处理分离变量型微分方程稳定性。希望通过学习本书能够直接阅读有关的最新文献并有助于解决实际问题。由于篇幅所限，本书将不涉及常微分方程以外的稳定性问题如泛函微分方程、随机微分方程、偏微分方程，以及动力系统等。

本书可作为综合大学及理工师范院校选修课程的教材。内容安排为供一年之用，如讲授半年，则可依着重理论或是应用

而选用其中的一部分。书中各节内容尽量独立，其相关的联系情况大致如后面所附的章节联系图。其中第一章 §1—§4，第二章 §1、2，第三章 §1、2和第四章 §1 是基本部分。小字排印部分在第一次阅读时可以略去。

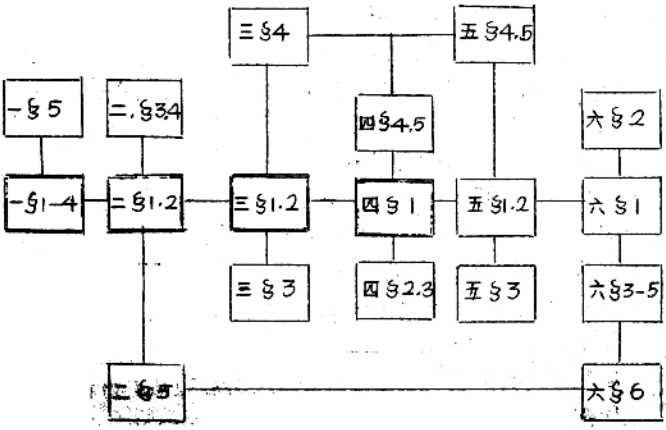
作为教材，并为帮助理解，书中在每一节后均安排适量的习题，书后附有答案。习题和答案是由中山大学徐远通、姚顺添和谭仪民三位同志协助编写的。

本书缘起于为许淞庆教授所著的"常微分方程稳定性理论"一书[1]编写增补本。编写时某些地方参照了原书的体例。同时参考了六十年代后期以来的国内外专著[2]~[7]。我们的工作是和许淞庆教授和已故的胡金昌教授的谆谆教导和亲切关怀分不开的。同时，对中山大学数学系微分方程研究室诸同志的协助和支持表示感谢。

朱思铭

82年8月于广州康乐

章节联系图



目　录

第一章 李雅普诺夫直接方法的基本定理

§1. 稳定性问题的提出与定义

在自然科学和工程技术中，运动系统的稳定性的研究是人们始终关心的问题，经典的如太阳系的稳定性，近代的如人造卫星的姿态运动稳定性。因为一个运动系统在运行过程中，不可避免地出现各种干扰，而在描述运动系统时，亦会出现误差。我们自然要求这样的系统在微小干扰或误差影响下产生的状态和原来的状态相差不大，即是说它是稳定的，这样才有实际意义。对于那些在微小干扰或误差影响下会出现大的状态变化的系统，称为不稳定的系统，是很难在实际上应用的。

因此，当我们研究用微分方程描述的运动系统时，不论研究的是某种物质运动的规律，还是探讨自动调节系统中调节器的作用，或是设计最优控制系统的系统参数，都必须研究系统的稳定性，以保证系统在各种微小的干扰作用或误差影响下系统是稳定的，不会产生太大的变化，作为进一步进行研究或设计的依据，这说明运动稳定性的研究是十分重要的问题。

但是，由于大多数微分方程是不可能或者很难求出其解的具体表达式来的，因此，必须要求在不具体解出方程的情况下判断方程的解的稳定性态，运动稳定性理论或者常微分方程稳定性理论就是在这样的科学技术发展的实际需要下产生并发展起来的。

现在假设运动系统可以描述成如下形式的常微分方程

$$\dot{y}=g(t,y) \tag{1.1}$$

这里 t 是实变数，表示时间；y 为 n 维实向量 Euclid 空间 R^n

中的点 $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix}$，其分量 y_s（$s=1,\cdots,n$）表示与运动有关的量；$g(t,y)$ 为 t，y 的 n 维实向量函数，

$$g(t,y)=\begin{pmatrix} g_1(t,y) \\ \vdots \\ g_n(t,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_1(t,y_1,\cdots,g_n) \\ \vdots \\ g_n(t,y_1,\cdots,y_n) \end{pmatrix}$$

其定义域为

$$G^*=\{(t,y):t\geqslant 0,\ y\in D^*\} \qquad (1\cdot2)$$

这里 D^* 是 R^n 中的 n 维区域；$\dot{y}$ 表示 y 对时间 t 的导数，即 $\frac{dy}{dt}$.

我们记 y^T 为 y 的转置，$\|y\|$ 表示 y 的范数，定义为 $\|y\|=\left(\sum_{s=1}^{n} y^2\right)^{\frac{1}{2}}$，同样，如果 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 实或复数矩阵，$|a_{ij}|$ 表示 a_{ij} 的模，则 A 的范数定义为

$$\|A\|=\left(\sum_{s,j=1}^{n}|a_{sj}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

假设 $g(t,y)$ 在域 G^* 中连续，而且满足解的唯一性和连续依赖性条件，例如满足关于 y 的局部 Lipszhitz 条件，（以后简称满足局部 Lip 条件）即对任意的 $(t^*,y^*)\in G^*$ 存在 (t^*,y^*) 的邻域 $U\subset G^*$，和与 U 有关的 Lipszhitz 常数 L，使当 $(t,y_1),(t,y_2)\in U$ 时下式成立.（如果在 G^* 中下式成立，则称为在 G^* 中满足 Lip 条件）

$$\|g(t,y_1)-g(t,y_2)\|\leqslant L\|y_1-y_2\|$$

于是，对于每个初值 $(t,y)\in G^*$ 可以确定方程组（1.1）的唯一一个解 $y(t)$，即对应于一个运动.

我们感兴趣于方程组（1.1）的在域 G^* 中的某一个解（特解）：

$$y=y^*(t),\quad 对\ t\geqslant 0 \qquad (1.2)$$

这个解对应的运动称为未被扰动运动，其他的一切解所对应的

运动则称为扰动运动。

我们所要研究的就是对应于未被扰动运动的解 $y=y^*(t)$ 的初值 $y^*(t_0)$ 有了干扰或有误差后，对应于扰动运动的解可能出现的状态。也就是说，如果

$$y^0=y^*(t_0)+\eta \tag{1·3}$$

这里 η 为任意 n 维常向量，满足 $y^0\in D^*$，则由（1·3）所确定的解 $y=y(t,\eta)$ 会出现什么状态。这里 η 称为初始扰动，简称扰动。由于有了扰动，使未被扰动运动改变为扰动运动，在具体问题中，扰动 η 往往非常小，那即 $\|\eta\|$ 相当小，这时要求判断扰动运动是否充分接近原来的未被扰动运动，也就是对于两个解之差

$$y(t,\eta)-y^*(t) \tag{1·4}$$

当 $\|\eta\|$ 足够小时，对一切 $t\geq t_0$ $\|y(t,\eta)-y^*(t)\|$ 是否充分小，即对于特解 $y^*(t)$ 形喜在初值微小扰动下其解是否稳定，这就是稳定性理论所要解决的问题。

为了便于进一步应用数学工具研究解的稳定性，引入新的变量 x，令

$$x=y-y^*(t) \tag{1·5}$$

于是方程组（1·1）化为

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{1·6}$$

其中 $f(t,x)=g(t,x+y^*(t))-\dot{y}^*(t)=g(t,x+y^*(t))-g(t,y^*(t))$，$f(t,x)$ 的定义域变为

$$G=\{(t,x):t\geq 0,\ x\in D\}$$

方程组（1·6）称为扰动运动微分方程组或扰动方程组。显然，$f(t,x)$ 满足

$$f(t,0)=0 \qquad (t\geq 0) \tag{1·7}$$

因此方程组（1·6）有一个平凡解，即零解 $x=0$，并且它对应于方程组（1·1）的特解（1·2），所以，由变换（1·5）所得到的

扰动方程组（1·6）的零解 $x=0$ 对应于未被扰动运动。

如果取初值条件

$$x(t_0)=x^0 \quad , \qquad (t_0, x^0)\in G \tag{1·8}$$

那么，方程组（1·6）有满足初值条件（1·8）的唯一解.

$$x=x(t, x^0, t_0) \qquad 对\ t\geqslant t_0 \tag{1·9}$$

因为 $x(t_0, x^0, t_0)=x^0=y(t_0)-y^*(t_0)=\eta$，故对扰动方程组（1·6）来说，$x^0$就是扰动。当 $x^0\neq 0$ 时，这些解所确定的运动就是扰动运动。

[例1]　设已给常系数微分方程组

$$\begin{cases}\dot{y}_1=-y_2+y_2(y_1^2+y_2^2-1)\\ \dot{y}_2=y_1+y_2(y_1^2+y_2^2-1)\end{cases}$$

容易验证，它有周期解

$$y_1=\cos t \quad , \qquad y_2=\sin t$$

取这特解作未被扰动运动，令

$$x_1=y_1-\cos t \quad , \quad x_2=y_2-\sin t$$

代入元方程组即得到扰动运动微分方程组：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1=&\ x_1(2\cos^2 t)+x_2(\sin^2 t-1)+x_1^2(3\cos t)\\ &+2x_1x_2\sin t+x_2^2\cos t+x_1^3+x_1x_2^2\\ \dot{x}_2=&\ x_1(1+\sin 2t)+x_2(2\sin^2 t)+x_1^2\sin t+2x_1x_2\cos t\\ &+x_2^2(3\sin t)+x_1^2x_2+x_2^3\end{aligned}$$

这是具有周期系数的变系数方程组。$x_1=x_2=0$ 是上方程组的一个解它对应于元方程组的周期解 $y_1=\cos t$， $y_2=\sin t$.

[例2]　考虑刚体由于惯性绕固定点的转动，其运动微分方程是

$$\begin{aligned}&A\dot{p}+(C-B)qr=0\\ &B\dot{q}+(A-C)rp=0\\ &C\dot{r}+(B-A)pq=0\end{aligned} \tag{1·10}$$

其中 p，q，r 是瞬时角速度向量在活动坐标轴上的投影，这些坐标轴与刚体在固定点上的惯性主轴相重合，而 A，B，C 是刚体关于这些轴的惯性矩。

方程组（1·10）有特解

$$p = \cos t \,, \qquad q = 0 \,, \qquad r = 0$$

以及对应于其他两个坐标轴的类似的解。

今取上特解作未被扰动运动，记 $w = \cos t$，令

$$x_1 = p - w \,, \qquad x_2 = q \,, \qquad x_3 = r$$

代入（1·10）得到扰动运动微分方程组

$$A\dot{x}_1 + (C-B)x_2x_3 = 0$$
$$B\dot{x}_2 + (A-C)(x_1+w)x_3 = 0$$
$$C\dot{x}_2 + (B-A)(x_1+w)x_2 = 0$$

显然，$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 是扰动运动微分方程组的一解。它对应于原方程组的特解 $p = \cos t$，$q = 0$，$r = 0$。

上述提出的关于未被扰动运动方程组（1·2）的稳定性问题，通过变换（1·5）就化为关于扰动运动微分方程组（1·6）的零解 $x = 0$ 的稳定性问题。现在，我们就关于微分方程组（1·6）的零解 $x = 0$ 的稳定性概念，引入数学上严格的定义如下。

定义 1·1　如果对于任意给定的正数 ε，存在正数 $\delta = \delta(\varepsilon; t_0)$，使得当 $\|x^0\| < \delta$ 时，方程组（1·6）的解（1·9）满足不等式

$$\|x(t, x^0, t_0)\| < \varepsilon \,, \quad 对\ t \geq t_0 \tag{1·11}$$

则（1·6）的零解称为稳定的。

定义 1·2　方程组（1·6）的零解称为不稳定的。如果它不是稳定的。也就是说，如果有正数 ε_0，不管正数 δ 多么小，总存在 x^0 和 T_0 满足 $\|x^0\| < \delta$，以及 $T_0 \geq t_0$，使得 $\|x(T_0, x^0, t_0)\| = \varepsilon_0$。

定义 1·3　对于包含原点为内点的连通区域 $D_0 \subset D$，如果

对任意的 $x^0 \in D_0$，方程组（1·6）的解（1·9）均有

$$\lim_{t \to \infty} x(t, x^0, t_0) = 0 \qquad (1·12)$$

则称 D_0 为（1·6）的吸引域。方程组（1·6）有吸引域存在时，称（1·6）的零解是吸引的。由于对任意的 D_0 均存在 $\delta_0 > 0$，使域 $\{x : \|x\| \leq \delta\} \subset D_0$，所以吸引性可定义为：存在 $\delta_0 > 0$ 使得当 $\|x^0\| < \delta_0$ 时，对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $T = T(\varepsilon, x^0, t_0)$，使得

$$\|x(t, x^0, t^0)\| < \varepsilon, \quad 对 t \geqslant t_0 + T \qquad (1·13)$$

定义 1·4　如果方程组（1·6）的零解是稳定的，又是吸引的，则称零解是渐近稳定的。

前面是李雅普诺夫关于稳定性的基本定义，因为李雅普诺夫基本定理的条件还可以得出更深入的结论，后来 Персидс-кий 提出了稳定性中的一致性概念，它更深入一步地揭示稳定性的本质。

定义 1·5　方程组（1·6）的零解称为一致稳定的，如果定义 1·1 中的 δ 与 t_0 无关，即 $\delta = \delta(\varepsilon)$。

定义 1·6　称 D_0 为方程组（1·6）的一致吸引域，如果定义 1·3 中的极限过程（1·12）对 x^0 和 t^0 是一致的即对任意给定的正数 ε，存在正数 $T = T(\varepsilon, D_0)$ 使得对任意的 $x^0 \in D_0$ 和 $t_0 \geqslant 0$，当 $t \geqslant t_0 + T$ 时均有

$$\|x(t, x^0, t_0)\| < \varepsilon$$

如果方程组（1·6）有一致吸引域存在时，则称方程组（1·6）的零解是一致吸引的，即定义 1·3 中使不等式（1·13）成立的 T 不依赖于 x^0 和 t_0：$T = T(\varepsilon, \delta_0)$

定义 1·7　如果方程组（1·6）的零解是一致稳定的，又是一致吸引的，则称零解是一致渐近稳定的。

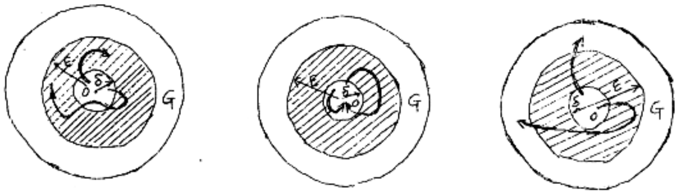
定义 1·8　方程组（1·6）的零解是指数渐近稳定的。如果存在 $\alpha > 0$，且对任意给定的 ε 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得当

$\|x^0\|<\delta$ 时有

$$\|x(t,x^0,t_0)\|<\varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)}$$

显然，如果零解是指数渐近稳定，则必是一致渐近稳定。

在二维情形零解的稳定性态，在平面上的示意图如图1·1



(a) 稳定　　(b) 渐近稳定　　(c) 不稳定

图 1·1　零解的稳定性态

在研究稳定性问题时，值得注意的是：因为方程组(1·6)的零解定义于一切 $t\geq t_0$，故根据关于微分方程组的解对初值的连续依赖性定理，对于任何给定的 $T>t_0$ 和任一 $\varepsilon>0$，有 $\delta=\delta(T,\varepsilon)>0$ 存在，使当 $\|x^0\|\leq\delta$ 时，由初始条件(1·8)所确定的方程组(1·6)的解(1·9)必将定义于 $t\in[t_0,T]$，且有

$$\|x(t,x^0,t_0)\|<\varepsilon,\qquad t\in[t_0,T]$$

记 $x(T)=\xi$，那么当然也有

$$\|x(T,x^0,t_0)\|=\|\xi\|<\varepsilon,$$

那就是说，如果选取 $\|x^0\|$ 足够小，则 $\|\xi\|$ 可为给定的任意小。显然，反过来，如果选取 $\|\xi\|$ 足够小，则 $\|x^0\|$ 也可以为给定的任意小。

又由于在稳定性问题中，只考虑定义于一切$t\geqslant t_0$的解（1·9）。所以在研究稳定性问题时，我们可以用别的T代替t_0和用初始条件：$x(T)=\xi$代替初始条件（1·8）。即从T开始而不从t_0开始考虑。这就是为什么在定义域G^*，G中我们取$t\geqslant 0$，而不是$t\geqslant t^*$。

不过，对于具体的方程或为而引入的V函数来说，在某些情况下，往往选取足够大的t及充分小的x才满足所要求的性质，即在某域

$$G_{T,H_0}=\{(t,x):t\geqslant T,\ \|x\|\leqslant H_0\}$$

中定义，而不在域G中定义，其中$T>0$足够大，H_0充分小。在这种情况下，可以灵活地先讨论在域G_{T,H_0}中方程组零解的稳定性态，然后再应用解对初始的连续依赖性，将解 到域G上，这并不影响原来的稳定性性质。

前面我们仅定义零解的各种稳定性概念。可以通过变换（1·5），把x的零解变回y的特解$y^*(t)$，得到的也就是方程组（1·1）关于解$y^*(t)$的稳定性态。因此方程组（1·6）关于零解的稳定性等价于（1·1）关于解$y^*(t)$的稳定性。而且完全可以类似地直接定义方程组（1·1）的解$y^*(t)$的各种稳定性，例如，所谓方程组（1·1）的解$y^*(t)$是稳定的，如果对任$\varepsilon>0$，有$\delta=\delta(\varepsilon,t_0)$使得当$\|y^0-y^*(t)\|<\delta$时满足$\|y(t,y^0,t_0)-y^*(t)\|<\varepsilon$，如果更且有$\|y(t,y^0,t_0)-y^*(t)\|\to 0$（当$t\to\infty$）则称解$y^*(t)$是渐近稳定的等等。后面在讨论线性方程组的时候，我们会提到关于解的稳定性，而不只是零解的稳定性。

［例3］　考虑一阶微分方程

$$\dot{x}=(6t\sin t-2t)x$$

它有零解$x=0$，讨论其零解的稳定性态。

对方程可以直接积分得

$$x(t,x^0,t_0)=x^0e^{6\sin t-6t\cos t-t^2-6\sin t_0+6t_0\cos t_0+t_0^2}$$

当 $t\geqslant t_0\geqslant 0$ 时有

$$|x(t,x^0,t_0)|\leqslant|x^0|e^{6+6t-t^2+6t_0+t_0^2}=|x^0|e^{12+(t+t_0)(6-t+t_0)}$$

由于上式右端当 $t\to\infty$ 时趋于零，由连续性知对任意的 $t_0\geqslant 0$ 和 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)$ 使得当 $t\geqslant t_0$ 时有

$\delta e^{12+(t+t_0)(6-t+t_0)}\leqslant\varepsilon$，因此对 $|x^0|<\delta$，$t\geqslant t_0$ 有

$$|x(t,x^0,t_0)|\leqslant|x^0|e^{12+(t+t_0)(6-t+t_0)}<\varepsilon$$

于是方程的零解是稳定的。

但是，对于 $t_0=2n\pi$，$x^0>0$，由解的表达式可以得到

$$x((2n+1)\pi,x^0,2n\pi)=x^0e^{6(2n+1)\pi-(2n+1)^2\pi^2-12n\pi+4n^2\pi^2}$$

$$=x^0e^{(4n+1)\pi(6-\pi)}\longrightarrow\infty\quad(\text{当}n\to\infty)$$

因此零解不是一致稳定的，更不可能是一致渐近稳定的。

不过，如果令 $T>6$，$t_0\geqslant 0$，则当 $t\geqslant t_0+T$ 时有 $t+t_0\geqslant T$ 得到

$$|x(t,x^0,t_0)|\leqslant|x^0|e^{12+(t+t_0)(6-T)}\leqslant|x^0|e^{12+T(6-T)}$$

这样对任意的 $\delta_0>0$ 和 $\varepsilon>0$，存在 $T=T(\varepsilon,\delta_0)>6$，使得 $\delta_0e^{12+T(6-T)}\leqslant\varepsilon$，从而对任 $|x^0|<\delta_0$，$t_0\geqslant 0$，当 $t\geqslant t_0+T$ 时有

$$|x(t,x^0,t_0)|\leqslant|x^0|e^{12+T(6-T)}<\delta_0e^{12+T(6-T)}\leqslant\varepsilon$$

因此零解还是一致吸引的，即零解是渐近稳定的。

[例4] 考虑微分方程组

$$\dot{x}_1=-x_2\ ,\qquad \dot{x}_2=x_1 \tag{1·14}$$

容易求得方程的解为

$$x_1(t)=x_1^0\cos(t-t_0)-x_2^0\sin(t-t_0)$$

$$x_2(t)=x_1^0\sin(t-t_0)+x_2^0\cos(t-t_0)$$

其中 x_1^0，x_2^0表 $t=t_0$时 x_1，x_2的初值。于是我们有

$$\|x(t)\|=[x_1^2(t)+x_2^2(t)]^{\frac{1}{2}}=[(x_1^0)^2+(x_2^0)^2]^{\frac{1}{2}}=\|x^0\|$$

因此，对于任意给定的正数 ε，只要 $\|x^0\|<\delta=\varepsilon$ 时，就有 $\|x(t)\|<\varepsilon$，$(t\geqslant t_0)$ 故方程组（1·14）的零解 $x=0$ 为稳定，而且显然，由于对任意的 $t_0\geqslant 0$，均有 $\|x(t)\|<\varepsilon\ (t\geqslant t_0)$ 故它还是一致稳定的。但是方程组（1·14）的零解不是渐近稳定的。

［例5］ 考虑方程

$$\dot{x}=-\frac{x}{t+1} \tag{1·15}$$

容易求得通解

$$x=x(t,x^0,t_0)=x^0\cdot\frac{t_0+1}{t+1} \tag{1·16}$$

于是，有

$$|x(t,x^0,t_0)|\leqslant|x^0|\qquad t\geqslant t_0$$

因此可见，（1·15）的零解为一致稳定。而且对于任何确定的 x^0 和 t_0，$t_0\geqslant 0$ 都有

$$\lim_{t\to\infty}x(t,x^0,t_0)=\lim_{t\to\infty}x^0\,\frac{t_0+1}{t+1}=0$$

所以（1·15）的零解是渐近稳定的 但由于 $t=t_0+T$ 时

$$x(t,x^{0},t_0)=x^{0}\frac{t_0+1}{t_0+T+1}=\frac{x^{0}}{1+\frac{T}{t_0+1}}\ ,$$

于是当 $t_0\to\infty$ 时，$x(t,x^0,t_0)\longrightarrow x^0$。因此（1·15）的零解不是一致吸引的，即不是一致渐近稳定的。

[例6] 一阶常系数线性方程

$$\dot{x}=-ax \qquad (a>0)$$

有零解 $x=0$ 以通解为 $x(t,x^0,t_0)=x^0e^{-a(t-t_0)}$，显然，其零解是指数渐近稳定的。

但对一阶方程

$$\dot{x}=-x^3$$

有零解 $x=0$，而其通解为

$$x=x^0[1+2(x^0)^2(t-t_0)]^{-\frac{1}{2}}$$

易证它是一致渐近稳定的，却不是指数渐近稳定的。

[例7] 考虑方程组

$$\dot{x}=f(x)+y\ ,\quad \dot{y}=-3x \tag{1·17}$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}-8x & \text{当 } x>0\\ 4x & \text{当 } -1<x\le 0\\ -x-5 & \text{当 } x\le -1\end{cases}$$

方程组右端连续且满足局部Lip条件，$x=y=0$ 为解，在相平面上的轨线图貌如图1·2所示，所有的解均最终趋于原点。因此零解是吸引的。现讨论满足初始条件 $t_0=0$ 时，$x^0=-\frac{1}{4}$，$y^0=1$ 的解，$(x(t),y(t))$ 此解停留在条形区域 $-1\le x\le 0$ 时，方程（1·17）变为

$$\dot{x}=4x+y\ ,\quad \dot{y}=-3x \tag{1·18}$$

如确定，可直接解之求得

$$x(t)=-\frac{3}{8}e^{t}+\frac{1}{8}e^{3t}\ ,\quad y(t)=\frac{9}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{3t} \tag{1·19}$$

当 $t\le 0$ 时有 $-\frac{1}{4}\le x(t)\le 0$，即方程（1·18）及其解（1·19）仍适用，于是，当 $t\to-\infty$ 时 $x(t)\to 0$，$y(t)\to 0$，这表明方程（1·17）的零解是不稳定的。

这个例子说明了尽管零解是吸引的，但却可能同时是不稳定的，因此定义渐近稳定时必须加上稳定的条件，即稳定性加吸引性，而不能仅仅凭吸引性即所有的解均趋于零就认为是渐近稳定了。

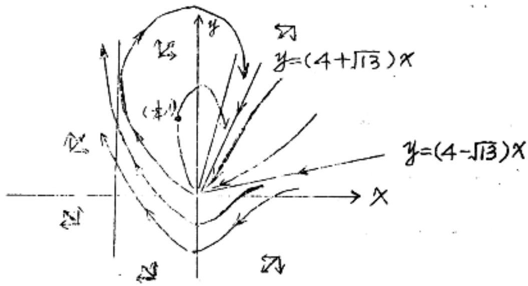


图1·2

上面我们已经阐明了稳定性的各种概念，并引进了严格的数学定义。但是对于具体的问题，当建立了它的数学模型，对于我们来说，就是给出了常微分方程时，如何决定它的稳定性态呢？后面我们介绍李雅普诺夫创立的解决稳定性问题的直接方法，它仅借助于一个所谓李雅普诺夫函数V和根据常微分方程组（1·6）所计算得来的V的符号性质来直接推断稳定性。

习题1·1

1　试举出微分方程的例子，使它只有一个稳定解，但通