华大助学 重难点手册

重难点手册

★四千万学子的制胜宝典
★八省市名师的在线课堂
★十六年书业的畅销品牌

新课标

配苏教版

高中数学4（必修）

蔡上鹤　主审
汪江松　主编

华中师范大学出版社

汪江松

教授（编审）

《中学数学》杂志主编，湖北大学硕士研究生导师，湖北省奥林匹克学校校长，中国优选法统筹法研究会理事，全国初等数学研究会副理事长，“希望杯”全国数学邀请赛组委会常委，湖北省科技期刊专家委员会委员，湖北省中学教师培训专家库成员，华中师范大学出版社特聘作者。长期从事数学教学和数学教育研究工作。出版有《初高中数学重难点手册》（该丛书出版16年来多次荣获优秀畅销书奖）、《高中数学解题方法与技巧》、《趣味数学》（丛书）、《几何明珠》、《成功数学新捷径（初中）》、《初中数学竞赛讲座》等著作40余部。在《数学通报》、《数学教育学报》、《湖北大学学报》、《山东教育》、《编辑学刊》、《科学进步与对策》、《中学数学》、《数学通讯》等20余家刊、报上发表论文50余篇，其中多篇论文被全文转载或获得湖北省数学学会优秀论文奖和湖北大学科研奖。

ISBN 978-7-5622-4030-3

责任编辑/陈　兰
责任校对/张　忠
封面设计/新视点

9 787562 240303 >
定价：17.00元

HZSFDXCBS

重难点手册

配苏教版

高中数学4（必修）

主　审　蔡上鹤

主　编　汪江松

★四千万学子的制胜宝典

★八省市名师的在线课堂

★十六年书业的畅销品牌

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

重难点手册——高中数学 4(必修)(配苏教版)/汪江松 主编.—3 版.
—武汉:华中师范大学出版社,2009.10
ISBN 978-7-5622-4030-3

Ⅰ.重…　Ⅱ.汪…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G 634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 128327 号

重难点手册——高中数学 4(必修)(配苏教版)

主编:汪江松
责任编辑:陈　兰　　**责任校对:**张　忠　　**封面设计:**新视点
选题设计:第一编辑室　　**电话:**027—67867361
出版发行:华中师范大学出版社 ©
社址:湖北省武汉市洪山区珞喻路 152 号　　**邮编:**430079
销售电话:027—67867076　027—67867371　027—67863040
传真:027—67863291　　**邮购:**027—67861321
网址:http://www.ccnupress.com
电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:湖北恒泰印务有限公司　　**督印:**章光琼
字数:328 千字
开本:880mm×1230mm　1/32　　**印张:**10.5
版次:2009 年 10 月第 3 版　　**印次:**2009 年 10 月第 1 次印刷
定价:17.00 元

欢迎上网查询、购书

体例特色与使用说明

新课标： 贯彻新课标精神，定位新课标“三维”目标，贴近新课标高考大纲要求，注重学习规律和考试规律的整合，全面提升考试成绩和综合素质。

大突破： 突破传统的单向学习模式，将教材知识、拓展知识和隐性方法类知识植入新课堂，立体凸现学科知识结构和解题方法技巧，破解高考“高分”瓶颈。

课程目标点击

全面展示每课(节)的“知识与技能、过程与方法以及情感态度与价值观”三位一体的目标要求，使同学们明确努力的方向和应达到的程度，便于自我评价和相互评价。

重点难点突破

把握学生思维情感的发展脉络，恰到好处地指出每课(节)的重点、难点与疑点，各个击破，扫清学生学习中的一切障碍，全力提高学生的学习效率。

方法技巧点拨

精选典型例题，通透讲解，并从中总结解题方法与技巧，点拨解题规律，启发学生思维，使学生深刻透彻地把握知识结构，培养学生灵活运用知识的能力。

高考真题链接

多角度深入剖析各类考题，加深学生对所学知识的理解，激发学生深入探究学习的兴趣。

第一章

三角函数

1.1 任意角、弧度

课程目标点击

1. 理解任意角的概念，掌握正角、负角、零角的定义.

2. 了解象限角、终边相同的角的概念，并熟练掌握用集合的形式表示象限角、终边相同的角的方法.

3. 了解弧度制的含义，能正确地进行角度与弧度的换算，并熟记有关特殊角的弧度数.

4. 能运用计算器进行角度与弧度的互化，并能运用计算器求出相关角的三角函数值.

5. 从角的推广和弧度制的学习中，体验人类认识数学跟认识自然界一样，是从简单到复杂，从低级到高级，从特殊到一般的过程.

重点难点突破

1. 任意角

首先把角看作是由平面内的一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形. 然后规定：

按逆时针方向旋转形成的角叫做**正角**；按顺时针方向旋转形成的角叫做**负角**；一条射线没有作任何旋转，那么也把它看成一个角，叫做**零角**.

这样我们就把角的概念推广到了任意角：正角、负角和零角.

为了研究问题的方便，我们又使角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合，当角的终边落在第几象限(或落在坐标轴上)就称这个角是第几

方法技巧点拨

1. 注意运用推广后角的相关概念

例1 以下四个命题：

① 第一象限的角一定不是负角；② 小于 90° 的角是锐角；③ 锐角一定是第一象限的角；④ 第二象限的角是钝角.

其中不正确命题的个数是________.

【解】 第一象限的角为 $k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$；第二象限的角为 $k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$. 取 $k=-1$ 即知①、④错. 一切负角均小于 90°，故②错.

高考真题链接

例1 (2005，全国卷Ⅲ) 已知 α 为第三象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是______.

【解】 ∵ α 为第三象限角，

∴ $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

得 $k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{3}{4}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

若 k 为偶数，设 $k=2n$，$n\in\mathbf{Z}$.

则 $2n\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{3}{4}\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，此时 $\frac{\alpha}{2}$ 为第二象限角；

若 k 为奇数，设 $k=2n+1$，$n\in\mathbf{Z}$.

则 $2n\pi+\frac{3\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{7}{4}\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，此时 $\frac{\alpha}{2}$ 为第四象限角.

故 $\frac{\alpha}{2}$ 为第二或第四象限角.

——新课标《数学重难点手册》新突破

讲实用： 完全同步于新教材，导—学—例—训四位一体，落实课程内容目标和考纲能力要求，揭密高考解题依据和答题要求，破解重点难点。

大品牌： 十多年的知名教辅品牌，一千多万学子的全程参与，十余万名一线教师的倾力实验，堪称学习规律与考试技术深度融合的奇迹，缔造着使用效果显著、发行量惊叹的神话。

探究创新拓展

例1 有人说，钟的时针和分针一天内会重合 24 次，你认为这种说法是否正确？请说明理由。

【分析】 从午夜零时算起，假设分针走了时间 t 会与时针重合，一天内分针与时针会重合 n 次，建立 t 关于 n 的函数关系式再求解。

【解法1】 设经过时间 t 分针就与时针重合，n 为两针重合的次数。

三级题型测训

夯实基础

1. 设 $k\in Z$，下列终边相同的角是________.

   ① $(2k+1)\cdot 180^\circ$ 与 $(4k\pm1)\cdot 180^\circ$　② $k\cdot 90^\circ$ 与 $k\cdot 180^\circ+90^\circ$

   ③ $k\cdot 180^\circ+30^\circ$ 与 $k\cdot 360^\circ\pm30^\circ$　④ $k\cdot 180^\circ+60^\circ$ 与 $k\cdot 60^\circ$

2. 若 $90^\circ<-\alpha<180^\circ$，则 $180^\circ-\alpha$ 与 α 的终边关于________对称.
3. 若 α 是第四象限角，则 $180^\circ-\alpha$ 是第________象限角.
4. 与 -496° 终边相同的角是________，它是第________象限角，它们中最小正角是________，最大负角是________.

能力提升

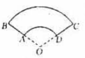
10. 集合 $M=\{x\mid x=(2n+1)\pi,\ n\in Z\}$，$N=\{x\mid x=(4k\pm1)\pi,\ k\in Z\}$，$M$ 与 N 之间的关系是________.
11. 已知 θ 的终边与 168° 角的终边相同，求在 $[0^\circ,360^\circ)$ 内终边与 $\frac{\theta}{3}$ 角的终边相同的角.

探索拓展

17. 以 x 轴的正向为始边的角的终边 OP 过点 $(-\sqrt{3},-1)$.

    (1) 写出以 OP 为终边的所有角的集合；

    (2) 写出 OP 在区间 $(-5\pi,5\pi)$ 上对应的角的集合.
18. 如图，要修建一扇环形花圃，外圆弧的半径是内圆弧半径的两倍，周长为定值 $2l$，问当中心角 α 为多少时，其面积最大，并求出最大面积.



第 18 题图

19. 在直角坐标系中，角 α 的顶点在坐标原点，始边在 x 轴的正半轴上. 已知 α 的终边过函数 $f(x)=-2^x$ 与 $g(x)=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 两图象的交点，求满足条件的 α 的集合.

答案详解与提示

第一章　三角函数

1.1　任意角、弧度

【变式与引申】

1. 与 15° 角终边相同的角的集合是 $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360^\circ+15^\circ,\ k\in Z\}$.

   又 $-1080^\circ<\alpha<360^\circ$，$\therefore -1080^\circ<k\cdot360^\circ+15^\circ<360^\circ$，即 $-1095^\circ<k\cdot360^\circ<345^\circ$.

   $\therefore -\frac{1095}{360}<k<\frac{345}{360}$，又 $k\in Z$，$\therefore k=-3,-2,-1,0$.

   从而所求的元素为 $-1065^\circ,-705^\circ,-345^\circ,15^\circ$.
2. (1) $\because \alpha$ 是第一象限角，$\therefore k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ$，$k\in Z$.

   $\therefore 2k\cdot360^\circ<2\alpha<2k\cdot360^\circ+180^\circ$，$k\in Z$.

   $\therefore 2\alpha$ 是第一或第二象限角，以及终边落在 y 轴的非负半轴上的角.

   (2) $\because \alpha$ 是第一象限角，$\therefore k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ$，$k\in Z$.

   $\therefore \frac{k}{3}\cdot360^\circ<\frac{\alpha}{3}<\frac{k}{3}\cdot360^\circ+30^\circ$，$k\in Z$.

   ① 当 $k=3n$ 时，$n\cdot360^\circ<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360^\circ+30^\circ$，$n\in Z$.　$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角.

   ② 当 $k=3n+1$ 时，$n\cdot360^\circ+120^\circ<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360^\circ+150^\circ$，$n\in Z$.　$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 为第二象限角.

   ③ 当 $k=3n+2$ 时，$n\cdot360^\circ+240^\circ<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360^\circ+270^\circ$，$n\in Z$.　$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 为第三象限角.

   综上知，$\frac{\alpha}{3}$ 为第一、二、三象限角.
3. $\because$ 分针每分钟走 6°，时针每分钟走 0.5°，若此人在 4 时前到达，设此人在出发后 x 分钟到达，且两针重合，又设凌晨 3 时分针所指位置为始边，则

探究创新拓展

体现特色栏目的全新面貌，融入新课程的全新理念，给出具有探究性的命题，为学生提供自主探索、相互交流的专有平台。

三级题型测训

立足于消化教材，注重基本题型的训练，以中档题为出发点，帮助同学们更深刻地领会相应知识点，逐步养成灵活的解题能力和应用能力，并精心挑选了少量高考拔高题与奥赛题，使学生在收到立竿见影的学习效果的同时，体验到探究创新的广阔空间。

答案详解与提示

附有三级题型测训和各章综合评价测试题的参考答案，并对全部的试题给出了提示和解答过程。

《数学重难点手册》编委会

目 录

第一章

三角函数

1.1 任意角、弧度

课程目标点击

1. 理解任意角的概念,掌握正角、负角、零角的定义.

2. 了解象限角、终边相同的角的概念,并熟练掌握用集合的形式表示象限角、终边相同的角的方法.

3. 了解弧度制的含义,能正确地进行角度与弧度的换算,并熟记有关特殊角的弧度数.

4. 能运用计算器进行角度与弧度的互化,并能运用计算器求出相关角的三角函数值.

5. 从角的推广和弧度制的学习中,体验人类认识数学跟认识自然界一样,是从简单到复杂,从低级到高级,从特殊到一般的过程.

重点难点突破

1. 任意角

首先把角看作是由平面内的一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.然后规定:

按逆时针方向旋转形成的角叫做**正角**;按顺时针方向旋转形成的角叫做**负角**;一条射线没有作任何旋转,那么也把它看成一个角,叫做**零角**.

这样我们就把角的概念推广到了任意角:正角、负角和零角.

为了研究问题的方便,我们又使角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的正半轴重合,当角的终边落在第几象限(或落在坐标轴上)就称这个角是第几

象限角(或轴线角).

2. 终边相同的角的表示

所有与角α终边相同的角,连同角α在内,可以构成一个集合:

$$\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}或\{\beta|\beta=\alpha+2k\pi,k\in \mathbf{Z}\}.$$

这里应注意如下几个问题:

① α是任意角;② 由于$k\in \mathbf{Z}$,说明这个集合中有无数个元素,即终边相同的角有无限多个,且它们相差360°的整数倍;③ 终边相同的角不一定相等,但相等的角的终边一定相同;④ 终边相同的角的表示形式不唯一,如$\{x|x=k\cdot 360°-90°,k\in \mathbf{Z}\}$与$\{x|x=k\cdot 360°+270°,k\in \mathbf{Z}\}$均表示终边在$y$轴的负半轴上的角的集合;⑤ 虽然表示角既可以用角度制,也可以用弧度制,但在讨论同一个问题时不能将两种表示方法混用,如与30°角终边相同的角不能表示为$\{x|x=2k\pi+30°,k\in \mathbf{Z}\}$或$\left\{x\,\middle|\,x=k\cdot 360°+\frac{\pi}{6},k\in \mathbf{Z}\right\}$,正确的表示方法为$\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in \mathbf{Z}\right\}$或$\{x|x=k\cdot 360°+30°,k\in \mathbf{Z}\}$.

3. 象限角与轴线角的表示

(1) 象限角的表示

象限	表示法	
	角度制	弧度制
第一象限	$\{x\|k\cdot 360°<x<k\cdot 360°+90°,k\in \mathbf{Z}\}$	$\left\{x\,\middle\|\,2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\right\}$
第二象限	$\{x\|k\cdot 360°+90°<x<k\cdot 360°+180°,k\in \mathbf{Z}\}$	$\left\{x\,\middle\|\,2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<(2k+1)\pi,k\in \mathbf{Z}\right\}$
第三象限	$\{x\|k\cdot 360°+180°<x<k\cdot 360°+270°,k\in \mathbf{Z}\}$	$\left\{x\,\middle\|\,(2k+1)\pi<x<2k\pi+\frac{3}{2}\pi,k\in \mathbf{Z}\right\}$
第四象限	$\{x\|k\cdot 360°+270°<x<(k+1)\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$	$\left\{x\,\middle\|\,2k\pi+\frac{3\pi}{2}<x<2(k+1)\pi,k\in \mathbf{Z}\right\}$

(2) 轴线角的表示

终边落在	表示法	
	角度制	弧度制
x轴	$\{x\|x=k\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}$	$\{x\|x=k\pi,k\in \mathbf{Z}\}$
x轴正半轴	$\{x\|x=k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$	$\{x\|x=2k\pi,k\in \mathbf{Z}\}$
x轴负半轴	$\{x\|x=(2k+1)\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}$	$\{x\|x=(2k+1)\pi,k\in \mathbf{Z}\}$
y轴	$\{x\|x=k\cdot 180°+90°,k\in \mathbf{Z}\}$	$\left\{x\,\middle\|\,x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\right\}$
y轴正半轴	$\{x\|x=k\cdot 360°+90°,k\in \mathbf{Z}\}$	$\left\{x\,\middle\|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\right\}$
y轴负半轴	$\{x\|x=k\cdot 360°-90°,k\in \mathbf{Z}\}$	$\left\{x\,\middle\|\,x=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\right\}$

4. 正确区分以下几个容易混淆的角

角的概念推广到任意角以后,初学者极易混淆角的概念:

第一象限角:$\{\alpha|k\cdot360^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$;

锐角:$\{\alpha|0^\circ<\alpha<90^\circ\}$;

小于 90°的角:$\{\alpha|\alpha<90^\circ\}$,它包括一切负角.

5. 弧度制及其优越性

(1) 弧度制

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做**1 弧度的角**,记作 1 rad,用弧度作为角的单位来度量角的制度称为**弧度制**.

如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧长为 l,那么角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha|=\frac{l}{r}$. 这样就有

$$360^\circ=2\pi(\mathrm{rad}),\ 180^\circ=\pi(\mathrm{rad}),$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}(\mathrm{rad})\approx0.017\ 45(\mathrm{rad}),$$

$$1(\mathrm{rad})=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx57.30^\circ=57^\circ18'.$$

(2) 弧度制的优越性

用角度制表示角时,如 $\alpha=39^\circ15'49''$是十进制、六十进制并用,若要找出与该角对应的实数,不太方便. 而用弧度制表示角时就较容易找出与角对应的实数. 又如

	角度制	弧度制
弧长公式	$l=\frac{n\pi r}{180}$	$l=\|\alpha\|\cdot r$
扇形面积公式	$S=\frac{n}{360}\cdot\pi r^2$	$S=\frac{1}{2}\|\alpha\|\cdot r^2$

显然,弧度制下的公式较为方便,更重要的是用弧度制来度量角,使角的集合与实数集 **R** 之间直接建立了一一对应关系:每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应;反过来,每一个实数也都有唯一的一个角(角的弧度数等于这个数)与它对应.

而角度制中的度、分、秒就相对麻烦了许多.

方法技巧点拨

1. 注意运用推广后角的相关概念

例 1 以下四个命题:

① 第一象限的角一定不是负角；② 小于 90°的角是锐角；③ 锐角一定是第一象限的角；④ 第二象限的角是钝角.

其中不正确命题的个数是________.

【解】 第一象限的角为 $k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$；第二象限的角为 $k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$. 取 $k=-1$ 即知①、④错. 一切负角均小于 90°，故②错.

答案：3 个.

点评 当角被推广到任意角后，原来初中阶段有关角的一些概念需要重新认识. 应特别注意这种先入为主的知识"负迁移"的影响.

2. 运用同终边的角的概念

例 2 已知 $\theta=-1845^\circ$.

(1) 找出$[-360^\circ,360^\circ]$内与 θ 同终边的角；

(2) 写出与 θ 终边相同的角的集合.

【解】 (1) $-1845^\circ=-5\times360^\circ-45^\circ$，又 $-45^\circ+360^\circ=315^\circ$，故在$[-360^\circ,360^\circ]$区间内与$-1845^\circ$同终边的角为$-45^\circ$和 315°.

(2) 与 θ 终边相同的角的集合为

$$\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ-45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}\text{或}\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+315^\circ,k\in\mathbf{Z}\}.$$

点评 虽然终边相同的角有无数个，且它们之间相差 360°的整数倍，但我们在以后的运算中最感兴趣的还是在$[-360^\circ,360^\circ]$内的两个同终边的角.

变式与引申 1 写出与 15°角终边相同的角的集合，在这个集合中，求适合不等式$-1080^\circ<\alpha<360^\circ$的所有元素 α.

3. 涉及角的范围，通常将负角化正角，并注意轴线角

例 3 若 α 为第三象限角，那么$-\alpha$，2α 的终边将在何处？

【解】 $\because$ $180^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<270^\circ+k\cdot360^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$， ①

$\therefore$ $-270^\circ-k\cdot360^\circ<-\alpha<-180^\circ-k\cdot360^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$， ②

即 $90^\circ-(k+1)\cdot360^\circ<-\alpha<180^\circ-(k+1)\cdot360^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore$ $-\alpha$ 是第二象限角，即$-\alpha$ 的终边将在第二象限.

再由①式知 $(2k+1)\cdot360^\circ<2\alpha<180^\circ+(2k+1)\cdot360^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$. ③

故 2α 的终边在第一、二象限或 y 轴的正半轴上.

点评 为了考查$-\alpha$ 的终边，我们将②式中的负角化成与其终边相同的正角，这是常用技巧；对于③式不要轻易回答 2α 的终边在第一、二象限，因为坐标轴不属于任何象限，这是极易被忽视的问题.

4. 已知 α 为某象限角时，求 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限时应注意对 k 进行分类讨论

例 4　已知 α 是第二象限角，求 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限.

【解】 ∵ α 是第二象限角，

∴ $90°+k\cdot 360°<\alpha<180°+k\cdot 360°$，$k\in\mathbf{Z}$.

∴ $45°+k\cdot 180°<\frac{\alpha}{2}<90°+k\cdot 180°$，$k\in\mathbf{Z}$.

∴ 当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角；当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角.

点评 推广此题解法，可得如下规律：

首先，如图 1-1-1，将每个象限角平均分为两份，则共将四个象限分为八个部分，之后，如图逆时针将每部分顺次写上数字 1 至 4；若 α 是第一象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 所处的区域即为图中两个“1”所在的区域. α 是其他象限角时，规律相同. 因而，熟记图示规律会给解题带来很大的方便.

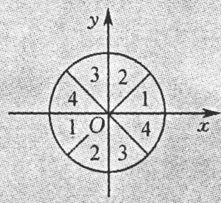


图 1-1-1

变式与引申 2　若 α 是第一象限角，则角 2α，角 $\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角？

5. 钟表上的角度问题

例 5　自上午 8 点整上学到中午 11 点 40 分放学，时钟的时针和分针各转了多少度？上午 8 点整和中午 11 点 40 分两针所成的最小正角各是多少度？

【解】 ∵ 时针每小时转 $-360°\div 12=-30°$，分针每小时转 $-360°$.

又上午 8 点整到中午 11 点 40 分经过了 3 小时 40 分，即 $3\frac{2}{3}$ 小时，

∴ 时针转过的角度是 $-30°\times 3\frac{2}{3}=-110°$，

分针转过的角度是 $-360°\times 3\frac{2}{3}=-1320°$.

若以时针指在 12 点整时为角的始边，则 8 点整时，时针与分针各指在“8”字和“12”字上，此时，时针与其成 $-240°$ 角，分针与其成 $0°$ 角.

∴ 8 点整时，两针所成的最小正角为 $120°$. 经过 $3\frac{2}{3}$ 小时后，时针与其成的角度为 $-240°-110°=-350°$，分针与其成的角度为 $0°-1320°=-1320°$，

又 $-1320°-(-350°)=-970°=110°-3\times 360°$，

∴ 在 11 点 40 分时，两针所成的最小正角为 $110°$.

点评 对于钟表上的角度问题，要明确两点：其一是它们所转过的角度都是负角(因为是顺时针方向旋转)；其二要注意时针每小时转$-30°$，每分钟转$-0.5°$，而分针每小时转$-360°$，每分钟转$-6°$. 利用这种换算关系很容易解决钟表上的计算问题.

变式与引申3 某人凌晨3时出发执行任务，必须在5时前到达，由于路上人少，加快了速度，到达时看表，时针与分针恰好重合，求此人到达的时刻.

6. 涉及圆的弧长和面积时用弧度制更简捷

例6 已知一扇形的周长为$C(C>0)$，当扇形的中心角为多少弧度时，它有最大的面积？

【解法1】 设扇形半径为r，中心角为$\alpha(\alpha>0)$，扇形的面积为S，则

$$C=2r+\alpha r,\quad r=\frac{C}{2+\alpha}.$$

故
$$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{C^2\cdot\alpha}{2\alpha^2+8\alpha+8}.$$

整理，得
$$2S\alpha^2+(8S-C^2)\alpha+8S=0.\qquad (*)$$

由$S\neq0$及$\Delta\geqslant0$，得 $-16SC^2+C^4\geqslant0$.

又$C\neq0$， $\therefore S\leqslant\frac{C^2}{16}$.

故扇形有最大面积为$\frac{C^2}{16}$.

将$S=\frac{C^2}{16}$代入(*)式，解得 $\alpha=2(\text{rad})$.

故当扇形的中心角为2弧度时，扇形有最大面积为$\frac{C^2}{16}$.

【解法2】 设扇形半径为r，中心角为$\alpha(\alpha>0)$，弧长为l，面积为S，

则 $l+2r=C$， $\therefore l=C-2r$.

$\therefore S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}(C-2r)\cdot r=-r^2+\frac{1}{2}Cr=-\left(r-\frac{C}{4}\right)^2+\frac{C^2}{16}$.

$\therefore$ 当$r=\frac{C}{4}$时，扇形有最大面积为$\frac{C^2}{16}$.

此时 $l=C-\frac{C}{2}=\frac{C}{2}$， $\alpha=\frac{l}{r}=\frac{\frac{C}{2}}{\frac{C}{4}}=2(\text{rad})$.

点评 解法1是建立关于S的一元二次方程，利用判别式法求解；解法2是通过建立一元二次函数求最值，较解法1易接受，而且过程简洁，应注意掌握.

高考真题链接

例1　(2005，全国卷Ⅲ)已知 α 为第三象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是________.

【解】　$\because$ α 为第三象限角，

$\therefore$ $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,

得　$k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{3}{4}\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

若 k 为偶数，设 $k=2n$, $n\in\mathbf{Z}$,

则 $2n\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{3}{4}\pi$, $n\in\mathbf{Z}$，此时 $\frac{\alpha}{2}$ 为第二象限角；

若 k 为奇数，设 $k=2n+1$, $n\in\mathbf{Z}$,

则 $2n\pi+\frac{3\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{7}{4}\pi$, $n\in\mathbf{Z}$，此时 $\frac{\alpha}{2}$ 为第四象限角.

故 $\frac{\alpha}{2}$ 为第二或第四象限角.

例2　(2007，黄冈调考)若集合 $M=\left\{x\,|\,x=\frac{k}{2}\cdot180°\pm45°, k\in\mathbf{Z}\right\}$，集合 $N=\{x\,|\,x=k\cdot45°, k\in\mathbf{Z}\}$，则集合 M 与 N 的关系是________.

【解】　对于集合 M，有　$x=k\cdot90°\pm45°=(2k\pm1)\cdot45°$,

$\because$ $k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore$ $2k\pm1$ 均为奇数，即集合 M 是由 45°的奇数倍角所组成的，而集合 N 是由 45°的整数倍角所组成的.

答案：$M\subsetneqq N$.

点评　这里将 M 中的角 $x=\frac{k}{2}\cdot180°\pm45°$ 转化为 45°的倍数是解题的关键.

探究创新拓展

例1　有人说，钟的时针和分针一天内会重合 24 次，你认为这种说法是否正确？请说明理由.

【分析】　从午夜零时算起，假设分针走了时间 t 会与时针重合，一天内分针与时针会重合 n 次，建立 t 关于 n 的函数关系式再求解.

【解法1】　设经过时间 t 分针就与时针重合，n 为两针重合的次数.

因为分针旋转的角速度为 $\frac{2\pi}{60}$rad/min$=\frac{\pi}{30}$rad/min,时针旋转的角速度为 $\frac{2\pi}{12\times60}$rad/min$=\frac{\pi}{360}$rad/min,

$\therefore\ \left(\frac{\pi}{30}-\frac{\pi}{360}\right)t=2\pi n$, 即 $t=\frac{720}{11}n$.

又因为时针旋转一天所需的时间为 24×60 min$=1440$ min,

所以 $\frac{720}{11}n=1440$, 即 $n=22$.

故时针与分针一天内只会重合22次.

【解法2】 设12点时,两针重合的位置为始边,且时针转过 θ 角,两针重合,则分针转过了 12θ 角,且有 $12\theta=\theta+k\cdot360°$, $k\in\mathbf{Z}$,即 $\theta=\frac{k\cdot360°}{11}$, $k\in\mathbf{Z}$.

又时针转过30°,时间经过1小时,所以时针转过1°,时间经过$\frac{1}{30}$小时,故时针转过 θ,经过时间为$\frac{\theta}{30°}=\frac{12k}{11}$小时.

令 $k=1$,得 $t_1=\frac{12}{11}=1\frac{1}{11}$,即时针和分针第一次重合的时间是 $1\frac{1}{11}$小时.

又 $0°\leqslant\theta<360°$,所以 $0\leqslant k<11$,所以12小时内,两针共重合11次,则一天内时针和分针共重合22次.

点评 这里两种解法出发点不一样:解法1是通过角速度建立函数关系求解;解法2是利用终边相同的角的关系进行运算.

例2 有两种正多边形,其中一正多边形的一内角的角度数与另一正多边形的一内角的弧度数之比为 $144°:\pi$,求适合条件的正多边形的边数.

【解】 设符合条件的正多边形的边数分别为 m、n(m、$n\geqslant3$, m、$n\in\mathbf{N}$),则它们对应的正多边形的内角分别为

$$\frac{(m-2)\cdot180°}{m}\text{和}\frac{(n-2)\pi}{n}\text{rad}.$$

由题意知 $\frac{(m-2)\cdot180°}{m}:\frac{(n-2)\pi}{n}=144°:\pi$,

整理得 $m=10\left(1-\frac{8}{n+8}\right)=10-\frac{80}{n+8}$.

$\because m\in\mathbf{N}$, $\therefore \frac{80}{n+8}$是自然数.

$\because m\geqslant3$, $\therefore \frac{80}{n+8}\leqslant7$. $\therefore n+8\geqslant\frac{80}{7}$.