21世纪

人大版考研丛书

2000年经济学考研数学复习

主

2000年经济学考研
数学复习指南

主　编　严守权
撰稿人　严守权　张学贞　褚永增

图书在版编目（CIP）数据

2000年经济学考研数学复习指南/严守权主编.
北京：中国人民大学出版社，1999

ISBN 7-300-03109-9/G・579

Ⅰ.20…

Ⅱ.严…

Ⅲ.经济数学-研究生-入学考试-自学参考资料

Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第09551号

2000年经济学考研数学复习指南

主　编　严守权

撰稿人　严守权　张学贞　褚永增

出版发行：中国人民大学出版社

（北京海淀路157号 邮编100080）

经　　销：新华书店

印　　刷：北京鑫鑫印刷厂

开本：787×1092毫米 1/16　印张：26.25

1999年4月第1版　1999年4月第1次印刷

字数：599 000

定价：30.00元

（图书出现印装问题，本社负责调换）

目　录

第一篇　经济学硕士入学考试数学考试大纲的内容和要求

第三篇　模拟试题

第一篇　经济学硕士入学考试数学考试大纲的内容和要求

第一章　微 积 分

一、函数、极限、连续

(一)内 容 提 要

1.函数概念.

函数的几何特性:

有界性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果存在一个正常数 M,使得对任意 $x \in D$,恒有 $|f(x)| < M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界,否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

单调性　设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义,如果对于任意的 $x_1, x_2 \in D$,且 $x_1 < x_2$,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$)成立,则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加(或单调减少).单调增加与单调减少函数统称单调函数.

周期性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果存在正常数 T,使得对任

有 $f(x+T)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,满足上式的最小正数 T_0 称为

期.

奇偶性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,且 D 关于原点

$f(x)=f(-x)$(或 $f(x)=-$

反函数、复合函数、隐

函数关系,分别称为商品的需求函数 $f_d(p)$和供给函数 $f_s(p)$.

2. 极限概念.

设有数列$\{u_n\}$和常数 A,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,总有不等式$|u_n-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列$\{x_n\}$的极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A$ $(n\to\infty)$.

设有函数 $f(x)$和常数 A,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正数 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,总有不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为函数 $f(x)$在 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

如果自变量 x 仅限从 x_0 右侧(或左侧)趋向 x_0 时,$f(x)\to A$,则称 A 为 $x\to x_0^+$(或 $x\to x_0^-$)时,函数 $f(x)$的右极限(或左极限). 记作$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$(或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$). 类似地可定义 $x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$时,$f(x)\to A$ 的极限概念.

函数极限$\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)$存在且等于 A 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+(+\infty)}f(x)=\lim_{x\to x_0^-(-\infty)}f(x)=A.$$

无穷小与无穷大　极限为零的变量称为无穷小量. 在自变量的某个变化趋势下,若函数 $f(x)$的绝对值无限地增大,则称 $f(x)$为无穷大量. 有限个无穷小量的和仍为无穷小量. 有限个无穷小量的积仍为无穷小量. 无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量. 无穷小量除以极限不为零的变量,其商仍为无穷小量. 若 α,β 为同一变化趋势下的无穷小量,且 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\rho$,则当 $\rho=0$ 时,称 β 为比 α 高阶的无穷小量,当 $\rho=\infty$时,称 β 为比 α 低阶的无穷小量,当 $\rho=c\neq0$ 时,称 β 为与 α 同阶的无穷小量,特别地当 $\rho=1$ 时,称 β 为与 α 等价的无穷小量,记作 $\alpha\sim\beta$.

$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是,函数 $f(x)$可表示为常数 A 与无穷小量 α 之和.

如果极限 $\lim f(x)$和 $\lim g(x)$都存在,则有运算法则:

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

在该区间内连续. 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处，或者无定义，或者无极限，或者极限不等于函数值 $f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

初等函数在其定义区间内连续.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值和最小值(最值定理)；

(2) $f(a)\neq f(b)$ 时，对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一实数 c，必存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=c$(介值定理).

(二)例题解析

1. 填空.

(1)已知 $f(e^x-1)=x^2+1$，则 $f(x)$ 的定义域为________.

(2)与函数曲线 $y=\sin[\arcsin(x+1)]$ 关于直线 $y=x$ 对称的函数曲线方程为________.

(3)已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{a}{x^2}+b\right)=1$，则 $a=$____，$b=$____.

(4)已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\tan x}-1}{\ln(1+x)}=100$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

(5)设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{xt+1}{xt+2}\right)^t$，则函数 $f(x)$ 有间断点________，曲线 $y=f(x)$ 有渐近线________.

(6)设 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$，则曲线 $y=f(x)$ 的渐近线为________，连续区间为__________.

答：(1) $(-1,+\infty)$　(2) $y=\sin[\arcsin(x-1$　　　　3，$b=\dfrac{11}{2}$　(4)200

(5) $x=0$；$y=1$，$x=0$　(6) $y=\dfrac{1}{1-e}$，$x=0$；$(-\infty,$

解析：(1)求函数 $f(x)$ 的定义域

或 $x=\ln(1+u)$，可得 $f(x)=\ln^2($

(5)当 $x\neq0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{xt}}{1+\dfrac{2}{xt}}\right)^t=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

当 $x=0$ 时，$f(0)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^t=0$

所以 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

由 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$，知曲线 $y=f(x)$ 有渐近线 $y=1,x=0$.

(6)由于初等函数的定义域即为连续区间，于是由 $x-1\neq0$ 及 $1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}\neq0$ 知函数 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$. 又由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}}$ 知有渐近线 $y=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}},x=0$.

2. 选择题(每小题给出的四个选项中，只有一项正确).

(1)设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant0\\ 2x & x<0\end{cases},g(x)=\begin{cases}x & x\geqslant0\\ -2x & x<0\end{cases}$，则 $x\leqslant0$ 时，$f[g(x)]=($　　).

(A) $2x$　　(B) x^2　　(C) $4x^2$　　(D) $-4x^2$

(2)对于任何 $x\in(1,a)$，设 $f(x)=\log_a x$，则(　　)正确.

(A) $f(f(x))<f(x^2)<[f(x)]^2$　　(B) $f(f(x)]<[f(x)]^2<f(x^2)$

(C) $f(x^2)<f(f(x))<[f(x)]^2$　　(D) $[f(x)]^2<f(f(x)]<f(x^2)$

(3)设 $f(x)$ 处处可导，则(　).

(A)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

(B)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(C)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+$　　必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(D)当 $\lim f$　　　　有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$=2$，其中 $a^2+c^2\neq0$，则有(　　).

(A) $-2<m<0$　　　　　　　　(B) $0<m<1$

(C) $1<m$　　　　　　　　　　(D) $-2<m<1$

答:(1)C　(2)B　(3)D　(4)B　(5)B　(6)A

解析:(1)处理分段函数的一般方法是,先处理各分段开区间,然后再单独讨论分段点.在本题中,当 $x<0$ 时,$g(x)=-2x>0$,故对应于 $f(x)=x^2$,有 $f[g(x)]=[g(x)]^2=4x^2$,又 $g(0)=0$,$f[g(0)]=0^2=0$,综上所述,当 $x\leqslant 0$ 时,$f[g(x)]=4x^2$.

(2)由已知 $0<f(x)<1<x^2$,则有 $f(x^2)=2f(x)>f^2(x)>0$ 及 $f(f(x))<0$,故取(B).

(3)由反例:$x\to-\infty$ 时,$x^3\to-\infty$,但 $(x^3)'=3x^2\to+\infty$;$x\to-\infty$ 时,$(x^2)'=2x\to-\infty$,但 $x^2\to+\infty$;及 $x\to+\infty$ 时,$x\to+\infty$ 时,$x\to+\infty$,但 $(x)'=1\to1$.可知(A),(B),(C)均不成立,由排除法可得(D)正确.事实上,由 $x\to+\infty$ 时,$f'(x)\to+\infty$ 知,总存在一个 $x_0>0$,使 $x>x_0$ 时,有 $f'(x)>M$.于是当 $x\to+\infty$ 时,总有 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)x>f(x_0)+Mx\to+\infty$.

(4)由于 $\tan x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$\ln(1-2x)\sim 2x$,$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}x^2$ 知原极限最终取决于 $a\tan x$ 与 $c\ln(1-2x)$ 比值的变化趋势,即有原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x}{c\ln(1-2x)}=\dfrac{a}{-2c}=2$,也即 $a+4c=0$,故取(B).

(5)由 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$,$\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0$,$\lim\limits_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{x}}=\infty$,知 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$,$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$,也即 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$,$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq f(0)$,故为右连续,取(B).

(6)由连续函数零值定理,应有不等式 $\begin{cases}f(0)=m^2-m>0\\f(1)=1+2m-3+m^2-m<0\end{cases}$,求解不等式得 $-2<m<0$,故取(A).

3.计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{(1+2+\cdots+n)-1})$

解:(1)原极限整理为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}$ 由 $e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x$,$e^{\sin x}\to e^{\sin0}$,所以

原极限 $=1$

(2)"$\infty-\infty$"型极限,进行合并整理,可化为重要

原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+2}{x+1}\cdot\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(\dfrac{x}{x+\cdots}\right.$

(3)"$\infty-\infty$"型极限,先变换化为"$\frac{\infty}{\infty}$"

原极限 $=\lim$

量，则应该考虑设法利用无穷小量与有界变量乘积仍为无穷小量的性质. 若极限为未定式，一般要化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，设法消去零因子或无穷大因子，再利用极限运算法则或两个重要极限或用等价无穷小代换等方法定值，下一节将介绍用罗必塔法则对未定式定值，往往更为简便.

4. 检查下列运算是否正确，若不正确，写出正确运算过程.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=0\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{4x}{1-x^2}-\frac{1+x}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x}{1-x^2}-\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+x}{1-x}=\infty-\infty=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+3}{x^2-3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)}=\frac{11}{0}=\infty$

(4) 因为 $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x+1}{x-2}$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\csc x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\frac{x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$

(6) 因为 $\sin x\sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$

答：(1) 错. $x\to\infty$ 时，$\arctan x$ 极限不存在，不能用运算法则. 正确解法是：由于 $|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，且当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 为无穷小量，故原极限$=0$.

(2) 错. $x\to 1$ 时，和式 $\frac{4x}{1-x^2}$，$\frac{1+x}{1-x}$ 的极限均不存在，不能运用极限运算法则，而且两个无穷大量之差也不一定为无穷小. 正确的解法是，先通分，化为“$\frac{0}{0}$”型再定值. 即

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)^2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)}{1+x}=0$$

(3) 错. 极限式分母为零，不能运用极限运算法则. 若要用法则，正确做法是：首先由

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3)}=\frac{0}{11}=0$$

得出　原极限$=\infty$

……下，等式 $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{x+1}{x-2}$ 不成立. 正确的解法是，根据极限概念，

……分母可消去 $(x-1)$ 因子，即有

$$\frac{+1}{-2}=-2$$

……将其中某个部分先变，正确解法同(6)，即

(6)错. 在计算和差形式的极限时，不能用等价无穷小代换，正确的做法是：用罗必塔法则定值或在使用一次罗必塔法则后，分子用等价无穷小代换定值. 即

$$\text{原极限}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\xlongequal{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

以上讨论的是在求极限过程中经常犯的错误. 说明在利用已知求极限的方法时，要十分注意使用的前提条件，不能在允许的条件之外想当然地进行极限运算.

5. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln x+(x-e)e^{(x-e)t+x}}{1+(x-e)e^{(x-e)t+k}}$ $(k\leqslant e, x>0)$，求 $f(x)$，$f(x)$的反函数$g(x)$，并讨论函数 $g(x)$的连续性.

解：极限含参变量应讨论. 当 $x>e$ 时，$e^{(x-e)t+x}\to+\infty$，故 $f(x)=e^{x-k}$. 当 $x<e$ 时，$e^{(x-e)t+x}\to 0$，故 $f(x)=\ln x$. 当 $x=e$ 时，$f(x)=\ln e=1$，于是有

$$f(x)=\begin{cases}e^{x-k} & e<x<+\infty\\ \ln x & 0<x\leqslant e\end{cases}$$

$f(x)$为分段函数，应分段处理. 当 $e<x<+\infty$时，由 $y=e^{x-k}$，得 $x=\ln y+k$，即 $y=\ln x+k$，$1<x<+\infty$；当 $0<x\leqslant e$ 时，由 $y=\ln x$，得 $x=e^y$，即 $y=e^x$，$-\infty<x\leqslant 1$，综上讨论

$$g(x)=\begin{cases}\ln x+k & 1<x<+\infty\\ e^x & -\infty<x\leqslant 1\end{cases}$$

函数 $g(x)$在各自分段开区间对应为初等函数，连续. 对于分段点 $x=1$ 处，由

$\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x+k)=k$，$\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}e^x=e$ 且 $g(1)=e$，知当 $k=e$ 时，$g(x)$在$x=1$ 处连续，且在其定义域内连续. 当 $k\neq e$ 时，$y=g(x)$有一个间断点 $x=1$.

6. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，求$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解：欲求极限，需先确定 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. 由已知有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=3$，从而有 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=0$，进一步有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=3$，也即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$. 于是

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}/x=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$$

7. 设 $f(x)$是关于 x 的三次多项式，且有$\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to 4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1$，求$\lim\limits_{x\to 3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

解：由 $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to 4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1$，知多项式 $f(x)$ 必含因子 $(x-2a)$和$(x-4a)$，于是可设

$$f(x)=k(x-2a)(x-4a)(x-b)\qquad b,k\text{ 为待定系数}$$

并有 $$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to 2a}k(x-4a)(x-b)=-2ak(2a-b)=1$$

$$\lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=\lim_{x\to 4a}k(x-2a)(x-b)=2ak(4a-b)=1$$

联立方程 $\begin{cases}-2ak(2a-b)=1\\ 2ak(4a-b)=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}k=\dfrac{1}{2a^2}\\ b=3a\end{cases}$

所以 $$\lim_{x\to 3a}\frac{f(x)}{x-3a}=\lim_{x\to 3a}\frac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)=-\frac{1}{2}$$

8. 某玩具厂每天生产 60 个玩具，其成本为 300 元，若每天生产 80 个玩具，其成本为 340 元. 求其线性成本函数，问每天的固定成本和生产一个玩具的可变成本以及平均成本各多少？

解：设该厂每天玩具产量为 x 个，则其线性成本函数为 $C(x)=a+bx$（单位：元），由已知 $C(60)=300$，$C(80)=340$，得方程组

$\begin{cases}a+60b=300\\ a+80b=340\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=180\\ b=2\end{cases}$

因此，该厂生产成本函数为 $C(x)=180+2x$，每天固定生产成本为 $C(0)=a=180$ 元，生产一个玩具的可变成本为 $b=2$ 元，每天生产 x 单位玩具的平均单位成本为

$$\frac{C(x)}{x}=\frac{a}{x}+b.$$

9. 设某商品的需求函数为 $Q_d=15-0.4p$，总成本函数为 $C=12+0.3Q_d$，求该商品总利润对于销售价格的函数.

解：当销售量为 Q_d 时，总收入为

$$R(p)=Q_dp=(15-0.4p)p$$

于是总利润关于销售价格的函数为

$$\begin{aligned}L(p)&=R(p)-C(Q_d)\\&=(15-0.4p)p-[12+0.3(15-0.4p)]\\&=15.12p-0.4p^2-16.5\end{aligned}$$

（三）练习与答案

1. 填空.

(1) 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$________，其定义域为________.

(2) 设函数 $f(x)$ 满足等式 $2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$，则 $f(x)=$______.

(3) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\frac{x}{t^2}}-1}{e^{\frac{x}{t^2}}+1}$，则 $f(x)=$________.

(4) 已知 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 为等价无穷小，则 $a=$________.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdot\cdots\cdot(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}=$______.

(6)已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1000}}{n^k-(n-1)^k}=A\neq 0$,则 $k=$ 1001, A $=$ 1 .

(7) 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{x^k} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ $(a\neq 0)$为连续函数,则 $k=$ ______,
$a=$ ______.

(8)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\leqslant 0\\ x^2+a & 0<x\leqslant 1\\ bx & 1<x\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,则 $a=$ ________,
$b=$ ________.

(9)要使方程 $3x^2+(m-5)x+m^2-m-2=0$ 的两根分别满足 $0<x_1<1$ 和 $1<x_2<2$,实数 m 的取值范围应是________.

2. 选择题(每小题给出的四个选项中,只有一项正确).

(1)下面(　)中两函数相同.

(A)$y=x$　　　　$y=\arctan(\tan x)$

(B)$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$　　　　$y=\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

(C)$y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$　　　　$y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

(D)$y=\ln x^2$　　　　$y=2\ln x$

(2)设 $g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$　$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$
则 $g[f(x)]=$(　).

(A)$\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B)$\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

(C)$\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

(3)设 $f(x)$可导且单调增,则(　　)也单调增.

(A)$f(\sin x)$　　(B)$\dfrac{1}{f(-x)}$

(C)$f(f(x))$　　(D)$f'(x)$

(4)函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x+1}} & x<-1\\ \ln(1-x^2) & -1<x<1\\ x^2\sin x & 1\leqslant x\end{cases}$ 当(　)时为
无穷大量.

(A)$x\to-\infty$　　(B)$x\to+\infty$

(C)$x\to 1$　　(D)$x\to -1$

(5)当 $x\to 0$ 时,$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 $n=$(　).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

(6)曲线 $g=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 有(　)条渐近线.

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

(7)函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,则(　)也在 (a,b) 内连续.

(A)$\dfrac{1}{f(x)}$　(B)$\ln|f(x)|$　(C)$\sqrt[3]{f^2(x)}$　(D)$\arcsin f(x)$

(8)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x}{1+x^{2n}}$,则函数 $f(x)$(　).

(A)存在间断点 -1　(B)存在间断点 0

(C)存在间断点 1　(D)不存在间断点

3. 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}})$　$(x>0)$

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$　(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-4}\right)^x$

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3}{3x^2+2x+1}(\cos x+\sin x)$　(6)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}\sin\dfrac{2}{x}$

(7)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^x$　(8)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$

4. 讨论下列函数的连续性.

(1)$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$　(2)$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\sin x\pi)^n-1}{(1+\sin x\pi)^n+1}$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & -\dfrac{4}{5}<x<\dfrac{3}{5}\\ a+bx & \text{其他}.\end{cases}$,试确定常数 a,b 使 $f(x)$ 在其定义域内连续.

6. 若极限 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+cg(x)]$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在,则极限 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 是否存在?试证明你的结论.其中 c 为非零常数.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $a<c<d<b$,证明存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$.

8. 证明方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0$,均为常数)至少有一个值不大于 $a+b$ 的正根.

9. 设某商店以每件 a 元的价格出售某种商品,可销售 1 000 件.若在此基础上降价 10%,最多可再售 300 件,又知该商品每件进价为 b 元,写出销售该商品的利润与进货数 x 的函数关系.

10. 某家用电器每台售价为 1 200 元,每月可销售 1 000 台,每台售价降为 1 000 元,每月可增销 500 台.试求该电器的线性需求函数,并将销售收入表示成销售量 x 的函数.

【答案】

1. (1)$\sqrt{\ln(1-x)}, x\leqslant 0$　(2)$\frac{x}{x+1}$　(3)$\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$　(4)$-\frac{3}{2}$

(5)$n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$　(6)$1001, \frac{1}{1001}$　(7)$3, \frac{1}{3}$　(8)$-2<m<-1$

2. (1)B　(2)D　(3)C　(4)D　(5)C　(6)B　(7)C　(8)A

3. (1)0　(2)$\ln x$　(3)1　(4)$e^{\frac{7}{5}}$　(5)0　(6)2　(7)e^2　(8)1

4. (1)$x\neq 0$ 时连续　(2)x 为非整数时连续

5. $a=\frac{5}{7}, b=\frac{1}{7}$　6. 不存在　7. 8. (略)

9. $L(x)=\begin{cases}ax-bx & 0<x\leqslant 1\ 000\\ 1\ 000a+(x-1\ 000)0.9a-bx & 1\ 000<x\leqslant 1\ 300\\ 1\ 270a-bx & 1\ 300<x\end{cases}$

10. $x=4\ 000-2.5p$. $R(x)=1\ 600x-0.4x^2$

二、一元函数微分学

(一)内 容 提 要

1. 导数与微分的概念.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

或

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并称极限值为 $f(x)$ 的导数，记作 $f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$，或$\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$. 如果左极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$和右极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则分别称为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数和右导数，并记为 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导且导数为 A 的充分必要条件是：

$$f'(x_0)=A=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$$

函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则必在 x_0 处连续.

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且存在导函数 $f'(x)$，$f'(x)$ 也可记为 y'，$\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df}{dx}$.

导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是，$f'(x_0)$ 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率. 在经济学中，$f'(x)$ 通常表示经济变量 $f(x)$ 的边际值. 例如，边际成本 $C'(x)$ 近似表示产量

为 x 时再生产一个单位产品所需增加的成本；边际收入 $R'(x)$ 近似表示销量为 x 时，再销售一个单位产品所增加或减少的收入. 设有经济函数 $y=f(x)$，称 $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ 为该经济函数在点 x 处的(点)弹性，记为 $\frac{Ey}{Ex}$，它表示经济变量 x 变动百分之一时，经济变量 y 相应变动的百分比. 经济学中比较商品需求弹性大小时，通常是指弹性的绝对值. 即 $\frac{EQ}{EP}=-\frac{PdQ}{QdP}$，其中 Q 为商品需求量，P 为商品价格.

设有函数 $y=f(x)$. 如果对自变量在点 x 处的改变量 Δx，函数的改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 可以表示成 $\Delta y=A\Delta x+\alpha\Delta x$，其中 A 与 Δx 无关，α 是关于 Δx 的无穷小量，则称函数 $f(x)$ 在点 x 处可微(分)，并称 $\mathrm{d}y=A\Delta x$ 或 $\mathrm{d}f(x)=A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的微分. 函数 $f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x 处可导，且有 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

2. 微分法.

设函数 $u(x)$，$v(x)$ 可导，则有导数运算公式：

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$$

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{1}{v^2(x)}[u'(x)v(x)-u(x)v'(x)]$$

相应地，有微分运算公式：

$$\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=\mathrm{d}u(x)\pm \mathrm{d}v(x)$$

$$\mathrm{d}[u(x)v(x)]=v(x)\mathrm{d}u(x)+u(x)\mathrm{d}v(x)$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\frac{1}{v^2(x)}[v(x)\mathrm{d}u(x)-u(x)\mathrm{d}v(x)]$$

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处有导数 $\varphi'(x_0)$，函数 $y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处有导数 $f'(u_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处可导，且

$$\{f[\varphi(x)]\}'|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)$$

设函数 $x=\varphi(y)$ 在 y_0 处可导，且其反函数 $y=f(x)$ 存在，则函数 $y=f(x)$ 在 y_0 的对应点 $x_0=\varphi(y_0)$ 处可导，且有

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

基本初等函数的导数公式：

(1) $C'=0$　　(2) $(x^a)'=ax^{a-1}$

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$，$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

(4) $(\log_a|x|)'=\frac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(5) $(\sin x)'=\cos x$　　(6) $(\cos x)'=-\sin x$

(7) $(\tan x)'=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$　　(8) $(\cot x)'=-\csc^2 x=-\frac{1}{\sin^2 x}$

(9) $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$　　(10) $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$