普通高等教育“十一五”国家级规划教材《大学文科数学》(第二版)配套学习指导书

大学文科数学学习指导(附习题解答)

严守权　姚孟臣　张伦传　编著

中国人民大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材《大学文科数学》（第二版）配套学习指导书

大学文科数学学习指导（附习题解答）

严守权　姚孟臣　张伦传　编著

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学学习指导(附习题解答)/严守权等编著.
北京：中国人民大学出版社，2008
ISBN 978-7-300-09781-7

Ⅰ.大…
Ⅱ.严…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 149384 号

大学文科数学学习指导(附习题解答)
严守权　姚孟臣　张伦传　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010-62511242 (总编室)		010-62511239 (出版部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2008 年 10 月第 1 版
印　　张	22.5　插页 1	**印　　次**	2008 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	411 000	**定　　价**	29.00 元

前　言

本书是与普通高等教育“十一五”国家级规划教材《大学文科数学》(第二版)(严守权、姚孟臣、张伦传、徐西林编著)配套的学习指导书.

本书每章由五部分内容组成.

一、内容提要　列出本章的基本概念、基本计算方法和公式,加深读者对这些内容的熟悉、理解和记忆,避免一些概念性错误.

二、基本要求　说明本章学习中应注意的重点、难点,明确学习要求.

三、典型例题分析　根据各章的知识点和问题类型的顺序安排典型例题分析,通过对各种典型例题的详尽分析,巩固和加深对基本概念的理解,增强各知识点之间的相互联系,扩展和活跃解题思路,提高综合分析问题和应用所学知识解决问题的能力.

典型例题的形式有:(1) 单项选择题(四选一,以基本概念为主);(2) 填空题(以基本运算为主);(3) 解答题(以概念性的计算题、综合题为主,还配有少量的证明题).

四、训练题　为了使读者进行更多的解题能力的训练,也为了弥补教材中习题数量及题型单一的不足,本书每章都选编了一定数量的与“典型例题分析”搭配的习题,供读者练习.

五、训练题解答　提供了所有训练题的详细解答.

此外,在全书最后,附有《大学文科数学》(第二版)的全部习题解答. 由于该教材未提供习题的答案,因此本书提供了教材的习题详解,将帮助读者解决课程学习中遇到的困难.

大学文科数学是在大学文科学生中开展的文化素质教育课程,这对于广大文科学生领会数学精神,增强思维能力,适应现代科学技术飞速发展的社会环境,都是十分必要的. 而数学思维能力的训练通常需要在求解一定数量的数学问题的过程中实现. 说到解题,不妨引用著名数学家、教育家乔治·波利亚(G. Polya)的一段名言,“解题可以认为是最富有特征的活动. ……解题是一种本领,就像游泳、滑雪、弹钢琴一样,你只能在模仿与实践中才能学会. ……你想在解题中得到最大的收获,就应该在新做的题目中找到它的特征,那些特征在求解其他问题时,能起到指导作用. 一种解题方法,若是经过你自己努力得到的,或是从别人那里学来的或听来的,只要经过自己的体验,那么对你来说,它就是一种楷模,碰上类似问题时,就成为你仿照的模型. ”希望这段话能

引领读者到数学的海洋中去模仿，去实践，去体验，并能从中得到乐趣.

由于编者水平所限，本书错误和不妥之处在所难免，欢迎广大读者批评指正.

值得提出的是，中国人民大学出版社为本书出版付出很大心血，对此，我们表示衷心的感谢.

编者

2008 年 3 月

目　录

第一篇　矩阵与线性方程组

第二篇　变量的数学——微积分

第三篇 随机数学——概率论与数理统计

第一篇　矩阵与线性方程组

第一章　矩阵的概念与运算

一、内 容 提 要

1. 矩阵的概念

$m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成 m 行 n 列的表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 当 $m=n$ 时，矩阵也称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵. 其中 $m\times 1$ 矩阵又称为 m 维列向量，$1\times n$ 矩阵又称为 n 维行向量.

2. 矩阵的运算

矩阵的加法和数乘矩阵

矩阵的加法：设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，定义 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

数与矩阵的乘积：设 k 为实常数，则定义 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

运算律：矩阵的加法和数乘称为矩阵的线性运算，线性运算满足交换律，结合律，分配律.

矩阵与矩阵的乘积

矩阵与矩阵的乘积：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})$，$\boldsymbol{B}=(b_{kj})$分别为 $m\times l$，$l\times n$ 矩阵，则定义矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 乘积为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$为 $m\times n$ 矩阵，且 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}=\sum\limits_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}$.

矩阵的幂：对方阵 $\boldsymbol{A}$，k（k 为自然数）个 $\boldsymbol{A}$ 相乘称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，即 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}$.

运算律：矩阵的乘法满足结合律，分配律，但不满足交换律和消去律，即一般地 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时不一定有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

矩阵的转置

矩阵的转置：设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，将 $\boldsymbol{A}$ 的行与列的元素交换位置，称为矩阵的转置，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$.

矩阵转置的运算性质：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$　　(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

3. 方阵的行列式

行列式的概念

n 阶行列式、余子式与代数余子式：n^2 个元素排成 n 行 n 列，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 在 $n(n\geqslant 2)$ 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列元素划去，余下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素构成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，并称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

n 阶行列式的值：n 阶行列式等于任意一行(列)元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n$$

或　$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\quad j=1,2,\cdots,n$$

式中，$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$，$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$ 分别称为行列式 D 的第 i 行展开式和第 j 列展开式.

二阶、三阶行列式定值法(对角线法)：二阶、三阶行列式为全体取自不同行不同列的元素乘积的代数和，其中由主对角线及与主对角线平行的连线连

接的各项乘积符号为正，由副对角线及与副对角线平行的连线连接的各项乘积符号为负，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

行列式的基本性质及推论

(1) 行列式和它的转置行列式相等.

(2) 数乘行列式等于用这个数乘行列式中任意一行(列).

(3) 行列式两行(列)互换，行列式改变符号.

推论 1 若行列式中有两行成比例(含相等)，则其值为零.

推论 2 行列式某行(列)的代数余子式乘以另一行对应元素，其和为零，即

$$D = a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = 0, \quad i \neq s$$

(4) 如果行列式中某一行(列)的所有元素都是两个数之和，则此行列式等于两个行列式之和，这两个行列式的这一行(列)的元素为对应两个加数之一，其余各行(列)元素与原行列式相同.

(5) 将行列式的某行(列)的 k 倍加至另一行(列)，其值不变.

克莱姆法则

若非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，则该方程组有唯一解 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$，其中 D_j 是将 D 的第 j 列用常数项替换后的行列式. 若对应齐次方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则该齐次线性方程组仅有零解.

方阵的行列式

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，则 $|\boldsymbol{A}| = |a_{ij}|$ 称为方阵的行列式. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

若方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的行列式非零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.

4. 几类特殊的矩阵

单位矩阵 主对角线上元素均为1,其余元素为零的方阵,称为单位矩阵,记为$\boldsymbol{I}$. 对于任意方阵$\boldsymbol{A}$,记$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}$.

三角矩阵 主对角线下方元素全为零的方阵称为上三角矩阵;主对角线上方元素全为零的方阵称为下三角矩阵,上、下三角矩阵统称三角矩阵. 同结构的三角矩阵间的和与乘积,仍为同结构的三角矩阵.

对角矩阵 除对角线上的元素外,其余元素为零的方阵称为对角矩阵.

对称矩阵 若方阵$\boldsymbol{A}$满足条件$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,则称矩阵$\boldsymbol{A}$为对称矩阵.

伴随矩阵 由方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的所有元素的代数余子式$A_{ij}$构成的矩阵$(A_{ji})$,称为方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵,记作$\boldsymbol{A}^*$.

5. 矩阵的逆和逆矩阵

逆矩阵的概念 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵,如果存在n阶矩阵$\boldsymbol{B}$,使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$,则称$\boldsymbol{A}$为可逆矩阵,并称$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{A}$的逆矩阵,记作$\boldsymbol{A}^{-1}$. 若$\boldsymbol{A}$可逆,则$\boldsymbol{A}^{-1}$唯一.

逆矩阵性质 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶可逆矩阵,则:

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$ (2) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$

(3) $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}(k\neq0)$ (4) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

(5) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$

可逆条件及伴随矩阵求逆法 矩阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$\boldsymbol{A}$非奇异,即$|\boldsymbol{A}|\neq0$,且$\boldsymbol{A}$可逆时,$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

二、基 本 要 求

1. 矩阵的概念

(1) 理解矩阵的概念. 了解矩阵相等的概念及零矩阵、方阵的概念.

(2) 掌握单位矩阵、对角矩阵、上(下)三角矩阵的概念及其结构特点.

2. 矩阵的加法、数乘、乘法、矩阵的幂和转置运算

矩阵的加法、数与矩阵的乘法

(1) 掌握矩阵的数乘与矩阵的加法运算的定义及相关的运算律. 知道线性运算的概念.

(2) 能够熟练进行矩阵的数乘与矩阵的加法运算，包括求解简单的线性的矩阵方程.

矩阵的乘法和矩阵的幂

矩阵乘法是矩阵运算的重点之一.

(1) 要熟练掌握矩阵乘法的概念和运算，注意矩阵运算的前提，即左乘矩阵的列数应等于右乘矩阵的行数.

(2) 掌握矩阵乘法的运算律，尤其要注意与数的乘法在运算律上的不同，即矩阵乘法无交换律和消去律，即一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，且当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时不一定有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 知道矩阵可交换的概念. 如果矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换.

(3) 掌握矩阵的幂的概念和运算，知道 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}$. 注意矩阵的幂与数的乘方在运算律上的区别，即 $(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$，由 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，未必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，由此，代数学的常用公式不能套用到矩阵运算中，如 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 未必成立.

(4) 熟悉一些特殊矩阵(如单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵)在矩阵乘法运算中的作用.

矩阵的转置

(1) 掌握矩阵转置的概念及其运算性质，熟练掌握相关的运算.

(2) 掌握矩阵对称及对称矩阵的概念，能判断矩阵的对称性.

3. 方阵的行列式

行列式的概念

(1) 掌握二、三阶行列式的定义，能用对角线法熟练计算二、三阶行列式，并明确对角线法只适用于二、三阶行列式.

(2) 理解余子式、代数余子式和 n 阶行列式的概念. 重点理解用递推法定义 n 阶行列式的方法，并能利用按行(列)展开的方法(即降阶法)计算高阶行列式.

(3) 掌握行列式的基本性质及推论.

行列式的计算

(1) 二、三阶行列式可直接用“对角线法则”.

(2) 化上(下)三角行列式法，即利用行列式性质化为三角行列式直接计算. 有些特殊结构，可利用性质化为两行(列)成比例来求值.

(3) 降阶法. 利用行列式定义，按含零元素较多的行(列)展开，化为较低阶的行列式计算.

(4) 了解一些特殊结构的行列式的计算方法和结果，如：

三角行列式：其值为对角线元素的乘积.

n 阶副对角线行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (a_i - a_j)$$

方阵的行列式

(1) 了解方阵的行列式的概念. 注意区分方阵与方阵行列式在概念和符号上的差异.

(2) 掌握与矩阵运算相关的行列式计算公式，即：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，k 为常数，则有

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{BA}|, \quad |k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$$

(3) 掌握非奇异矩阵、伴随矩阵的概念，知道伴随矩阵的运算公式：

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}, \quad |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$$

克莱姆法则

掌握克莱姆法则，并能用克莱姆法则求解线性方程组.

4. 矩阵可逆和逆矩阵的概念

矩阵的逆及逆矩阵的概念是矩阵运算中的重点之一.

(1) 理解矩阵的逆和逆矩阵的概念及其运算性质.

(2) 掌握矩阵可逆的充分必要条件. 能够判断矩阵的可逆性.

(3) 掌握用伴随矩阵求逆矩阵的方法，并能用逆矩阵求解矩阵方程.

三、典型例题分析

1. 矩阵的概念及其运算

类型 1 矩阵的加法和数乘矩阵

［**例 1**］ 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$a,b,c$ 为实数，且 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$，则 $a=$________，$b=$________，$c=$________.

解 $aA+bB+cC=\begin{bmatrix}5a & 5a\\ 0 & 2a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b & 0\\ 5b & -6b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-c & -c\\ -c & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,由矩阵相等则对应元素相等,得方程组

$$\begin{cases}5a+b-c=1\\ 5a-c=0\\ 5b-c=0\\ 2a-6b+c=1\end{cases},\quad 解得 a=1,b=1,c=5$$

[**例 2**] $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 4 & 0 & -1\end{bmatrix}$,满足方程

$$\begin{cases}2\boldsymbol{X}-3\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}\\ 3\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{cases}$$

求 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$.

分析 矩阵的线性运算满足与数字类似的运算律,因此,可以用类似中学求解线性方程组的方法求解.

解 求解矩阵方程组$\begin{cases}2\boldsymbol{X}-3\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}\\ 3\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{cases}$,得 $\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{11}(7\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$,$\boldsymbol{Y}=\dfrac{1}{11}(\boldsymbol{A}+8\boldsymbol{B})$,即

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{11}\left(\begin{bmatrix}0 & 7 & 21\\ 7 & -35 & 0\\ 0 & 0 & -7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 4 & 0 & -1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}0 & 6 & 21\\ 8 & -32 & 0\\ 4 & 0 & -8\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}=\frac{1}{11}\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -8 & 0\\ 8 & 24 & 0\\ 32 & 0 & -8\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}0 & -7 & 3\\ 9 & 19 & 0\\ 32 & 0 & -9\end{bmatrix}$$

类型 2 矩阵的乘法和矩阵的幂

[**例 3**] 单项选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 分别为 4×2,2×4,2×2 矩阵,下列运算能够进行的是( ).

A. $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{C}$ B. $\boldsymbol{ACB}$

C. $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{CB}$ D. $\boldsymbol{ABC}$

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则(　　).

A. $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$　　　　B. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$

C. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　　　D. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$

答　(1) B　(2) D

解　(1) 矩阵乘法成立的前提是左乘矩阵的列数等于右乘矩阵的行数，依此判断，D 不正确，又两矩阵的加法与减法运算成立的前提是两矩阵为同型矩阵，依此判断，A、C 不正确，仅 B 符合要求，故取 B.

(2) 矩阵乘法无交换律，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，未必 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，也未必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，由 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$，知 D 正确.

[**例 4**]　填空题

(1) 已知 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ a \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ 6 \\ -b \end{bmatrix}$，则 $a=$________，$b=$________.

(2) 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(3,-2,1)$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A}^{11}=$________.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，$f(x)=x^2-2x+1$，则 $f(\boldsymbol{A})=$________.

解　(1) 由于

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ a \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4a-3 \\ 6 \\ 2a+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ 6 \\ -b \end{bmatrix}$$

从而有 $4a-3=b,2a+3=-b$，解得 $a=0,b=-3$.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}(3,-2,1)=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha\beta}=(3,-2,1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}=-1$，由乘法结合律.有

$$\boldsymbol{A}^{11}=\underbrace{(\boldsymbol{\beta\alpha})\cdot(\boldsymbol{\beta\alpha})\cdot\cdots\cdot(\boldsymbol{\beta\alpha})}_{11\text{个}}=\boldsymbol{\beta}\cdot\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})\cdot(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})\cdot\cdots\cdot(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})}_{10\text{个}}\cdot\boldsymbol{\alpha}$$

$$=(-1)^{10}\boldsymbol{\beta\alpha}=\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(3) 由 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$，$2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$，从而有

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

［**例 5**］ 计算下列各题.

(1) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&2&-1&1\\1&4&-6&3\\3&-5&4&2\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}6&3&-1&0\\2&1&-5&1\\7&4&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&c&0\\0&0&0&d\end{bmatrix}$

(3) $(1,1,1)\begin{bmatrix}1&3&2&1\\2&-4&5&6\\-1&3&-2&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

(4) $\boldsymbol{A}^{2008}-2\boldsymbol{A}^2$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

分析 矩阵的乘法运算是矩阵运算中应重点掌握的内容之一.运算时注意，对左乘和右乘矩阵的行数与列数的要求，并注意一些特殊矩阵(如对角矩阵，数量矩阵，单位矩阵等)左乘或右乘矩阵时具有的实际意义，对于矩阵幂的运算，可利用性质化简，并注意从中找出规律性.

解 (1) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&2&-1&1\\1&4&-6&3\\3&-5&4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-5&4&2\\1&4&-6&3\\6&2&-1&1\end{bmatrix}$

结果表明：若将单位矩阵两行交换位置后左乘任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，其实际效果是将 $\boldsymbol{A}$ 的对应两行交换位置.读者可以尝试，将单位矩阵交换两列后右乘 $\boldsymbol{A}$ 得到的结果.有关运算的规律性讨论将会在矩阵的初等变换的相关章节出现.

(2) $\begin{bmatrix}6&3&-1&0\\2&1&-5&1\\7&4&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&c&0\\0&0&0&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6a&3b&-c&0\\2a&b&-5c&d\\7a&4b&3c&d\end{bmatrix}$

结果表明：将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘对角矩阵，相当于用对角矩阵的对角线元素，分别乘以对应列的元素.读者可以类似地给出对角矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$ 的情况.

(3) $(1,1,1)\begin{bmatrix}1&3&2&1\\2&-4&5&6\\-1&3&-2&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=(2,2,5,2)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=11$

结果表明：将(1,1,1)左乘 $\boldsymbol{A}$，相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的各列元素相加，将(1,1,1,1)