北大燕园

2010年 李永乐·李正元

考研数学 2

# 数学 复习全书

数学二

【理工类】

● 主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐

书后附习题详解

国家行政学院出版社

2010年李永乐·李正元考研数学②

# 数学复习全书

## 【理工类·数学二】


主 编 北京大学 李正元

清华大学 李永乐

编 者 （以姓氏笔画为序）

北京大学 刘西垣

北京大学 李正元

清华大学 李永乐

北京大学 范培华

中国人民大学 袁荫棠



国家行政学院出版社

·北 京·

**图书在版编目(CIP)数据**

数学复习全书.2,理工类/李正元等主编. -北京:国家行政学院出版社,2005
ISBN 978-7-80140-446-6

Ⅰ.数... Ⅱ.李... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 142341 号

| | |
|---|---|
| **书　　名** | 数学复习全书【理工类·数学二】 |
| **作　　者** | 李正元　李永乐 |
| **责任编辑** | 李锦慧 |
| **出版发行** | 国家行政学院出版社 |
| | (北京市海淀区长春桥路6号　100089) |
| **电　　话** | (010)88517082 |
| **经　　销** | 新华书店 |
| **印　　刷** | 北京市朝阳印刷厂 |
| **版　　次** | 2009年2月北京第4版 |
| **印　　次** | 2009年2月北京第1次印刷 |
| **开　　本** | 787毫米×1092毫米　16开 |
| **印　　张** | 27 |
| **字　　数** | 720千字 |
| **书　　号** | ISBN 978-7-80140-446-6/O·39 |
| **定　　价** | 38.00元 |

# 前　　言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学，达到硕士学习阶段应具备的数学能力，提高考研应试水平，以合格的数学成绩任国家挑选，作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神，深入研究了近年来考研命题的特点及动态，并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验，编写了这本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》。在编写时，作者特别注重与学生的实际相结合，注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下四个部分构成：

**一、内容概要与重难点提示**——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点，让考生弄清各知识点之间的相互联系，以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

**二、考核知识要点讲解**——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述，并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析，指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误，同时给出了相应的注意事项，以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

**三、常考题型及其解题方法与技巧**——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类，归纳总结了各种题型的解题方法，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能综合、灵活地解决问题。

**四、题型训练及解答**——本部分精选了适量的自测题，并附有详细解答。只有适量的练习才能巩固所学知识，复习数学必须做题。为了让考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，作者特优化设计了与真题相仿的实战训练题编写在《考研数学全真模拟经典400题》一书中，以供考生选用。

特别需要强调的是，本书是针对报考数学二的考生而编写的，是一种新的尝试，希望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编　者

2009年2月

# 目录

## 第一篇 高等数学


第一章 极限、连续与求极限的方法 …… (1)

内容概要与重难点提示 …… (1)

考核知识要点讲解 …… (1)

一、极限的概念与性质 …… (1)

二、极限存在性的判别（极限存在的两个准则） …… (3)

三、求极限的方法 …… (4)

四、无穷小及其阶 …… (12)

五、函数的连续性及其判断 …… (14)

常考题型及其解题方法与技巧 …… (18)

题型训练 …… (29)

第二章 一元函数的导数与微分概念及其计算 …… (31)

内容概要与重难点提示 …… (31)

考核知识要点讲解 …… (31)

一、一元函数的导数与微分 …… (31)

二、按定义求导及其适用的情形 …… (35)

三、基本初等函数导数表，导数四则运算法则与复合函数微分法则 …… (36)

四、复合函数求导法的应用——由复合函数求导法则导出的微分法则 …… (38)

五、分段函数求导法 …… (40)

六、高阶导数及 $n$ 阶导数的求法 …… (42)

七、一元函数微分学的简单应用 …… (44)

常考题型及其解题方法与技巧 …… (46)

题型训练 …… (56)

第三章 一元函数积分概念、计算及应用 …… (58)

内容概要与重难点提示 …… (58)

考核知识要点讲解 …… (58)

一、一元函数积分的概念、性质与基本定理 …… (58)

二、积分法则 …… (65)

三、各类函数的积分法 …… (73)

四、反常积分（广义积分） …… (76)

五、积分学应用的基本方法——微元分析法 …… (78)

六、一元函数积分学的几何应用 …… (79)

七、一元函数积分学的物理应用 …… (85)

常考题型及其解题方法与技巧 …… (88)

题型训练 …… (113)

第四章 微分中值定理及其应用 …… (116)

内容概要与重难点提示 …… (116)

考核知识要点讲解 …… (116)

一、微分中值定理及其作用 …… (116)

二、利用导数研究函数的变化 …… (118)

三、一元函数的最大值与最小值问题 …… (123)

常考题型及其解题方法与技巧 …… (124)

题型训练 …… (144)

第五章 一元函数的泰勒公式及其应用 …… (146)

内容概要与重难点提示 …… (146)

考核知识要点讲解 …… (146)

一、带皮亚诺余项与拉格朗日余项的 $n$ 阶泰勒公式 …… (146)

二、带皮亚诺余项的泰勒公式的求法 …… (147)

三、一元函数泰勒公式的若干应用 …… (148)

常考题型及其解题方法与技巧 …… (151)

题型训练 …… (156)

第六章 微分方程 …… (157)

内容概要与重难点提示 …… (157)

考核知识要点讲解 …………………… (157)
一、基本概念 ………………………… (157)
二、一阶微分方程 …………………… (158)
三、可降阶的高阶方程 ……………… (159)
四、线性微分方程解的性质与结构 ……………………………………… (160)
五、二阶和某些高阶常系数齐次线性方程 ……………………………… (161)
六、二阶常系数非齐次线性方程 … (162)
七、含变限积分的方程 ……………… (163)
八、应用问题 ………………………… (164)
常考题型及其解题方法与技巧 ……… (164)
题型训练 …………………………… (173)
第七章 多元函数微分学 …………… (175)
内容概要与重难点提示 ……………… (175)
考核知识要点讲解 …………………… (175)
一、多元函数的概念、极限与连续性 ……………………………………… (175)
二、多元函数的偏导数与全微分 … (177)
三、多元函数微分法则 ……………… (180)
四、复合函数求导法的应用——隐函数微分法 ………………………… (182)
五、复合函数求导法则的其他应用 ……………………………………… (185)
六、多元函数极值充分判别法 …… (186)
七、多元函数的最大值与最小值问题 ……………………………………… (187)
常考题型及其解题方法与技巧 ……… (190)
题型训练 …………………………… (198)
第八章 二重积分 ………………… (200)
内容概要与重难点提示 ……………… (200)
考核知识要点讲解 …………………… (200)
一、二重积分的概念与性质 ……… (200)
二、在直角坐标系中化二重积分为累次积分 ………………………… (202)
三、二重积分的变量替换 ………… (203)
四、如何应用计算公式计算或简化二重积分 ………………………… (205)
常考题型及其解题方法与技巧 ……… (208)
题型训练 …………………………… (215)

## 第二篇 线性代数

第一章 行列式 …………………… (218)
内容概要与重难点提示 ……………… (218)
考核知识要点讲解 …………………… (218)
一、行列式的概念、展开公式及其性质 ……………………………… (218)
二、有关行列式的几个重要公式 … (222)
三、关于克莱姆（Cramer）法则 … (223)
常考题型及其解题方法与技巧 ……… (224)
题型训练 …………………………… (234)
第二章 矩阵及其运算 ……………… (236)
内容概要与重难点提示 ……………… (236)
考核知识要点讲解 …………………… (236)
一、矩阵的概念及几类特殊方阵 … (236)
二、矩阵的运算 ……………………… (238)
三、矩阵可逆的充分必要条件 …… (240)
四、矩阵的初等变换与初等矩阵 … (240)
五、矩阵的等价 ……………………… (241)
常考题型及其解题方法与技巧 ……… (242)
题型训练 …………………………… (259)
第三章 $n$ 维向量 ………………… (262)
内容概要与重难点提示 ……………… (262)
考核知识要点讲解 …………………… (262)
一、$n$ 维向量的概念与运算 ………… (262)
二、线性组合与线性表出 ………… (263)
三、线性相关与线性无关 ………… (264)
四、线性相关性与线性表出的关系 ……………………………………… (265)
五、向量组的秩与矩阵的秩 ……………………………………… (265)
六、矩阵秩的重要公式 …………… (266)
七、Schmidt 正交化 ………………… (267)
常考题型及其解题方法与技巧 ……… (267)
题型训练 …………………………… (284)
第四章 线性方程组 ………………… (286)
内容概要与重难点提示 ……………… (286)
考核知识要点讲解 …………………… (286)
一、线性方程组的各种表达形式及相

关概念 …………………………… (286)
二、基础解系的概念及其求法 …… (286)
三、齐次方程组有非零解的判定 … (287)
四、非齐次线性方程组有解的判定 …………………………………… (287)
五、非齐次线性方程组解的结构 … (288)
六、线性方程组解的性质 ………… (288)
**常考题型及其解题方法与技巧** ……… (288)
**题型训练** ………………………………… (302)
**第五章 矩阵的特征值与特征向量** …………………………………… (304)
**内容概要与重难点提示** ………………… (304)
**考核知识要点讲解** …………………… (304)
一、矩阵的特征值与特征向量的概念、性质及求法 ……………… (304)
二、相似矩阵的概念与性质 ……… (306)
三、矩阵可相似对角化的充分必要条件及解题步骤 ………………… (307)
**常考题型及其解题方法与技巧** ……… (308)
**题型训练** ………………………………… (329)
**第六章 二次型** ………………………… (331)
**内容概要与重难点提示** ………………… (331)
**考核知识要点讲解** …………………… (331)
一、二次型的概念及其标准形 …… (331)
二、正定二次型与正定矩阵 ……… (333)
三、合同矩阵 …………………… (333)
**常考题型及其解题方法与技巧** ……… (334)
**题型训练** ………………………………… (346)

## 附：全书题型训练试题解答

**第一篇 高等数学** ………………… (348)
第一章 极限、连续与求极限的方法 …………………………………… (348)
第二章 一元函数的导数与微分概念及其计算 ……………………… (356)
第三章 一元函数积分概念、计算及应用 ……………………………… (361)
第四章 微分中值定理及其应用 …… (370)
第五章 一元函数的泰勒公式及其应用 …………………………………… (378)
第六章 微分方程 ………………… (382)
第七章 多元函数微分学 ………… (387)
第八章 二重积分 ………………… (394)
**第二篇 线性代数** ………………… (400)
第一章 行列式 ………………………… (400)
第二章 矩阵及其运算 ……………… (402)
第三章 $n$ 维向量……………………… (407)
第四章 线性方程组 ……………… (412)
第五章 矩阵的特征值与特征向量 … (416)
第六章 二次型 ………………………… (421)

# 第一篇　高等数学

## 第一章　极限、连续与求极限的方法

### 内容概要与重难点提示

1. 微积分中研究的对象是函数．函数概念的实质是变量之间确定的对应关系．变量之间是否有函数关系，就看是否存在一种对应规则，使得其中一个量或几个量定了，另一个量也就被唯一确定，前者是一元函数，后者是多元函数．

函数这部分的重点是：复合函数、反函数和分段函数及函数记号的运算．（这部分内容贯穿全书，不另行复习．）

2. 极限是微积分的理论基础．研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限，如连续、导数、定积分、级数等等．由此可见极限的重要性．本章的重点内容是极限．既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件，又要能准确地求出各种极限．求极限的方法很多，综合起来主要有：

① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则；　② 利用函数的连续性；
③ 利用变量替换与两个重要极限；　④ 利用等价无穷小因子替换；
⑤ 利用洛必达法则；　⑥ 分别求左、右极限；
⑦ 数列极限转化为函数极限；　⑧ 利用适当放大缩小法；
⑨ 对递归数列先证明极限存在（常用到"单调有界数列有极限"的准则），再利用递归关系求出极限；
⑩ 利用定积分求 $n$ 项和式的极限；　⑪ 利用泰勒公式；　⑫ 利用导数的定义求极限．

3. 无穷小就是极限为零的变量．极限问题可归结为无穷小问题．极限方法的重要部分是无穷小分析，或说无穷小阶的估计与分析．要理解无穷小及其阶的概念，学会比较无穷小的阶及确定无穷小阶的方法，会用等价无穷小因子替换求极限．

4. 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数．由于函数的连续性是通过极限定义的，所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限．因此这部分也是本章的重点．要掌握判断函数连续性及间断点类型的方法，特别是分段函数在连接点处的连续性．

函数的其他许多性质都与连续性有关，因此我们要了解连续函数的重要性质——有界闭区间上连续函数的有界性定理，最大值、最小值定理和中间值（介值）定理，并会应用这些性质．

### 考核知识要点讲解

#### 一、极限的概念与性质

**（一）极限的定义**

**【定义 1.1】**　$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$：　$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 $N$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$．

若 $x_n$ 存在极限（有限数），又称 $\{x_n\}$ 收敛，否则称 $\{x_n\}$ 发散．

【定义 1.2】 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$: $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正数 $X$,当 $|x| > X$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

【定义 1.3】 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$: $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正数 $\delta$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时右极限与左极限:

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A, \quad f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A.$$

### (二) 极限的基本性质与两个重要极限

**▶1. 数列极限的基本性质**

【定理 1.1】(极限的不等式性质) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$,

若 $a > b$,则 $\exists N$,当 $n > N$ 时,$x_n > y_n$; 若 $n > N$ 时,$x_n \geqslant y_n$,则 $a \geqslant b$.

【定理 1.2】(收敛数列的有界性) 设 $x_n$ 收敛,则 $x_n$ 有界 (即 $\exists$ 常数 $M > 0, |x_n| \leqslant M, n = 1,2,\cdots$).

**▶2. 函数极限的基本性质**

【定理 1.3】(极限的不等式性质) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,

若 $A > B$,则 $\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,$f(x) > g(x)$;

若 $f(x) \geqslant g(x)$ $(0 < |x - x_0| < \delta)$,则 $A \geqslant B$.

【推论】(极限的保号性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,若 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,$f(x) > 0$;若 $f(x) \geqslant 0$ $(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow A \geqslant 0$.

【定理 1.4】(存在极限的函数局部有界性) 设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,则 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某空心邻域 $U_0(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界,即 $\exists \delta > 0, M > 0$,使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,$|f(x)| \leqslant M$.

【注】 其他极限过程如 $x \to x_0 + 0, x \to x_0 - 0, x \to +\infty, x \to -\infty$ 等等也有类似的结论.

**▶3. 两个重要极限**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \left(\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1\right) \tag{1.1}$$

【例 1.1】 判断下列结论是否正确,并证明你的判断.

(Ⅰ) 若 $x_n < y_n (n > N)$,又存在极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = B$,则 $A < B$;

(Ⅱ) 设 $f(x)$ 定义在 $(a,b)$,又 $c \in (a,b)$,并存在极限 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$,则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 有界;

(Ⅲ) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$,则 $\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

【解】 (Ⅰ) 不正确. 在题设下只能保证 $A \leqslant B$,不能保证 $A < B$. 例如,$x_n = \dfrac{1}{n}, y_n = \dfrac{2}{n}$,则 $x_n < y_n$,而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

评注 对不等式 $x_n < y_n (n > N)$ 两边取极限时(以极限存在为前提),除保持不等号外还要带上等号,即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

(Ⅱ) 不正确. 这时只能保证:$\exists c$ 的一个空心邻域 $U_0(c,\delta) = \{x \mid 0 < |x - c| < \delta\}$,$f(x)$ 在 $U_0(c,$

$\delta)$ 有界，不能保证 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 有界. 例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$, $(a,b)=(0,1)$，取 $c\in(0,1)$，则 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\dfrac{1}{c}$，但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无界.

(Ⅲ) 正确. 因为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$，由存在极限的函数的局部有界性 $\Rightarrow\exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

## 二、极限存在性的判别（极限存在的两个准则）

### （一）夹逼定理

**【定理 1.5】**（数列情形） 若 $\exists N$，当 $n>N$ 时，$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且有 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a$，则

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a.$$

**【定理 1.6】**（函数情形） 设 $\exists\delta>0$，$0<|x-x_0|<\delta$ 时，$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

**【注】** 其他极限过程也有类似的结论.

### （二）单调有界数列必收敛定理

**【定理 1.7】** 若数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界，即 $x_{n+1}\geqslant x_n$ $(n=1,2,\cdots)$，并存在一个数 $M$，使得对一切的 $n$ 有 $x_n\leqslant M$，则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 $a$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，且有 $x_n\leqslant a$ $(n=1,2,\cdots)$.

若数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界，即 $x_{n+1}\leqslant x_n(n=1,2,\cdots)$，并存在一个数 $m$，使得对一切的 $n$ 有 $x_n\geqslant m$，则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 $a$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，且有 $x_n\geqslant a$ $(n=1,2,\cdots)$.

### （三）单侧极限与双侧极限的关系

**【定理 1.8】** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=A$.

对于分段函数 $f(x)=\begin{cases}g(x), & x_0-\delta<x<x_0,\\ h(x), & x_0<x<x_0+\delta,\end{cases}$ 考察 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在就要分别求

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)=\lim_{x\to x_0+}h(x)\quad 与\quad \lim_{x\to x_0-}f(x)=\lim_{x\to x_0-}g(x).$$

**【例 1.2】** 设 $f(x)=\begin{cases}2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{\ln(1+ax^2)}{x\sin x}, & x<0,\end{cases}$ 问 $a$ 为何值时 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在.

**【分析】** 分别求右、左极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$，由 $f(0+0)=f(0-0)$ 定出 $a$ 值.

**【解】** $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x}=2\lim\limits_{x\to0+}\arctan\dfrac{1}{x}=\pi$,

$$f(0-0)=\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+ax^2)}{ax^2}\cdot\frac{ax^2}{x\sin x}\right]=1\cdot a\cdot1=a(a\neq0),$$

$$f(0-0)=0 \quad (a=0).$$

由 $f(0+0)=f(0-0)$,得 $a=\pi$.因此,仅当 $a=\pi$ 时,存在 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\pi$.

**【例 1.3】** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2e^{\frac{1}{x-1}}$ 是

(A) 0. (B) $-\infty$. (C) $+\infty$. (D) 不存在但不是 $\infty$.

**【分析】** 因 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$,故要分别考察左、右极限.由于

$$\lim_{x\to 1+0}(x-1)^2e^{\frac{1}{x-1}}\xlongequal{t=\frac{1}{x-1}}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1-0}(x-1)^2e^{\frac{1}{x-1}}\xlongequal{t=\frac{1}{x-1}}\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t^2}=0,$$

因此选(D).

### (四)证明一元函数 $f(x)$ 的极限不存在常用的两种方法

**方法 1°** 若 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.当 $x\to\infty$ 时的极限式中含有 $a^x(a>0,a\neq 1)$,或 $\arctan x$,$\operatorname{arccot}x$,一定要分别求出 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 的极限值,若两者相等,则 $x\to\infty$ 时的极限存在,否则不存在.

**方法 2°** 若 $\exists x_n\to x_0, x_n\neq x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 不存在或 $\exists x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$, $y_n\to x_0(y_n\neq x_0)$,使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

**【例 1.4】** 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

**【证明】** 取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$,则均有 $x_n\to 0, y_n\to 0\ (n\to+\infty)$,但

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{y_n}=1,\text{因此}\quad \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{不存在}.$$

**评注** 类似可证:$\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

## 三、求极限的方法

### (一)利用极限的四则运算与幂指数运算法则求极限

**【定理 1.9】**

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0),\quad \lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B(A>0).$$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界,则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=0$.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty(+\infty)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty(+\infty)$ 或 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq 0\ (A>0)$,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\infty\ (+\infty).$$

(4) 设 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty\ (+\infty)$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时 $g(x)$ 有界，则

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \infty\ \ (+\infty).$$

(5) 设 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$，则

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & 0 < A < 1, \\ +\infty, & A > 1; \end{cases} \quad \lim_{x \to a} g(x)^{f(x)} = \begin{cases} +\infty, & A > 0, \\ 0, & A < 0. \end{cases}$$

(6) 设 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$，$f(x) > 0\ (0 < |x-a| < \delta)$，$\lim\limits_{x \to a} g(x) = B \neq 0$，则

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & B > 0, \\ +\infty, & B < 0. \end{cases}$$

**【注】** ① 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to a} g(x)$ 不存在也不为 $\infty$，则 $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)]$ 不存在也不为 $\infty$；若又有 $A \neq 0$，则 $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$，$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ 均不存在也不为 $\infty$。但是，当 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$，$\lim\limits_{x \to a} g(x)$ 都不存在且不为 $\infty$ 时，$f(x) \pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 的极限均不能确定，要作具体分析．

② 对 $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0 \cdot \infty$，$\infty - \infty$，$0^0$，$1^\infty$，$\infty^0$ 等各类未定式不能直接用上述运算法则．在未定式中，最基本的是 $\dfrac{0}{0}$ 与 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，其他类型应经恒等变形转化为基本类型之一．

求 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法有多种（参看题型三），其中一种技巧是设法消去分子、分母中的极限为零或 $\infty$ 因子，于是转化为可以直接用四则运算法则的情形（后面还介绍其他方法）．

**【例 1.5】** 求 $w = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x(2e^x + 1)}{[1 + (e^x + 1)^2](1 + e^x)}$.

**【解】** 这是求 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限，用相消法，分子、分母同除以 $(e^x)^2$ 得

$$w = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x + 1} \cdot \frac{2 + e^{-x}}{e^{-2x} + (1 + e^{-x})^2} = 0 \times 2 = 0,$$

其中 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x + 1} = 0$（用洛必达法则）．

### （二）利用函数的连续性求极限

(1) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 连续，按定义则有 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$．因此若不用定义可判断函数连续时，那么对连续函数求极限就是用代入法求函数值．

(2) 一切初等函数在其定义域区间上连续．因此，若 $f(x)$ 是初等函数，$a$ 属于其定义域区间，则 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$．

(3) 设 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$，若补充定义 $g(a) = A$，则 $g(x)$ 在 $x = a$ 连续．若又有 $y = f(u)$ 在 $u = A$ 处连续，则由复合函数的连续性得 $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to a} g(x)) = f(A)$．

### （三）利用变量替换法与两个重要极限求极限

通过变量替换，把求某个极限转化为求另一个极限，若后者是已知的，则问题就解决了.

（1）设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$，$\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(\varphi(x))\xlongequal{u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A$.

（若把 $x\to+\infty$ 改为 $x\to-\infty$ 或 $x\to x_0$，上述结论仍成立.）

（2）设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$f(u)$ 在 $u_0$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))\xlongequal[x\to x_0\text{ 时 }u\to u_0]{u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$.

重要极限与变量替换法相结合可求下列极限：

（1）诸如：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to x_0}(1+\varphi(x))^{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}^A,$$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$. 极限过程 $x\to x_0$ 改为其他情形也有类似结论.

（2）设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则求 $1^\infty$ 型极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot g(x)(f(x)-1)}=\mathrm{e}^A,$$

转化为求 $0\cdot\infty$ 型极限 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)(f(x)-1)=A$.

**【例 1.6】** 求 $w=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

**【解】** 先改写成

$$w=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}\cdot 3^{\frac{1}{x+1}}\left(3^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)x(x+1).$$

作变量替换，令 $t=3^{\frac{1}{x(x+1)}}-1$，则 $x\to\infty$ 时 $t\to0$ 且 $x(x+1)=\dfrac{\ln3}{\ln(1+t)}$，于是

$$w=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}\cdot\lim_{x\to\infty}3^{\frac{1}{x+1}}\cdot\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\ln3=\ln3.$$

**【例 1.7】** 求 $w=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^x$.

**【解】** 这是 $1^\infty$ 型极限，改写成 $w=\lim\limits_{x\to\infty}2\left[\left(1+\dfrac{1}{x}2^{-\frac{1}{x}}\right)^{x\cdot2^{\frac{1}{x}}}\right]^{2^{-\frac{1}{x}}}=2(\mathrm{e})^{2^0}=2\mathrm{e}$.

### （四）利用等价无穷小因子替换求极限

若 $x\to a$ 时，无穷小 $\alpha(x)\sim\alpha^*(x)$，$\beta(x)\sim\beta^*(x)$，（即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha^*(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\beta^*(x)}=1$），则

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)u(x)}{\beta(x)v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha^*(x)u(x)}{\beta^*(x)v(x)}.\text{（等式两边其中之一极限存在或为 }\infty\text{，则另一也是且相等）}\tag{1.2}$$

该结论表明：在求极限过程中等价无穷小因子可以替换.

利用等价无穷小因子替换求极限，可大大减少计算量. 但利用等价无穷小因子替换求极限应注意下面两点：

（1）只要求在求极限的乘除运算中使用等价无穷小因子替换，不要在求极限的加减运算中使用，在加减法中等价无穷小的替换是有条件的，我们不去讨论.

（2）要熟练应用后面（1.3）所列重要等价无穷小.

【例 1.8】 求下列极限：

（Ⅰ） $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^4}-1}{1-\cos(x\sqrt{1-\cos x})}$； （Ⅱ） $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)}$.

【解】 （Ⅰ）注意 $x\to 0$ 时，$1-\cos(x\sqrt{1-\cos x})\sim\dfrac{1}{2}x^2(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{4}x^4$，$e^{x^4}-1\sim x^4$，$\Rightarrow$

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\frac{1}{4}x^4}=4.$$

评注 设 $x\to a$ 时，$\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma\Rightarrow\alpha\sim\gamma(x\to a)$.

（Ⅱ）因为 $\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1\sim\ln\left[\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1+1\right]=2x\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{2}\right)\sim 2x\cdot\dfrac{\cos x-1}{2}\sim$ $x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)=-\dfrac{1}{2}x^3(x\to 0)$，$\ln(1+2x^3)\sim 2x^3(x\to 0)$，所以

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{2x^3}=-\frac{1}{4}.$$

### （五）利用洛必达法则求未定式的极限

求 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式更常用的方法是用洛必达法则．具体方法如下：

**【定理 1.10】** 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0\ (\infty)$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0\ (\infty)$；$f(x),g(x)$ 在 $x=a$ 的空心邻域可导，$g'(x)\neq 0$；$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，其中 $A$ 可以是有限数也可以是 $\infty$.

【注】 将 $x\to a$ 改为 $x\to a+$ 或 $x\to a-$，或 $x\to\infty$ 等也有相应的洛必达法则．

应用上述法则时应注意：

① 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在也不为 $\infty$，不能说明 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在．

例如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'}$ 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\cos x)$ 不存在．

② 要验证应用法则的条件．例如，以下运算是错误的：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\cos x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{1}=1.$$

事实上 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\cos x}{x}=\infty$，这里 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\cos x}{x}$ 不是 $\dfrac{0}{0}$ 型也不是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型．

③ 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，则可连续用洛必达法则，只要符合条件，一直可用到求出极限为止．

④ 其他类型的未定式（$0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 等）先化成 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再用洛必达法则．

⑤ 使用洛必达法则也要用到一些技巧．如结合应用变量替换、等价无穷小因子替换、极限的四则运算法则、有确定非零极限的因子应先求出等.

【例 1.9】 求 $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2x)}{x\sin^3x}$.

【解】 先作恒等变形

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x^2-\sin^2x}{1+\sin^2x}\right)}{x\sin^3x}.$$

然后用等价无穷小因子替换:$x\to 0$ 时

$$\sin^3x\sim x^3,\quad \ln\left(1+\frac{x^2-\sin^2x}{1+\sin^2x}\right)\sim\frac{x^2-\sin^2x}{1+\sin^2x}\sim x^2-\sin^2x,$$

于是 $$w=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

最后用洛必达法则得

$$w=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

【例 1.10】 求 $w=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

【解】 属 $\infty-\infty$ 型.先通分化成$\dfrac{0}{0}$型,则有 $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}$.

如直接用洛必达法则比较麻烦,若注意到

$$(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad 则\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1.$$

即 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x\ (x\to 0)$,又 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$,因此对分母先作等价无穷小因子替换后再用洛必达法则得

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)=-\frac{1}{2}.$$

【例 1.11】 求 $w=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2}$.

【分析】 属 $1^\infty$ 型.对于指数型未定式,总可先用公式 $u^v=e^{v\ln u}$,然后再用洛必达法则,并注意 $\arctan x\sim x(x\to 0)$.

【解】 由于 $\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right)}$,而

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\ln|\arctan x|-\ln|x|)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x^2)}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\arctan x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-2x\arctan x}{3x\cdot x}=-\frac{1}{3}.$$

或者 $\ln\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)=\ln\left(\dfrac{\arctan x}{x}-1+1\right)\sim\dfrac{\arctan x-x}{x}\quad(x\to 0)$,若用该等价无穷小因子替换(可简化计算)有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)}=-\frac{1}{3}.$$

因此 $w=e^{-\frac{1}{3}}$.

评注 ① 对于 $w=\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim(g(x)\ln f(x))}$，当 $\lim f(x)^{g(x)}$ 是 $1^{\infty}$ 或 $0^{0}$ 或 $\infty^{0}$ 型时，极限 $\lim(g(x)\ln f(x))$ 总是 $0\cdot\infty$ 型，因而总可化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型．

② 若 $\lim f(x)^{g(x)}$ 是 $1^{\infty}$ 型，由于 $\lim f(x)=1$，$\ln f(x)=\ln[(f(x)-1)+1]\sim f(x)-1$，于是 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$，这种等价无穷小因子替换有时可简化计算．

### （六）分别求左右极限求得函数极限

求分段函数在连接点处的极限，或函数表达式中含有左、右极限不相等的项（如 $x\to0$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$，$\arctan\frac{1}{x}$）时，要分别求左、右极限求得函数极限．它的根据是【定理 1.8】．

【例 1.12】 求下列极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$：

（Ⅰ）$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}$；　　（Ⅱ）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x}-1}{2x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x<0.\end{cases}$

【解】 （Ⅰ）注意：$\lim\limits_{x\to0+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，　$\lim\limits_{x\to0+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$；　$\lim\limits_{x\to0-}e^{\frac{1}{x}}=0$，　$\lim\limits_{x\to0-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$．

$$\Rightarrow\qquad \lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{1+e^{-\frac{1}{x}}}{1-e^{-\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to0+}\arctan\frac{1}{x}=1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\lim_{x\to0-}\arctan\frac{1}{x}=(-1)\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

因此，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$．

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^{x}-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$，　$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$．

因此，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\dfrac{1}{2}$．

### （七）利用函数极限求数列极限

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则当 $\forall x_n\to+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$．即若 $y_n$ 可看成某函数在一串点 $x_n$ 上的函数值：$y_n=f(x_n)$，而 $x_n\to+\infty$，又知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=A$．

特别地，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$y_n=f(n)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=A$．

求数列极限转化为求函数极限的主要目的是为了用洛必达法则．

其他极限过程也有类似结论．

【例 1.13】 求数列极限 $w=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$．

【解】 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{n}-1\sim\ln(1+\sqrt[n]{n}-1)=\dfrac{1}{n}\ln n\quad(n\to+\infty)$．

用等价无穷小因子替换得

$$w=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\ln n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln n.$$

引入 $f(x)=\frac{1}{x}\ln x^2=\frac{2\ln x}{x}(x>0)$，则

$$w=\lim_{n\to+\infty}f(\sqrt{n})=\lim_{x\to+\infty}f(x)\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}}2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

### （八）用适当放大缩小法求极限

用夹逼定理（【定理 1.5】）求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$，就是要将数列 $\{x_n\}$ 放大与缩小成：$z_n\leqslant x_n\leqslant y_n$．要想成功，必须是极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n$ 会求且相等.

**▶1. 简单的放大缩小手段**

如 $n$ 个数之和不超过最大数乘 $n$，不小于最小数乘 $n$；分子与分母同为正数，把分母放大则分数值缩小；若干正数的乘积中，把小于 1 的因子略去则乘积放大，把大于 1 的因子略去则乘积缩小，等．

**【例 1.14】** 设 $a>0$ 为常数，$x_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(na+k)(na+k+1)}$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

**【解】** 先放大、缩小后可以化简：

$$z_n\xlongequal{\text{记}}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(na+k)^2}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(na+k+1)^2}\xlongequal{\text{记}}y_n,$$

而

$$\lim_{n\to+\infty}z_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(na+k)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(n^2a+\frac{(1+n)n}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(a+\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\right)=a+\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(na+k+1)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(n^2a+\frac{(n+3)n}{2}\right)=a+\frac{1}{2},$$

由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a+\frac{1}{2}$.

**▶2. 利用极限的不等式性质进行放大或缩小**

**【例 1.15】** 求数列极限：

（Ⅰ） $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n!}$；　　（Ⅱ） 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=2$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n{}^n}{n!}$．

**【解】** （Ⅰ）由于 $0<\frac{3^n}{n!}=\frac{3\cdot3\cdot\cdots\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n}\leqslant\frac{3^2}{2}\frac{3}{n}=\frac{27}{2}\cdot\frac{1}{n}$，又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{27}{2}\cdot\frac{1}{n}=0$，于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n!}=0.$$

（Ⅱ）由于 $x_n\to2$，故 $\exists N$，当 $n>N$ 时，$0<x_n<3$，于是 $0<\frac{x_n{}^n}{n!}<\frac{(3)^n}{n!}$．

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(3)^n}{n!}=0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n{}^n}{n!}=0$．

**【注】** 类似于题（Ⅰ）可证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b^n}{n!}=0$（$b$ 为常数）．