高等院校网络教育系列教材

线性代数

刘剑平　施劲松
曹宵临　钱夕元　◎主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等院校网络教育系列教材

线 性 代 数

刘剑平　施劲松　曹宵临　钱夕元　主编

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘剑平等主编. --上海:华东理工大学出版社,2009.6

(高等院校网络教育系列教材)

ISBN 7-5628-2555-5

Ⅰ.线... Ⅱ.刘... Ⅲ.线性代数—高等教育:远距离教育 教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 079989 号

高等院校网络教育系列教材

线性代数

主　　编/刘剑平　施劲松　曹宵临　钱夕元
责任编辑/胡　景
责任校对/金慧娟
封面设计/陆丽君
出版发行/华东理工大学出版社
地　　址/上海市梅陇路 130 号,200237
电　　话/(021)64250306(营销部)
传　　真/(021)64252707
网　　址/www.hdlgpress.com.cn
印　　刷　江苏南通印刷总厂有限公司
开　　本/787mm×1092mm　1/16
印　　张/16.25
字　　数/394 千字
版　　次/2009 年 6 月第 1 版
印　　次/2009 年 6 月第 1 次
印　　数/1-5000 册
书　　号/ISBN 978-7-5628-2555-5/O·204
定　　价/29.80 元

序

网络教育是依托现代信息技术进行教育资源传播、组织教学的一种崭新形式，它突破了传统教育传递媒介上的局限性，实现了时空有限分离条件下的教与学，拓展了教育活动发生的时空范围。从 1998 年 9 月教育部正式批准清华大学等 4 所高校为国家现代远程教育第一批试点学校以来，我国网络教育历经了 8 年发展期，目前全国已有 67 所普通高等学校和中央广播电视大学开展现代远程教育，注册学生超过 300 万人，毕业学生 100 万人。网络教育的实施大大加快了我国高等教育的大众化进程，使之成为高等教育的一个重要组成部分；随着它的不断发展，也必将对我国终身教育体系的形成和学习型社会的构建起到极其重要的作用。

华东理工大学是国家“211 工程”重点建设高校，是教育部批准成立的现代远程教育试点院校之一。华东理工大学网络教育学院凭借其优质的教育教学资源、良好的师资条件和社会声望，自创建以来得到了迅速的发展。但网络教育作为一种不同于传统教育的新型教育组织形式，如何有效地实现教育资源的传递，进一步提高教育教学效果，认真探索其内在的规律，是摆在我们面前的一个新的、亟待解决的课题。为此，我们与华东理工大学出版社合作，组织了一批多年来从事网络教育课程教学的教师，结合网络教育学习方式，陆续编撰出版一批包括图书、课程光盘等在内的远程教育系列教材，以期逐步建立以学科为先导的、适合网络教育学生使用的教材结构体系。

掌握学科领域的基本知识和技能，把握学科的基本知识结构，培养学生在实践中独立地发现问题和解决问题的能力是我们组织教材编写的一个主要目的。系列教材包括了计算机应用基础、大学英语等全国统考科目，也将涉及管理、法学、国际贸易、化工等多学科领域的专业教材。

根据网络教育学习方式的特点编写教材，既是网络教育得以持续健康发展的基础，也是一次全新的尝试。本套教材的编写凝聚了华东理工大学众多在学科研究和网络教育领域中有丰富实践经验的教师、教学策划人员的心血，希望它的出版能对广大网络教育学习者进一步提高学习效率予以帮助和启迪。

华东理工大学副校长

涂善东 教授

前　言

线性代数是高等院校理、工科和经济学科等专业的一门主要基础课程，也是研究生入学考试的必考内容。随着计算机的日益普及，线性代数的知识作为计算技术的基础也日益受到重视，尤其是用代数方法解决实际问题已渗透到各个领域，显示出其重要性和实用性。

工科及理科非数学专业的学生学习本课程的目的，主要在于加强基础及实际应用。考虑到网络教育的特点，我们着重讲清基本概念、原理和计算方法，避免繁琐的理论推导、证明，力求简明、准确；在内容安排上注重系统性、逻辑性，由浅入深、循序渐进。通过配以较多的例子，开阔学生思路，理解所学概念。每章后作一个小结，其中包括内容框图、基本要求、内容概要，以帮助学生认识本章的重点、难点。每章还配有自测题（附答案或提示）以测试学生重点内容、基本方法的掌握程度。另外，书后还配有各章习题的解答供学生参考；三套模拟考试卷（附答案或提示）用于帮助学生应试复习使用。

本书由刘剑平、施劲松、曹宵临、钱夕元主编。在编写过程中，得到了华东理工大学网络教育学院的大力支持，得到了院系领导鲁习文教授、李建奎教授的支持和关心，在此表示衷心的感谢。同时我们还要感谢教学组的王薇教授、邓淑芳、朱坤平、解惠表、李继根、林爱红、黄秋生、胡海燕、鲍亮、吕雪芹、黄文亮、卢俊杰等老师，他们在本书的编写过程中提出了宝贵的建议。

限于编者的水平，疏漏差错仍恐难免，敬请读者多提意见，不吝赐教，以便改正并诚恳邀请您加盟修订本书。

作者的电子信箱是：liujianping60@163.com

编　者

2009 年 5 月

目　　录

第1章 矩 阵

矩阵是一个极其重要的数学概念，也是线性代数研究的主要内容之一．本章将介绍矩阵的概念及其运算，进而讨论用途甚广的矩阵初等变换和初等矩阵．

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的定义

定义1 由 $m\times n$ 个元素排成 m 行 n 列的矩形元素表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ **维(阶)矩阵**．常用英文大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$ 记之．即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 中第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元．a_{ij} 中的 i 称作**行标**，j 称作**列标**，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简记作 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$m\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有时也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$．

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**．本书中的矩阵，除特别说明外，都指实矩阵．

1.1.2 若干特殊矩阵

行数与列数都等于 n 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

我们称 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角元**，它们所在的对角线称为**主对角线**．

称主对角线以上全为零的方阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为**下三角矩阵**. 称主对角线以下全为零的方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为**上三角矩阵**.

既是上三角矩阵又是下三角矩阵的方阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 称为**对角矩阵**. 对角矩阵也记作 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

称主对角元相同的对角阵 $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$ 为**数量阵(或标量阵)**. 特别地,当 $a=1$ 时,称 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 为**单位矩阵**,用 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$ 记之.

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1\ a_2\cdots\ a_n)$ 称为**行矩阵**,又称为 n **维行向量**. 为避免元素间的混淆,行矩阵也记作 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 称为**列矩阵**,又称为 m **维列向量**.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}$.

注 不同维的零矩阵是不相等的.

1.1.3 矩阵的应用举例

例 1 平面直角坐标系 xOy 按逆时针旋转 θ 角后得到新直角坐标系 $x'Oy'$,则平面上一点在新老坐标系下的关系式为

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases},$$

称 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 为从新坐标到老坐标的变换矩阵.

例 2 某 IT 集团公司向两个代理商发送三种电脑的数量(单位:套)如下表所示:

代理商＼商品名	WorkPad	Tablet PC	NC
甲	a_{11}	a_{12}	a_{13}
乙	a_{21}	a_{22}	a_{23}

表格中的数据可列成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij} 为该公司向第 i 个代理商发送第 j 种电脑的数量.

这三种电脑的单价及单件重量也可以列成矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix},$$

其中 b_{i1} 为第 i 种电脑的单价，b_{i2} 为第 i 种电脑的单件重量($i=1,2,3$).

例 3　线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

的系数可以表示成一个 $m\times n$ 维矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为线性方程组的**系数矩阵**.

线性方程组的系数与常数项合并在一起，可以表示成一个 $m\times(n+1)$维矩阵，即

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

这称为线性方程组的**增广矩阵**. 方程组中未知量及常数项，可以表示成 $n\times 1$ 维和 $m\times 1$ 维矩阵

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{和 } \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

1.2 矩阵的运算

在研究矩阵的运算之前，我们先给出矩阵相等的定义.

定义 1 给定两个同维 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，当

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注 矩阵相等是指在同维矩阵的前提下，对应位置的元素都相等.

1.2.1 矩阵的线性运算

数与矩阵相乘

定义 2 **数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积**记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$，规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=(\lambda a_{ij})_{m\times n},$$

即数 λ 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个元素所得到的矩阵. 显然有

$$0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O};\qquad 1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}.$$

数乘矩阵满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，λ、μ 为实数)：

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法

定义 3 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n},$$

即对应元素相加而成的同维矩阵.

矩阵加法满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，λ 为实数)：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

由加法和数乘运算，可以定义**矩阵的减法**为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n},$$

即对应元素相减而成的同维矩阵.

矩阵的加法与数乘运算结合起来，统称为矩阵的线性运算.

例 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&1&2\end{pmatrix}$，试求 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解

$$2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2\times1&2\times2&2\times3\\2\times4&2\times5&2\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\8&10&12\end{pmatrix},$$

$$3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3\times2&3\times0&3\times(-1)\\3\times3&3\times1&3\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&-3\\9&3&6\end{pmatrix},$$

$$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2-6 & 4-0 & 6-(-3)\\ 8-9 & 10-3 & 12-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 9\\ -1 & 7 & 6\end{pmatrix}.$$

例 2 求解矩阵方程 $2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & -4\\ 6 & 5\end{pmatrix}$.

解 由 $2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,移项得

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+1 & 0+(-2)\\ -2+5 & 4+(-4)\\ 0+6 & 3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ \frac{3}{2} & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

1.2.2 矩阵的乘法运算

在 1.1.3 节的例 2 中,容易看出,$a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}$ 即为集团公司向代理商乙所发送三种电脑的总重量,而 $a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+a_{i3}b_{31}$ 即为集团公司向第 i 个代理商($i=1,2$)所发送电脑的总价值. 于是,可以得到向两个代理商所发送电脑的总价值与总重量矩阵:

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}.$$

考查完这个例子后,我们可以给出两矩阵相乘的定义.

定义 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵,那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

由定义可知,一个 $1\times s$ 行矩阵与一个 $s\times 1$ 列矩阵的乘积是一个一阶方阵,也就是一个数,即

$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=c_{ij},$$

由此表明乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的 (i,j) 元 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的乘积(即对应位置元素乘积的和).

必须注意,矩阵可以相乘的条件为第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数.

例 3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 3×1 矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘,其乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 2×1矩阵,即

$$AB=\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times 2+0\times(-1)+(-3)\times 3\\ (-1)\times 2+(-2)\times(-1)+3\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 9\end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数,故而 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义.

例 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 由乘法定义可知

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

例 5 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 由乘法定义可知

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$$

由例 3 知道,$\boldsymbol{AB}$ 有意义而 $\boldsymbol{BA}$ 没意义;由例 4 知道,$\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$ 都有意义而不同阶;由例 5 知道,$\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$ 都有意义且同阶,但不相等. 总之,矩阵乘法不满足交换律,即在一般情况下,$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 所以我们称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$,而称 $\boldsymbol{BA}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 可交换**.

例 5 还表明,矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,但却有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 它说明矩阵乘法不满足消去律,即在一般情况下,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 的结论;同理,若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,也不能得出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 的结论.

例 6 试求所有与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$可交换的矩阵.

解 设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}$,由 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$,即

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{13} & c_{11} & c_{12} \\ c_{23} & c_{21} & c_{22} \\ c_{33} & c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}.$$

由矩阵相等的定义，即有 $c_{21}=c_{13}=c_{32}$，$c_{11}=c_{22}=c_{33}$，$c_{23}=c_{12}=c_{31}$，故与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的全体矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\ (a,b,c\text{ 是任意常数}).$$

矩阵乘法满足下列的运算规律（假设运算都是可行的）：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$ (λ 为常数)；

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$, $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(4) $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n$.

这里仅对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ 给出证明.

证 设 $\boldsymbol{A}_{m\times s}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}_{s\times n}=(b_{ij})$，$\boldsymbol{C}_{s\times n}=(c_{ij})$，则可设 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{m\times n}$，以及 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{N}=(n_{ij})_{m\times n}$. 则按矩阵乘法的定义，恰有

$$m_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{s}a_{ik}c_{kj}=n_{ij},$$

故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$.

例 7 试证两个下三角矩阵的乘积仍为下三角矩阵.

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是两个 n 阶下三角矩阵，即满足 $i<j$ 时，$a_{ij}=b_{ij}=0$. 设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})$，则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{j-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=j}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

在 $i<j$ 时，右端第一个和式中的 $b_{kj}=0$，第二个和式中的 $a_{ik}=0$，从而 $c_{ij}=0$，由此得证 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 为下三角矩阵.

有了矩阵的乘法，就可以定义矩阵的幂. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，k 为正整数，定义 $\boldsymbol{A}^k$ 为 k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘，即

$$\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}.$$

矩阵的幂运算满足以下运算规律（$\boldsymbol{A}$ 为方阵，k、l 为正整数）：

(1) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$； (2) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

注 由于矩阵乘法不满足交换律，故对于两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，一般而言，不成立 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

例 8 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$n$ 是正整数，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 $A^2=\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}$，所以有

$$A^n=\begin{cases}(A^2)^{\frac{n}{2}}=I^{\frac{n}{2}}=I & n\text{ 为偶数}\\ A(A^2)^{\frac{n-1}{2}}=AI^{\frac{n-1}{2}}=AI=A & n\text{ 为奇数}\end{cases}.$$

例 9 计算$(AB)^2$、A^2B^2，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}$.

解 由 $AB=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&6\end{pmatrix}$，得

$$(AB)^2=\begin{pmatrix}1&2\\-2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&14\\-14&32\end{pmatrix};$$

而由 $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，及 $B^2=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&10\\-15&10\end{pmatrix}$，知

$$A^2B^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&10\\-15&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&10\\-25&30\end{pmatrix}.$$

显然$(AB)^2\neq A^2B^2$.

1.2.3 矩阵的转置

定义 5 将矩阵 A 的行换成同序数的列而得到的一个新矩阵，称为 A 的转置矩阵，记作 A^{T} 或 A'. 即若

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}，\text{则 } A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}.$$

矩阵的转置满足下述运算规律(假设运算都是可行的)：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$，$\lambda$ 是一个实数；

(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

我们仅对(4)给出证明.

证 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$. 于是$(AB)^{\mathrm{T}}$ 的(i,j)元素为 AB 的(j,i)元素，等于 A 的第 j 行乘 B 的第 i 列，等于 B^{T} 的第 i 行乘 A^{T} 的第 j 列，即为 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的(i,j)元素，故

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

例 10 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\4&7\end{pmatrix}$，求$(AB)^{\mathrm{T}}$.

解法 1 因为 $AB=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\4&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\7&15\\14&19\end{pmatrix}$，所以