

2009年 全国各类成人高考
(高中起点升本、专科)

数学 (理工农医类)
应试模拟

王汉华 / 主编



高等教育出版社

2009 年全国各类成人高考(高中起点升本、专科)

数学(理工农医类)

应试模拟

主编 王汉华

参编 白翔 刘万里 范灵超 贾龙春
丁淑艳 王徜徉 刘雪莉



高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学应试模拟. 理工农医类/王汉华主编. —北京:高等教育出版社, 2009. 3

2009 年全国各类成人高考. 高中起点升本、专科

ISBN 978 - 7 - 04 - 026737 - 2

I. 数… II. 王… III. 数学 - 成人教育: 高等教育 - 入学考试 - 习题 IV. G723.46

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 032171 号

策划编辑	李 宁	责任编辑	雷旭波	封面设计	张志奇
责任绘图	郝 林	责任校对	王 超	责任印制	宋克学

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京凌奇印刷有限责任公司

开 本 787×1092 1/16
印 张 8.25
字 数 200 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2009 年 3 月第 1 版
印 次 2009 年 3 月第 1 次印刷
定 价 18.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究
物料号 26737-00

出版前言

为了帮助广大考生复习备考,我们根据教育部颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(高中起点升本、专科)》所规定的考试内容及要求,组织作者对这套与《全国各类成人高考复习指导丛书(高中起点升本、专科)》配套使用的应试模拟丛书进行了适当的修改和完善。

本套书具有以下几个特点:

1. 内容完整,重点突出。本套书严格按照大纲所规定的题型、内容和难易比例编写,全面覆盖复习考试大纲的知识点。

2. 解渴实用,针对性强。在每套模拟试卷后,不仅给出了“参考答案”,而且还设有“解题指要”,扼要指出该题所考查的能力、解题方法及考生解题时应注意的问题等,这对考生通过做题而举一反三、融会贯通地掌握所学知识,将起到积极的作用。

3. 名师荟萃,质量可靠。本套书的作者均为长期从事成人高考命题研究的专家、学者及一线辅导教师,他们熟谙成人高考命题的思路、原则和方法,具有丰富的经验。

本套书为全真模拟试卷,便于考生在复习备考的冲刺阶段进行实战演练。

在此提请广大考生注意:应在全面、系统复习的基础上做模拟试题,切忌边做题边翻看后面的答案及解析内容;应严格按照考试大纲所规定的考试时间做题,答完试卷后再对照答案给自己评分。

本套书各科后附有近3年的成人高等学校招生全国统一考试(高中起点升本、专科)试题解析,便于考生掌握解题技巧,把握命题趋向,沉着应对考试。

预祝广大考生取得圆满成功!

高等教育出版社

2009年3月

目 录

数学(理工农医类)模拟试卷(一)	1
数学(理工农医类)模拟试卷(一)参考答案及解题指要	5
数学(理工农医类)模拟试卷(二)	12
数学(理工农医类)模拟试卷(二)参考答案及解题指要	16
数学(理工农医类)模拟试卷(三)	22
数学(理工农医类)模拟试卷(三)参考答案及解题指要	26
数学(理工农医类)模拟试卷(四)	32
数学(理工农医类)模拟试卷(四)参考答案及解题指要	36
数学(理工农医类)模拟试卷(五)	41
数学(理工农医类)模拟试卷(五)参考答案及解题指要	45
数学(理工农医类)模拟试卷(六)	50
数学(理工农医类)模拟试卷(六)参考答案及解题指要	54
数学(理工农医类)模拟试卷(七)	61
数学(理工农医类)模拟试卷(七)参考答案及解题指要	66
数学(理工农医类)模拟试卷(八)	72
数学(理工农医类)模拟试卷(八)参考答案及解题指要	77
数学(理工农医类)模拟试卷(九)	83
数学(理工农医类)模拟试卷(九)参考答案及解题指要	87
数学(理工农医类)模拟试卷(十)	94
数学(理工农医类)模拟试卷(十)参考答案及解题指要	98
附录	106
2006年成人高等学校招生全国统一考试(高中起点升本、专科)数学(理工农医类)试题解析	106
2007年成人高等学校招生全国统一考试(高中起点升本、专科)数学(理工农医类)试题解析	113
2008年成人高等学校招生全国统一考试(高中起点升本、专科)数学(理工农医类)试题解析	120

数学(理工农医类)模拟试卷(一)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题, 共 85 分)

注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.
2. 每小题选出答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 不能答在试卷上.
3. 考试结束, 监考人将本试卷和答题卡一并收回.
4. 在本试卷中, $\tan \alpha$ 表示角 α 的正切, $\cot \alpha$ 表示角 α 的余切.

一、选择题: 本大题共 17 小题; 每小题 5 分, 共 85 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

- (1) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$, 则 $(A \cap B) \cup C$ 等于
(A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{1, 2, 4\}$ (C) $\{1, 3, 4\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4\}$
- (2) 下列函数中既是奇函数, 又在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增的是
(A) $y = \sin x$ (B) $y = -x^2$ (C) $y = x \lg 2$ (D) $y = -x^3$
- (3) 下列函数中, 最小正周期为 π 的是
(A) $y = \sin 2x$ (B) $y = \sin x$ (C) $y = \cos x$ (D) $y = \tan \frac{x}{2}$
- (4) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 4$, $a_5 = 16$, 则 $a_9 =$
(A) 256 (B) -256 (C) 128 (D) -128
- (5) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $A = \frac{\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, 则 c 等于
(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{3} - 1$ (D) $\sqrt{3}$
- (6) 已知点 $(a, 2)$ ($a > 0$) 到直线 $l: x - y + 3 = 0$ 的距离为 1, 则 a 等于
(A) $\sqrt{2}$ (B) $2 - \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{2} + 1$
- (7) 不等式 $x^2 > x$ 的解集是
(A) $(-\infty, 0)$ (B) $(0, 1)$
(C) $(1, +\infty)$ (D) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
- (8) 设复数 $z = 1 + \sqrt{2}i$, 则 $z^2 - 2z =$
(A) -3 (B) 3 (C) $-3i$ (D) $3i$
- (9) 在空间中, 关于直线 m, n 与平面 α, β 有下列四个命题:
① 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$;

- ② 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp n$;
 ③ 若 $m \perp \alpha, n // \beta$ 且 $\alpha // \beta$, 则 $m \perp n$;
 ④ 若 $m // \alpha, n \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m // n$.

其中真命题的序号是

- (A) ①② (B) ③④ (C) ①④ (D) ②③

(10) 若抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点重合, 则 p 的值为

- (A) -2 (B) 2 (C) -4 (D) 4

(11) 设向量 $a = (-1, 2), b = (2, -1)$, 则 $(a \cdot b)(a + b)$ 等于

- (A) (1, 1) (B) (-4, -4) (C) -4 (D) (-2, -2)

(12) 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为

- (A) $y = 3x - 4$ (B) $y = -3x + 2$ (C) $y = -4x + 3$ (D) $y = 4x - 5$

(13) 总数为 M 的一批零件中有 25 个次品, 从中任抽一个出来, 若次品被抽取的概率为 0.25, 则 M 等于

- (A) 200 (B) 150 (C) 100 (D) 80

(14) 函数 $f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(1)$ 的值为

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(15) 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2ax + 4$ ($a > 0$), 若 $x_1 < x_2, x_1 + x_2 = 0$, 则有

- (A) $f(x_1) < f(x_2)$ (B) $f(x_1) = f(x_2)$
 (C) $f(x_1) > f(x_2)$ (D) $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定

(16) 设直线 l 过点 $(-2, 0)$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 则 l 的斜率是

- (A) ± 1 (B) $\pm \frac{1}{2}$ (C) $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\pm \sqrt{3}$

(17) 记者要为 5 位志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照, 要求排成一排, 2 位老人相邻但不排在两端, 不同的排法共有

- (A) 1 440 种 (B) 960 种 (C) 720 种 (D) 480 种

第 II 卷 (非选择题, 共 65 分)

注意事项:

1. 用钢笔或圆珠笔直接答在试卷中.
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚.

题号	二	三				总分
		22	23	24	25	
分数						

得分	评卷人

二、填空题:本大题共 4 小题;每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中横线上.

(18) 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = -1$, 公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$, 则 $q =$ _____, $S_n =$ _____.

(19) 直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}x - 1$, 则直线 l 的倾斜角 $\alpha =$ _____.

(20) 已知 $a = (1-t, 1-t, t)$, $b = (2, t, t)$, 则 $|b-a|$ 的最小值是 _____.

(21) 同时抛掷两枚相同的均匀硬币, 随机变量 $\xi = 1$ 表示结果中有正面向上, $\xi = 0$ 表示结果中没有正面向上, 则 $E\xi =$ _____.

三、解答题:本大题共 4 小题,共 49 分.解答应写出推理、演算步骤.

得分	评卷人

(22) (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $\cos C = \frac{3}{4}$.

(I) 求 $\sin A$ 的值;

(II) 求 AC .

得分	评卷人

(23) (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_n a_{n-1} = a_{n-1} - a_n$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$), 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\left\{\frac{1}{nb_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明:

$$T_n < \frac{3}{4} - \frac{1}{n+2}.$$

得分	评卷人

(24) (本小题满分 12 分)

如图 1-1, 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一定点 $P(x_0, y_0)$ ($y_0 > 0$) 作两条直线交抛物线于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点.

(I) 求该抛物线上纵坐标为 $\frac{p}{2}$ 的点到其焦点 F 的距离;

(II) 当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时, 求 $\frac{y_1 + y_2}{y_0}$ 的值, 并证明直线 AB 的斜率是非零常数.

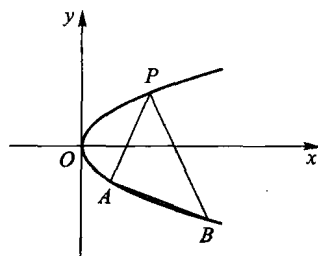


图 1-1

得分	评卷人

(25) (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 当 $x = -1$ 时取得极大值 7, 当 $x = 3$ 时取得极小值, 求 $f(x)$ 的极小值及此时 a, b, c 的值.

数学(理工农医类)模拟试卷(一)

参考答案及解题指要

一、选择题

(1) 【参考答案】 (D)

$$(A \cap B) \cup C = \{2, 3\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

【解题指要】 本题主要考查集合的运算. 本题中的集合均以列举法给出, 因此计算较容易. 要注意运算的次序, 对于 $(A \cap B) \cup C$, 应先计算 $A \cap B$, 然后再与集合 C 取并集.

(2) 【参考答案】 (C)

选项(A)中, $y = \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内不具有单调性; 选项(B)中, $y = -x^2$ 是偶函数; 选项(C)中, $y = x \lg 2$ 是奇函数, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 内为增函数, 故在 $(0, +\infty)$ 内也是增函数; 对于选项(D), $y = -x^3$ 是奇函数, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为减函数.

【解题指要】 本题考查对函数的奇偶性和单调性的理解. 对函数性质的考查是函数部分考查的重点, 对于常见函数的性质应熟练掌握. 对奇偶性的判断通常是利用定义或借助于函数的图像, 而对单调性的判断可以利用定义、图像、复合函数等.

(3) 【参考答案】 (A)

函数 $y = \sin 2x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$; 函数 $y = \sin x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$; 函数 $y = \cos x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$; 函数 $y = \tan \frac{x}{2}$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$. 故选(A).

【解题指要】 本题考查对三角函数周期性的掌握. $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega \neq 0$) 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$; $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega \neq 0$) 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$; $y = \tan \omega x$ ($\omega \neq 0$) 的最小正周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$.

(4) 【参考答案】 (A)

由 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则有 $\frac{a_5}{a_3} = q^2 = 4$, $a_9 = a_5 \cdot q^4 = 16 \times 16 = 256$. 故选(A).

【解题指要】 本题主要考查等比数列的通项公式. 要注意分析已知量和所求量的关系, 从而简化运算. 本题也可用如下方程组求解:

$$\begin{cases} a_5 = a_1 \cdot q^4, \\ a_3 = a_1 \cdot q^2. \end{cases}$$

(5) 【参考答案】 (B)

由余弦定理可得:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ 即 } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1 + c^2 - 3}{2c},$$

解得 $c = 2$.

【解题指要】 本题考查解三角形的知识. 解三角形主要应用的知识是正弦定理和余弦定理. 本题已知条件中给出的是两边及一边的对角, 求另一边的长, 采用余弦定理较好.

(6) **【参考答案】** (C)

由点到直线的距离公式可得:

$$1 = \frac{|a - 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}},$$

解得 $a = \sqrt{2} - 1$ 或 $a = -\sqrt{2} - 1$ (小于 0, 舍去). 故应选 (C).

【解题指要】 本题考查点到直线的距离公式. 平面内一点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离 d 为:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

应用公式时要将直线方程化为一般式.

(7) **【参考答案】** (D)

$x^2 > x$ 可化为 $x^2 - x > 0$, 即 $x(x - 1) > 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > 1$.

【解题指要】 本题考查一元二次不等式的解法. 对于一元二次不等式的求解, 主要是利用一元二次方程及一元二次函数的相关知识, 有时要结合函数的图像进行求解.

(8) **【参考答案】** (A)

$$z^2 - 2z = (1 + \sqrt{2}i)^2 - 2(1 + \sqrt{2}i) = 1 - 2 + 2\sqrt{2}i - 2 - 2\sqrt{2}i = -3.$$

【解题指要】 本题主要考查对复数运算的掌握. 复数的乘法法则类似于多项式的乘法法则, 注意 $i^2 = -1$.

(9) **【参考答案】** (D)

对于①, 直线 m, n 可能异面, 也可能相交.

对于④, 直线 m, n 可能相交, 也可能异面.

②、③正确.

【解题指要】 本题主要考查空间中的线面关系. 对于此类问题可以从正方体等模型中寻找答案.

(10) **【参考答案】** (D)

由椭圆方程知 $c = 2$, 即右焦点坐标为 $(2, 0)$. 又 $y^2 = 2px$ 的焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$, 而其与椭圆右焦点重合, 故有 $\frac{p}{2} = 2$, 故 $p = 4$.

【解题指要】 对于椭圆有 $a^2 = b^2 + c^2$, 由此易求 c . 在求抛物线的焦点坐标、准线方程等基本量时, 一定要注意将方程化为标准方程的形式.

(11) **【参考答案】** (B)

$$(a \cdot b)(a + b) = [(-1) \times 2 + 2 \times (-1)](-1 + 2, 2 - 1) = -4(1, 1) = (-4, -4).$$

应选(B).

【解题指要】 本题考查对平面向量坐标运算的掌握. 向量的运算有加法、减法、数乘及向量的内积运算等, 应分清各种运算之间的区别, 熟练掌握各种运算法则.

(12) **【参考答案】** (B)

$$y' = 3x^2 - 6x, y'|_{x=1} = -3,$$

切线方程为 $y - (-1) = -3(x - 1)$, 即 $y = -3x + 2$.

【解题指要】 本题主要考查对导数的几何意义及求导法则的掌握. 导数是研究函数的重要工具, 对求导法则要熟练掌握. 在得出 $y'|_{x=1} = -3$ 后, 由于四个选项中只有(B)所表示的直线斜率为 -3 , 故可直接判断.

(13) **【参考答案】** (C)

次品被抽到的概率为 $\frac{25}{M} = 0.25$, 可知 $M = 100$.

【解题指要】 本题考查等可能事件的概率.

(14) **【参考答案】** (C)

求 $f^{-1}(1)$ 的值就是解方程 $\frac{x-1}{2x-3} = 1$, 解得 $x = 2$.

【解题指要】 本题考查反函数的有关知识. 在解反函数的有关问题时, 有时并不要求反函数, 而只要理解原函数与反函数的对应关系即可. 本题求 $f^{-1}(1)$ 的值, 就是求反函数下 1 所对应的值, 也就是求原函数下哪一个值对应 1, 即解方程 $\frac{x-1}{2x-3} = 1$. 当然, 本题也可以先求反函数再求值, 运算要复杂一些.

(15) **【参考答案】** (A)

二次函数 $f(x) = ax^2 + 2ax + 4$ ($a > 0$) 的对称轴为 $x = -1$, 图像开口向上, 故比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小只需比较 x_1 与 x_2 离对称轴的远近. 由 $x_1 < x_2$ 及 $x_1 + x_2 = 0$ 知 x_1 为负值, $x_2 = -x_1$ 为正值, x_1 离对称轴近, 故有 $f(x_1) < f(x_2)$, 应选(A).

【解题指要】 二次函数的单调性由开口方向及对称轴确定, 因此比较函数值大小的问题通常是研究自变量与对称轴的远近问题. 结合图形可以较直观地得出结论. 通常解决二次函数的相关问题都会结合二次函数的图像, 也就是要“看图说话”.

(16) **【参考答案】** (C)

设直线 l 的斜率为 k , 则直线 l 的方程为: $y = k(x + 2)$, 即 $kx - y + 2k = 0$.

由直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切知圆心 $(0, 0)$ 到直线 l 的距离为 1, 由点到直线的距离公式可得:

$$\frac{|k \times 0 - 0 + 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1,$$

整理得 $k^2 = \frac{1}{3}$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解题指要】 本题主要考查对圆的切线方程的理解, 考查直线斜率的有关概念及计算. 对直线和圆的位置关系通常用圆心到直线的距离来研究.

(17) 【参考答案】 (B)

将两位老人排在一起有 A_2^2 种方法, 再将 5 位志愿者排在一起有 A_5^5 种排法, 最后将两位老人排在 5 位志愿者中的 4 个空中, 有 C_4^1 种方法. 故共有 $A_2^2 A_5^5 C_4^1 = 960$ 种方法, 应选(B).

【解题指要】 对相邻的问题通常将相邻的元素看成一个整体, 采用“捆绑法”. 分类计数原理和分步计数原理是解决排列、组合问题的基础.

二、填空题

(18) 【参考答案】 $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right]$

$$\text{由 } \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{S_5 + (a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10})}{S_5} = 1 + q^5 = \frac{31}{32},$$

得 $q = -\frac{1}{2}$, 从而

$$S_n = \frac{(-1) \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = \frac{2}{3} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right].$$

【解题指要】 本题主要考查等比数列的通项公式及求和公式, 为较易题.

(19) 【参考答案】 $\frac{\pi}{3}$ (或 60°)

由直线 l 的方程 $y = \sqrt{3}x - 1$ 可知直线的斜率 $k = \sqrt{3}$, 而 $k = \tan \alpha$, 且 $0 \leq \alpha < \pi$, 因此 $\tan \alpha = \sqrt{3}$, 可得 $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

【解题指要】 斜率和倾斜角是体现直线性质的重要几何量, 应明确其定义及相互关系.

(20) 【参考答案】 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} - \mathbf{a} &= (1+t, 2t-1, 0), \\ |\mathbf{b} - \mathbf{a}| &= \sqrt{(1+t)^2 + (2t-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5t^2 - 2t + 2} \\ &= \sqrt{5\left(t - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}} \geq \frac{3\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

【解题指要】 本题考查空间向量的坐标运算及模的相关知识.

(21) 【参考答案】 0.75

$\xi = 0$ 表示两枚均为反面, 概率为 $\frac{1}{4}$, 则 $\xi = 1$ 时概率为 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 所以 $E\xi = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = 0.75$.

【解题指要】 本题考查数学期望的计算及概率的求法. 事实上, 本题中随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

由数学期望的公式可得答案.

三、解答题

(22) 【参考答案】 解 (I) 因为 $\cos C = \frac{3}{4}$, $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

因为在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$, 所以 $\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}$, $\sin A = \frac{\sqrt{14}}{8}$.

(II) 设 $AC = x$ ($x > 0$). 在 $\triangle ABC$ 中,

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C.$$

因为

$$AB = \sqrt{2}, BC = 1, \cos C = \frac{3}{4},$$

所以

$$(\sqrt{2})^2 = 1 + x^2 - 2 \times 1 \times x \times \frac{3}{4},$$

整理得 $2x^2 - 3x - 2 = 0$, 解得 $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}$ (舍去), 所以 $AC = 2$.

【解题指要】 本题主要考查解三角形的有关知识, 主要是应用正弦定理、余弦定理进行求解.

(23) 【参考答案】 解 (I) 当 $n = 1$ 时, $b_1 = \frac{1}{a_1} = 3$.

当 $n \geq 2$ 时,

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n \cdot a_{n-1}} = 1,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 3, 公差为 1 的等差数列, 其通项公式为 $b_n = n + 2$.

(II) 因为

$$\frac{1}{nb_n} = \frac{1}{n(n+2)},$$

所以

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \right]. \end{aligned}$$

因为

$$\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} > \frac{2n+2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+2},$$

所以

$$-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} < -\frac{2}{n+2},$$

则有

$$\frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \right] < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{n+2},$$

即

$$T_n < \frac{3}{4} - \frac{1}{n+2}.$$

【解题指要】 本题考查求数列的通项、数列求和及不等式的证明等知识.

对递推公式适当变形是求通项公式的常用方法. 等差数列和等比数列是重要的特殊数列, 也是考查的重点.

第(II)问的解答中利用裂项求和法进行求和, 在不等式证明中对所给代数式的结构适当变形即可, 也可采用比较法证明.

(24) 【参考答案】 解 (I) 当 $y = \frac{p}{2}$ 时, $x = \frac{p}{8}$.

又抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$, 由抛物线定义知所求距离为 $\frac{p}{8} - (-\frac{p}{2}) = \frac{5p}{8}$.

(II) 设直线 PA 的斜率为 k_{PA} , 直线 PB 的斜率为 k_{PB} .

由 $y_1^2 = 2px_1, y_0^2 = 2px_0$, 相减得

$$(y_1 - y_0)(y_1 + y_0) = 2p(x_1 - x_0),$$

故

$$k_{PA} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2p}{y_1 + y_0} \quad (x_1 \neq x_0).$$

同理可得

$$k_{PB} = \frac{2p}{y_2 + y_0} \quad (x_2 \neq x_0).$$

由 PA, PB 的倾斜角互补知 $k_{PA} = -k_{PB}$, 即

$$\frac{2p}{y_1 + y_0} = -\frac{2p}{y_2 + y_0},$$

所以

$$y_1 + y_2 = -2y_0,$$

故

$$\frac{y_1 + y_2}{y_0} = -2.$$

设直线 AB 的斜率为 k_{AB} . 由

$$y_2^2 = 2px_2, y_1^2 = 2px_1,$$

相减得

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2p(x_2 - x_1),$$

所以

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_1 + y_2} \quad (x_1 \neq x_2).$$

将 $y_1 + y_2 = -2y_0$ ($y_0 > 0$) 代入上式, 得

$$k_{AB} = \frac{2p}{y_1 + y_2} = -\frac{p}{y_0},$$

所以 k_{AB} 是非零常数.

【解题指要】 本题主要考查直线、抛物线等基本知识, 考查运用解析几何的方法分析问题和解决问题的能力.

(25) 【参考答案】 解 依题意, $x = -1$ 与 $x = 3$ 是方程 $f'(x) = 0$ 的两个根, 于是先求出 $f'(x)$, 再由 $f'(-1) = 0, f'(3) = 0$, 求出 a, b, c .

因为

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

所以

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

因为 $x = -1$ 时函数取得极大值, $x = 3$ 时取得极小值, 所以 $-1, 3$ 是方程 $f'(x) = 0$ 的两个根, 所以

$$\begin{cases} 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0, \\ 3 \times 3^2 + 2a \times 3 + b = 0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a = -3, \\ b = -9, \end{cases}$ 所以

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + c.$$

又 $x = -1$ 时, $y_{\text{极大}} = 7$, 所以

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + c = 7,$$

解得 $c = 2$, 则知

$$y_{\text{极小}} = f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - 9 \times 3 + 2 = -25,$$

即

$$a = -3, b = -9, c = 2, y_{\text{极小}} = -25.$$

【解题指导】 本题考查导数在寻找函数极值点方面的应用. 可导函数极值点的导数必为 0, 但是 $f'(x) = 0$ 的点未必是极值点. 例如: $y = x^5, y' = 5x^4, y'|_{x=0} = 0$, 但 $(0, 0)$ 不是函数 $y = x^5$ 的极值点, 因为导函数在经过此点时未变号.

数学(理工农医类)模拟试卷(二)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题, 共 85 分)

注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.
2. 每小题选出答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 不能答在试卷上.
3. 考试结束, 监考人将本试卷和答题卡一并收回.
4. 在本试卷中, $\tan \alpha$ 表示角 α 的正切, $\cot \alpha$ 表示角 α 的余切.

一、选择题: 本大题共 17 小题; 每小题 5 分, 共 85 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

(1) 函数 $f(x) = \log_2(x-3)$ 的定义域为

- (A) $\{x|x \leq 3, x \in \mathbf{R}\}$ (B) $\{x|x \geq 3, x \in \mathbf{R}\}$
(C) $\{x|x > 3, x \in \mathbf{R}\}$ (D) $\{x|x < 3, x \in \mathbf{R}\}$

(2) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 450$, 则 $a_2 + a_8$ 的值等于

- (A) 45 (B) 75 (C) 180 (D) 300

(3) 函数 $y = x^2 + 2x + 3$ ($x \leq -1$) 的反函数为

- (A) $y = 1 - \sqrt{x-2}$ ($x \geq 2$) (B) $y = -1 - \sqrt{x-2}$ ($x \geq 2$)
(C) $y = 1 + \sqrt{x-2}$ ($x \geq 2$) (D) $y = -1 + \sqrt{x-2}$ ($x \geq 2$)

(4) 下列函数中, 周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的是

- (A) $y = \sin \frac{x}{2}$ (B) $y = \sin 2x$
(C) $y = \cos \frac{x}{4}$ (D) $y = \cos 4x$

(5) 从 4 位男教师和 3 位女教师中选出 3 位教师派往 3 所学校任教, 每校 1 人, 要求这 3 位教师中男、女教师都要有, 则不同的选派方案共有

- (A) 210 种 (B) 186 种 (C) 180 种 (D) 90 种

(6) 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程是

- (A) $y = \pm \frac{3}{2}x$ (B) $y = \pm \frac{2}{3}x$ (C) $y = \pm \frac{9}{4}x$ (D) $y = \pm \frac{4}{9}x$