21世纪高职高专规划教材

公共基础课系列

应用数学

卢家林　李大林　主编

清华大学出版社

21世纪高职高专规划教材

公共基础课系列

应用数学

卢家林　李大林　主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书以理论联系实际为原则，结合专业对高等数学的实际需要而编写。

全书共分9章，主要内容包括极限、连续、微分学和积分学及其应用、微分方程与级数、数学实验、线性代数与线性规划、一元微积分在经济分析中的应用、数学模型、测量数据处理。书后附录有标准正态分布表和 $\tau_\alpha(\upsilon)$ 分布表。

本书可作为高职高专院校各专业通用高等数学教材、各类培训教材，也可作为工程技术人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/卢家林，李大林主编. —北京：清华大学出版社，2009.8

21世纪高职高专规划教材. 公共基础课系列

ISBN 978-7-302-20614-9

Ⅰ. 应…　Ⅱ. ①卢…②李…　Ⅲ. 应用数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第119123号

责任编辑：朱怀永
责任校对：李　梅
责任印制：孟凡玉
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印　装　者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　**印　张**：16.5　**字　数**：376千字
版　　次：2009年8月第1版　　**印　　次**：2009年8月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：25.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　　产品编号：034329-01

前　言

FOREWORD

随着我国高等职业教育内涵建设和专业课程改革的迅速发展，对高等数学课程提出了新的要求，要求高等数学课程进行结构性的改革，要求数学教师具有更高更强的综合素质和职业教育能力，促使高等数学课程的教学改革不断持续深化。总结近几年编者从事高等职业教育高等数学课程教学的改革经验，主要有以下几点：

一是采用数学建模的思想方法建构数学课程，培养学生的综合素质、职业能力，体现数学课程改革的思路，不仅关注数学在各专业的渗透和直接应用，而且还重视培养学生的科学精神和创新意识。二是贯彻"以服务为宗旨，以应用为目的，以必需够用为度"的教学原则。三是实践科学发展观，统筹兼顾数学的基础作用、工具作用、学生的个性发展需要。四是缓解课时少与教学内容多的矛盾，恰当把握教学内容的深度和广度，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性。五是注意满足模块化教学的需要，在教学中可根据不同专业和学时多少在内容上有所取舍，使其适应不同专业对数学课程的要求。六是重视理论联系实际的学术价值和社会价值。为了满足教学改革的需要，非常有必要编写适用的、具有特色的教材，本书正是在这个背景下，筹划并编写的。

本书有以下特点：①注重理论联系实际。为了推进素质教育，培养学生的创新精神、应用意识、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力，密切结合现代科学技术，在理工结合、学科交叉等方面迈出了可喜的一步。②"教"、"学"、"用"结合，提高学生学习的积极性。③为了突出重点，强化难点问题的理解、消化，对一些重点问题给出说明或注意。④编写的内容力求简明易懂、突出实用性。充分考虑高职学生的数学基础，适度淡化逻辑论证，充分利用几何说明，帮助学生理解有关概念和理论。⑤每节都有精选的习题和答案，方便学生自主学习。

本书的一个显著特色是具有职业性、开放性和应用性，发展学生综合运用数学的能力。注重理论联系实际、密切结合现代科学技术，在理论与实际结合、理工结合、学科交叉方面特色鲜明。

全书共分 9 章，主要内容包括极限、连续、微分学和积分学及其应用、微分方程与级数、数学实验、线性代数与线性规划、一元微积分在经济分析中的应用、数学模型、测量数据处理。书后附录有标准正态分布表和 $\tau_\alpha(\upsilon)$分布表。

本书可作为高等职业院校高等数学的通用教材，参考学时为 100 学时左右，其中第 1 章～第 3 章为各专业必修的内容，第 4 章～第 8 章为不同专业根据需要进行选择教学的内容。第 9 章数理统计知识的应用，是理论与实际结合、理工结合的内容，专业性比较强，作为"拓展与提高"，可供学生在教师的指导下进行自学，也可以根据专业选修。

本教材由卢家林、李大林担任主编，完成结构安排、统稿和定稿工作。编写分工如下：

林华编写第 1 章、第 4 章，白克志编写第 2 章、第 3 章、第 7 章，黄艳华编写第 5 章，李大林编写第 6 章、第 8 章，卢家林编写第 9 章和附录。

本书在编写过程中，得到柳州职业技术学院院、教务处、系部领导的关心、指导和大力支持，并提出了宝贵的意见。清华大学出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此一并表示衷心地感谢。

由于我们水平和经验有限，不妥之处在所难免，恳请有关专家、学者及使用本书的老师、同学和读者批评指正。E-mail：lujialinli2@163. com。

编　者

2009 年 7 月

目　录

CONTENTS

第 1 章　极限　连续 …… 1

1.1　函数 …… 1

1.1.1　函数的概念 …… 1

1.1.2　函数的表示法 …… 2

1.1.3　函数的特性 …… 3

1.1.4　复合函数 …… 4

1.1.5　基本初等函数 …… 5

1.1.6　初等函数 …… 5

习题 1.1 …… 5

习题 1.1 参考答案 …… 6

1.2　极限的概念 …… 7

1.2.1　数列的极限 …… 7

1.2.2　函数的极限 …… 7

习题 1.2 …… 10

习题 1.2 参考答案 …… 10

1.3　极限的运算 …… 11

1.3.1　无穷小量与无穷大量 …… 11

1.3.2　极限的四则运算 …… 12

习题 1.3 …… 13

习题 1.3 参考答案 …… 14

1.4　两个重要极限 …… 14

1.4.1　第一重要极限公式 …… 14

1.4.2　第二重要极限公式 …… 15

1.4.3　连续复利 …… 16

习题 1.4 …… 17

习题 1.4 参考答案 …… 17

1.5　函数的连续性 …… 18

1.5.1　函数的增量 …… 18

1.5.2　函数的连续性 …… 18

1.5.3　函数的间断点 …… 20

1.5.4 闭区间上连续函数的性质 …… 20
习题 1.5 …… 21
习题 1.5 参考答案 …… 21

第 2 章 微分学及其应用 …… 22

2.1 导数的概念 …… 22
2.1.1 导数概念的引入 …… 22
2.1.2 导数的定义 …… 23
2.1.3 可导与连续的关系 …… 24
2.1.4 导数的基本公式(一) …… 24
习题 2.1 …… 25
习题 2.1 参考答案 …… 25
2.2 导数的基本公式与复合函数求导法则 …… 26
2.2.1 导数的运算法则 …… 26
2.2.2 导数的基本公式(二) …… 27
2.2.3 复合函数的求导法则 …… 29
习题 2.2 …… 31
习题 2.2 参考答案 …… 32
2.3 三种特殊的导数方法 …… 32
2.3.1 隐函数求导法 …… 32
2.3.2 取对数求导法 …… 34
2.3.3 由参数方程确定的函数的求导法 …… 35
习题 2.3 …… 36
习题 2.3 参考答案 …… 37
2.4 高阶导数 …… 37
习题 2.4 …… 39
习题 2.4 参考答案 …… 39
2.5 函数的微分 …… 40
2.5.1 微分的定义 …… 40
2.5.2 微分的基本公式 …… 41
2.5.3 微分的四则运算法则 …… 41
2.5.4 复合函数的微分法则(微分形式的不变性) …… 42
2.5.5 微分在近似计算中的应用 …… 42
习题 2.5 …… 44
习题 2.5 参考答案 …… 44
2.6 微分中值定理与洛必达法则 …… 44
2.6.1 微分中值定理 …… 44
2.6.2 洛必达法则 …… 46

习题 2.6 …… 49
习题 2.6 参考答案 …… 50
2.7　函数的单调性、极值与最值 …… 50
　2.7.1　函数的单调性 …… 50
　2.7.2　函数的极值与最值 …… 51
　2.7.3　函数的最大值与最小值 …… 54
习题 2.7 …… 57
习题 2.7 参考答案 …… 57
2.8　曲线的凹凸性、拐点与函数作图 …… 57
　2.8.1　函数的凹凸性与拐点 …… 58
　2.8.2　曲线的渐近线 …… 59
　2.8.3　函数图形的描绘 …… 59
习题 2.8 …… 61
习题 2.8 参考答案 …… 61

第 3 章　积分学及其应用 …… 62

3.1　定积分的概念与性质 …… 62
　3.1.1　定积分产生的实际背景 …… 62
　3.1.2　定积分的概念与几何意义 …… 63
　3.1.3　定积分的基本性质 …… 64
习题 3.1 …… 65
习题 3.1 参考答案 …… 66
3.2　微积分基本公式 …… 66
　3.2.1　原函数与不定积分 …… 66
　3.2.2　牛顿-莱布尼兹公式 …… 67
习题 3.2 …… 68
习题 3.2 参考答案 …… 69
3.3　不定积分的基本公式和直接积分法 …… 69
　3.3.1　不定积分的基本运算法则及公式 …… 69
　3.3.2　直接积分法 …… 70
习题 3.3 …… 71
习题 3.3 参考答案 …… 72
3.4　换元积分法 …… 72
　3.4.1　第一换元积分法 …… 72
　3.4.2　第二换元积分法 …… 75
　3.4.3　定积分的换元法 …… 76
习题 3.4 …… 78
习题 3.4 参考答案 …… 78

3.5 分部积分法…… 79
3.5.1 不定积分的分部积分法 …… 79
3.5.2 定积分的分部积分法 …… 80
习题 3.5 …… 81
习题 3.5 参考答案 …… 81
3.6* 无限区间上的广义积分 …… 81
习题 3.6 …… 83
习题 3.6 参考答案 …… 83
3.7 定积分的应用…… 83
3.7.1 定积分的微元法 …… 84
3.7.2 定积分在几何方面的应用 …… 84
3.7.3 定积分在物理上的应用 …… 88
习题 3.7 …… 89
习题 3.7 参考答案 …… 90

第 4 章 微分方程与级数 …… 91

4.1 微分方程的基本概念…… 91
4.2 一阶微分方程…… 92
4.2.1 一阶变量可分离方程 …… 92
4.2.2 一阶线性微分方程 …… 94
习题 4.2 …… 98
习题 4.2 参考答案 …… 98
4.3 二阶常系数线性微分方程…… 98
4.3.1 二阶常系数线性齐次方程 …… 98
4.3.2 二阶常系数线性非齐次方程 …… 99
习题 4.3 …… 102
习题 4.3 参考答案…… 102
4.4 级数 …… 102
4.4.1 级数的概念…… 103
4.4.2 幂级数…… 104
4.4.3 函数展开成幂级数…… 105
习题 4.4 …… 109
习题 4.4 参考答案…… 110
4.5 傅里叶级数 …… 110
习题 4.5 …… 114
习题 4.5 参考答案…… 114

第 5 章 数学实验 …… 115

5.1 MATLAB 软件简介 …… 115

5.1.1 MATLAB 的启动和退出 …… 115

5.1.2 MATLAB 界面 …… 116

5.1.3 MATLAB 的变量及管理 …… 117

5.1.4 MATLAB 的函数 …… 117

5.1.5 MATLAB 基本运算符 …… 118

5.1.6 工作方式简介 …… 118

5.1.7 MATLAB 绘图 …… 122

习题 5.1 …… 126

习题 5.1 参考答案 …… 126

5.2 高等数学运算 …… 126

5.2.1 利用 MATLAB 求极限 …… 126

5.2.2 利用 MATLAB 求导 …… 128

5.2.3 利用 MATLAB 求积分 …… 129

5.2.4 利用 MATLAB 求常微分方程 …… 130

习题 5.2 …… 132

习题 5.2 参考答案 …… 133

5.3 线性代数运算 …… 133

5.3.1 利用 MATLAB 求行列式 …… 133

5.3.2 利用 MATLAB 进行矩阵运算 …… 134

5.3.3 利用 MATLAB 求方程组的解 …… 138

5.3.4 线性代数数学实验 …… 139

习题 5.3 …… 140

习题 5.3 参考答案 …… 141

5.4 概率统计运算 …… 142

5.4.1 利用 MATLAB 计算正态分布 …… 142

5.4.2 利用 MATLAB 进行区间估计 …… 143

习题 5.4 …… 143

习题 5.4 参考答案 …… 144

5.5 求解线性规划问题 …… 144

5.5.1 求解非线性规划 …… 144

5.5.2 求解线性规划 …… 148

习题 5.5 …… 151

习题 5.5 参考答案 …… 151

第 6 章　线性代数与线性规划 …… 153
6.1　高斯消元法与矩阵的行初等变换 …… 153
习题 6.1 …… 158
习题 6.1 参考答案 …… 158
6.2　二阶与三阶行列式 …… 158
习题 6.2 …… 161
习题 6.2 参考答案 …… 162
6.3　矩阵的运算 …… 162
6.3.1　矩阵的加、减、数乘、乘法 …… 162
6.3.2　用矩阵表示线性方程组及其解的方法 …… 165
6.3.3　矩阵的转置 …… 166
习题 6.3 …… 167
习题 6.3 参考答案 …… 167
6.4　逆矩阵 …… 167
习题 6.4 …… 169
习题 6.4 参考答案 …… 169
6.5　特征值与特征向量 …… 169
习题 6.5 …… 173
习题 6.5 参考答案 …… 173
6.6　矩阵在马尔可夫分析中的应用 …… 173
习题 6.6 …… 176
习题 6.6 答案 …… 177
6.7　线性规划 …… 177
习题 6.7 …… 181
习题 6.7 参考答案 …… 182

第 7 章　一元微积分在经济分析中的应用 …… 183
7.1　经济学中的常用函数 …… 183
7.1.1　需求函数与价格函数 …… 183
7.1.2　供给函数与均衡价格 …… 183
7.1.3　总成本函数、收入函数和利润函数 …… 184
习题 7.1 …… 185
习题 7.1 参考答案 …… 186
7.2　导数在经济分析中的应用 …… 186
7.2.1　边际分析 …… 186
7.2.2　函数的弹性 …… 187
习题 7.2 …… 188

习题 7.2 参考答案……189
7.3 积分在经济分析中的应用……190
习题 7.3……193
习题 7.3 参考答案……193

第 8 章 数学模型……194

8.1 数学模型简介……194
8.2 双层玻璃窗功效的数学模型……195
8.3 传送系统效率的数学模型……196
习题 8.3……198
习题 8.3 参考答案……198
8.4 存储模型……198
8.5 讨价还价中的数学问题……203
8.6 最佳采购策略……204
习题 8.6……205
习题 8.6 参考答案……205

第 9 章 测量数据处理……206

9.1 测量误差与数字应用……206
9.1.1 测量及其类型……206
9.1.2 误差及其表示……207
9.1.3 测量误差的来源……209
9.1.4 零件的机械加工误差……210
9.1.5 误差的分类……210
9.1.6 测量误差的表征……212
9.1.7 公差……214
9.1.8 测量值的有效数字及其运算规律……214
习题 9.1……217
习题 9.1 参考答案……218
9.2 随机误差统计分析……218
9.2.1 概率论与数理统计基本知识……218
9.2.2 随机误差的正态分布曲线……223
9.2.3 概率分布计算……224
9.2.4 随机误差的极限值……229
9.2.5 直接测量列的数据处理……230
习题 9.2……232
习题 9.2 参考答案……233
9.3 测量数据的统计处理……234

9.3.1 当总体标准差 σ 已知时的区间估计 …… 234
9.3.2 当总体标准差 σ 未知时的区间估计 …… 236
9.3.3 测量的不确定度 …… 241
习题 9.3 …… 243
习题 9.3 参考答案 …… 244

附录 A 标准正态分布表 …… 245

附录 B $\tau_\alpha(\upsilon)$ 分布表(双侧) …… 247

参考文献 …… 248

第 1 章

极限　连续

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，是高等数学研究的基本对象。由于高等数学的研究对象与初等数学有所不同，从而引起了研究方法的变化，极限就是为了适应这种变化而产生的新方法。极限是贯穿高等数学始终的基本推理工具，连续则是函数的一个重要性态，连续函数是高等数学研究的主要对象。

本章介绍函数、极限与连续的基本知识，为今后学习微积分奠定必要的基础。

1.1　函数

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

在研究某一个自然现象或实验过程中，会同时产生两个变量，这两个变量不是孤立地变化，而是相互联系、相互依赖，并遵循着一定的规律进行变化。我们可以用一个式子表达这两个变量之间的对应规律，根据这个对应规律，当其中一个变量在某一范围内任取一个数值时，另一个变量就会有一个确定的值与之对应。

例如，自由落体运动问题中的两个变量——路程 S 与时间 t 之间有下列关系

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

定义 1　设两个变量分别为 x 和 y，若当变量 x 在实数域的某一范围 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的对应规律，总有一个确定数值与之对应，则变量 y 称为变量 x 的函数。记作

$$y = f(x), \quad x \in D$$

其中，变量 x 称为自变量，变量 y 称为函数(或因变量)。

2. 函数的定义域

若自变量 x 取某一数值 x_0 时，函数 y 有一个确定的值 y_0 与之对应，则称函数 y 在 x_0 处有定义。所以，函数的定义域就是使函数有定义的实数的全体。自变量 x 的取值范围 D，称为函数的定义域。

确定函数的定义域，一般应考虑下面两个方面：

(1) 当所讨论的函数是反映实际问题时，定义域由实际意义来确定；

(2) 当所讨论的函数没有附加规定时，函数的定义域就是使得函数式子有意义的自

变量的全体实数值。

通常用不等式、区间或集合表示定义域。

满足不等式

$$|x-x_0|<\delta \quad (\delta>0)$$

的一切 x 构成的集合，称为点 x_0 的 δ 邻域。

【例 1-1】 求函数 $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-5}}$ 的定义域。

分析：负数不能开偶次方根，分母不能为零。

解：解不等式组

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0 \\ \sqrt{x-5}\neq 0 \end{cases}$$

得 $x>5$，所以函数的定义域为 $(5,+\infty)$。

【例 1-2】 求函数 $y=\ln(x^2-2x-3)+\arcsin\dfrac{x-1}{7}$ 的定义域。

分析：零和负数没有对数，$\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$。

解：解不等式组

$$\begin{cases} x^2-2x-3>0 \\ -1\leqslant \dfrac{x-1}{7}\leqslant 1 \end{cases}$$

得 $-6\leqslant x<-1$ 或 $3<x\leqslant 8$，所以函数的定义域为 $[-6,-1)\cup(3,8]$。

3. 函数值

与自变量 x_0 相对应的数值 y_0，称为当 $x=x_0$ 时的**函数值**，记作

$$y_0=f(x_0), \quad 或 \quad y|_{x=x_0}=y_0$$

【例 1-3】 设 $f(x)=x^2-x+3$，求 $f(3)$，$f(x+1)$，$f(f(x))$。

解：

$$\begin{aligned} f(3)&=3^2-3+3=3^2=9 \\ f(x+1)&=(x+1)^2-(x+1)+3=x^2+x+3 \\ f(f(x))&=(x^2-x+3)^2-(x^2-x+3)+3 \\ &=x^4-2x^3+6x^2-5x+9 \end{aligned}$$

【例 1-4】 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$。

解：令 $u=x+1$，得 $x=u-1$，代入 $f(x+1)=x^2+3x+5$，得

$$\begin{aligned} f(u)&=(u-1)^2+3(u-1)+5 \\ &=u^2+u+3 \end{aligned}$$

因此，$f(x)=x^2+x+3$。

1.1.2 函数的表示法

函数 $f(x)$ 的具体表示法通常有三种：公式法、表格法和图示法。

(1) 以数学式子表示函数的方法叫做公式法。上述例子中的函数都是以公式法表示

的，公式法的优点是便于理论推导和计算。常见的用公式法表示的函数有以下三种：

① 显函数　因变量 y 是用自变量 x 的表达式直接表示出来的，形如 $y=f(x)$。

② 隐函数　因变量 y 与自变量 x 的关系是由方程 $F(x,y)=0$ 表示的，例如 $x^2+y^2-\sin xy=0$。

③ 分段函数　在定义域内因变量 y 的值不能用一个统一的式子表示，而是用两个或两个以上的式子表示，例如

$$y=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

（2）以表格形式表示函数的方法叫做函数的表格表示法，它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，如三角函数表、对数表等，都是以这种方法表示的函数。表格表示法的优点是所求的函数值容易查得。

（3）以图形表示函数的方法叫做函数的图示法。这种方法在工程技术上应用较普遍，图示法的优点是直观形象，可看到函数的变化趋势。

1.1.3　函数的特性

1. 函数的单调性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在某区间上有定义，在该区间内任取两点 x_1,x_2，满足 $x_1<x_2$，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在该区间内**单调递增**；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在该区间内**单调递减**。

2. 函数的奇偶性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，对于定义域中的任何 x，如果 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为**偶函数**；如果 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为**奇函数**。不是偶函数也不是奇函数的函数，称为**非奇非偶函数**。

【例 1-5】　判断下列函数的奇偶性。

（1）$f(x)=2x^4-5x^2$　　（2）$f(x)=2x^2\sin x$　　（3）$f(x)=3x+x^2$

解：（1）因为

$$f(-x)=2(-x)^4-5(-x)^2=2x^4-5x^2=f(x)$$

所以 $f(x)=2x^4-5x^2$ 为偶函数。

（2）因为

$$f(-x)=2(-x)^2\sin(-x)=-2x^2\sin x=-f(x)$$

所以 $f(x)=2x^2\sin x$ 为奇函数。

（3）因为

$$f(-x)=3(-x)+(-x)^2=-3x+x^2$$

所以

$$f(-x)\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x)$$

所以 $f(x)=3x+x^2$ 为非奇非偶函数。

3. 函数的周期性

定义 4 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的正数 T，使得定义域内所有的 x 都使 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**，最小的正数 T 称为函数的最小正周期。

例如，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 均为周期函数。前两个函数的最小正周期为 2π，后两个函数的最小正周期为 π。

4. 函数的有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在某区间有定义，如果存在一个正数 M，使得对于该区间所有的 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在该区间为有界函数，否则称为无界函数。

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为有界函数，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 为无界函数。

1.1.4 复合函数

在科学研究与生产实践中，常会遇到一种函数，两个变量之间的关系不是直接的，而是通过第三个变量联系起来的。

【例 1-6】 设一物体质量为 m，以初速度 v_0 垂直向上抛出，求其动能 E 与时间 t 的函数关系。

解：物体的动能 E 是速度 v 的函数，而速度 v 又是时间 t 的函数，即

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

$$v=v_0-gt$$

将 $v=v_0-gt$ 代入 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$ 中，得

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$$

显然，动能 E 是时间 t 的函数，我们称这种形式的函数为复合函数。

定义 6 若变量 y 是变量 u 的函数，即 $y=f(u)$，而变量 u 又是变量 x 的函数，即 $u=g(x)$，当变量 x 在区间 I 内任取一数值时，对应的 u 值可使变量 y 有定义，则称变量 y 是变量 x 的**复合函数**，其中变量 u 为中间变量，记作

$$y=f(g(x))$$

【例 1-7】 设 $y=\sqrt{u}$，$u=3-x^2$。则 $y=\sqrt{3-x^2}$ 是 x 的复合函数，其定义域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，$u=3-x^2$ 是中间变量。

【例 1-8】 设 $y=\arcsin u$，$u=\dfrac{2x-1}{3}$，则 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 是 x 的复合函数，其定义域为 $[-1,2]$，$u=\dfrac{2x-1}{3}$ 是中间变量。

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的。例如，$y=\arcsin u$ 和 $u=5+x^2$ 就不能复合成复合函数，因为函数 $u=5+x^2$ 的值域是 $[5,+\infty)$，不在函数 $y=\arcsin u$ 的定